04 벡터의 성분과 내적

기하와 벡터 교과서 Review

문제 1

두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(5,\ -1)$에 대하여

$$\overrightarrow{OP}=k\vec{a}+l\vec{b}\ (\text{단, } k>0,\ l>0,\ k+l=1)$$

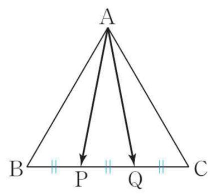
을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구하여라.(단, O는 원점이다.)

문제 2

삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에 대하여 $5\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$일 때, 삼각형 PAB, PBC, PCA의 넓이의 비를 구하여라.

문제 3

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이다.
변 BC를 삼등분하는 점을 P, Q라고 할 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값을 구하여라.



문제 4

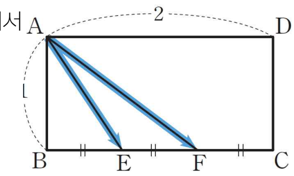
$|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=3\sqrt{5}$일 때, 실수 t에 대하여 $|\vec{a}+t\vec{b}|$의 최솟값을 구하여라.

04 벡터의 성분과 내적

기하와 벡터 교과서 Review

문제 5

다음 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$인 직사각형 ABCD에서 변 BC를 삼등분한 점을 점 B에서 가까운 것부터 차례로 E, F라고 할 때, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$의 값은?



① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{16}{9}$ ④ $\frac{17}{9}$ ⑤ 2

문제 6

$|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$이고 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}\,|\vec{a}+\vec{b}|$가 성립할 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구하여라.

문제 7

다음 두 직선

$$l:\begin{cases}x=5-3t\\y=-3+4t\end{cases},\quad m:\begin{cases}x=-3+2s\\y=2+3s\end{cases}$$

의 교점을 지나는 직선이 직선 $4x+3y-2=0$과 수직일 때, 이 직선의 방정식을 매개변수 r를 사용하여 나타내어라.

문제 8

두 평면벡터 $\vec{a}=(-1,5)$, $\vec{c}=(3,2)$에 대하여 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라고 할 때, $\vec{p}$는 $(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=4$를 만족한다. 이때 $|\vec{p}-\vec{a}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

04 벡터의 성분과 내적

기하와 벡터 교과서 Review

문제 9

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$이고 $|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}|$가 성립할 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\sin\theta$의 값을 구하여라.

문제 10

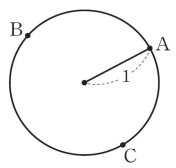
점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$, 점 Q의 위치벡터를 $\vec{q}$라고 하자. 좌표평면 위의 평면벡터 $\vec{a}=(2, 3)$, $\vec{c}=(4, 2)$, $\vec{n}=(2, -1)$에 대하여 $\vec{p}$, $\vec{q}$는 각각

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0,\ |\vec{q}-\vec{c}|=2$$

를 만족할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 구하여라.

문제 11

반지름의 길이가 1인 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$의 최솟값을 구하여라.

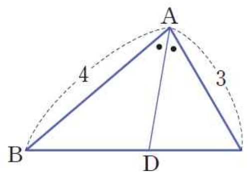


04 벡터의 성분과 내적

기하와 벡터 교과서 Review

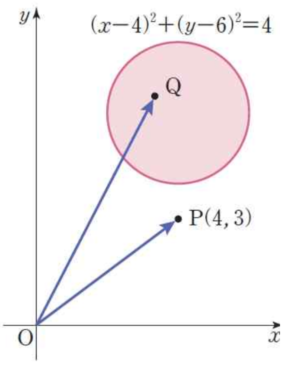
문제 12

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 점 D는 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점이고 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$이다. $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$일 때, 상수 m, n의 곱 mn의 값을 구하여라.



문제 13

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 P(4, 3)과 경계선을 포함하는 원 $(x-4)^2+(y-6)^2=4$ 내부의 한 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.



문제 14

평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$$

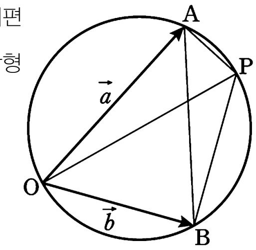
일 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 설명하여라.

04 벡터의 성분과 내적

기하와 벡터 교과서 Review

문제 15

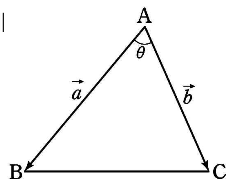
다음 그림과 같이 선분 OP를 지름으로 하는 원주 위에 두 점 A, B가 선분 OP를 경계로 서로 반대편에 놓여 있다. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하면 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\dfrac{3}{5}$이다. 삼각형 OAB의 넓이를 S, 삼각형 PAB의 넓이를 T라고 할 때, $\dfrac{S}{T}$의 값을 구하여라.



문제 16

평면 위의 임의의 삼각형 ABC에 대하여 $\angle BAC=\theta$이고 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 삼각형 ABC의 넓이를 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, θ를 이용하여 나타내어라.



(2) $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$을 이용하여 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

임을 보여라.

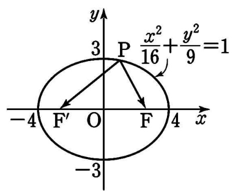
문제 17

오른쪽 그림과 같이 타원

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

의 두 초점 F, F$'$과 타원 위의 한 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PF'}$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

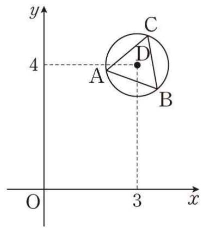


04 벡터의 성분과 내적

기하와 벡터 교과서 Review

문제 18

오른쪽 그림과 같이 점 D(3, 4)를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$의 크기를 구하여라.



문제 19

점 P(0, 2)를 지나는 직선이 원 $|\vec{k}-(0,\ 1)|=3$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 원의 중심을 Q라고 하자. $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$의 값이 최소일 때, 두 점 A, B의 좌표를 각각 구하여라. (풀이 과정을 자세히 써라.)

문제 20

점 P와 삼각형 ABC에 대하여

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$$

이고, 두 삼각형 PAB, PBC의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 할 때, $\dfrac{S_2}{S_1}$의 값을 구하고 그 과정을 서술하여라.

04 벡터의 성분과 내적

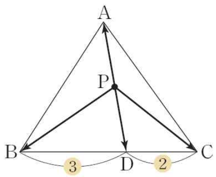
〈정답 및 해설〉 기하와 벡터 – 4단원. 벡터의 성분과 내적

1. 5

2.
$5\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{PA}=-\dfrac{3\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PB}}{3+2}$

이므로 선분 BC를 3 : 2로 내분하는 점 D라고 하면 $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{DP}$이므로 점 P는 선분 AD의 중점이다.



$\triangle PAB=\dfrac{1}{2}\triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}\triangle ABC=\dfrac{3}{10}\triangle ABC$

$\triangle PBC=\dfrac{1}{2}\triangle ABC$

$\triangle PCA=\dfrac{1}{2}\triangle ADC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}\triangle ABC=\dfrac{1}{5}\triangle ABC$

따라서 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$의 넓이의 비는

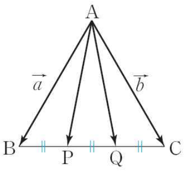
$\dfrac{3}{10}:\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{5}=3:5:2$

3.
오른쪽 그림과 같이

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하면

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times3\times\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{9}{2}$



한편 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$,

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$이므로

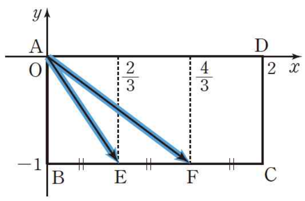
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{13}{2}$

$|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=3\sqrt{5}$에서

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$45=25-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-8$$
$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$$
$$=4t^2-16t+25$$
$$=4(t-2)^2+9$$

4. 이때 $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$은 $t=2$일 때 최솟값 9를 갖는다.
따라서 $|\vec{a}+t\vec{b}|$의 최솟값은 3이다.

5.



위의 그림과 같이 점 A를 원점, 선분 AD, 선분 AB를 각각 x축, y축 위에 놓으면

$\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$,

$\mathrm{E}\left(\dfrac{2}{3},\ -1\right)$, $\mathrm{F}\left(\dfrac{4}{3},\ -1\right)$

$\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{2}{3},\ -1\right)$, $\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{4}{3},\ -1\right)$이므로

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\dfrac{8}{9}+1=\dfrac{17}{9}$$

따라서 ④이다.

6.
$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}+\vec{b}|$의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$$
$$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=0$$

두 벡터가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$|\vec{a}|^2+4|\vec{a}|^2\cos\theta+|\vec{a}|^2=0$$
$$2|\vec{a}|^2(2\cos\theta+1)=0,\ \cos\theta=-\dfrac{1}{2}$$

따라서 구하는 각의 크기는 $\dfrac{2}{3}\pi$이다.

7.
두 직선 l, m을 연립하면

$5-3t=-3+2s$, 즉 $3t+2s=8$ …… ①

$-3+4t=2+3s$, 즉 $4t-3s=5$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $t=2$이므로 두 직선의 교점의 좌표는 $(-1,\ 5)$

직선 $4x+3y-2=0$과 수직이므로 구하는 직선의 방향벡터는 $(4,\ 3)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$x=-1+4r,\ y=5+3r$$

8.
두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 5)$, $\mathrm{C}(3,\ 2)$의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{c}$라고 하자.

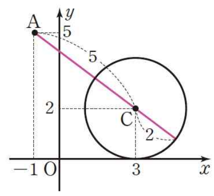
$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=4$에서 $|\vec{p}-\vec{c}|=2$

즉, 점 P는 중심이 C(3, 2)이고, 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

$|\vec{p}-\vec{a}|$는 두 점 A, P 사이의 거리이고, $\overline{CA}=5$이다. 따라서 $|\vec{p}-\vec{a}|$의

최댓값은 $5+2=7$

최솟값은 $5-2=3$



04 벡터의 성분과 내적

9.

$|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}|$를 변형하면

$\sqrt{|\vec{a}+\vec{b}|^2}-\sqrt{|\vec{a}-\vec{b}|^2}=\sqrt{2}|\vec{a}|$

$\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}-\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}$

$=\sqrt{2}|\vec{a}|$

$\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

$-\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

$=\sqrt{2}|\vec{a}|$

이때 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$이므로

$\sqrt{2|\vec{a}|^2(1+\cos\theta)}-\sqrt{2|\vec{a}|^2(1-\cos\theta)}=\sqrt{2}|\vec{a}|$

$\sqrt{2}|\vec{a}|\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{2}|\vec{a}|\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2}|\vec{a}|$

$|\vec{a}|\neq 0$이므로

$$\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}=1$$

양변을 제곱하면

$$1+\cos\theta-2\sqrt{1-\cos^2\theta}+1-\cos\theta=1$$

$$2\sqrt{\sin^2\theta}=1$$

$0\leq\theta\leq\pi$에서 $0\leq\sin\theta\leq1$이므로

$$\sin\theta=\frac{1}{2}$$

]10.

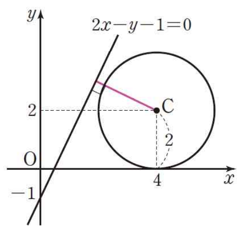
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$, 점 $A(2,\ 3)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 하면 $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$에서

$$(2,\ -1)\cdot(x-2,\ y-3)=0$$

$$2x-y-1=0$$

즉, 점 P는 직선 $2x-y-1=0$ 위에 있다.

점 $C(4,\ 2)$의 위치벡터를 $\vec{c}$라고 하면 $|\vec{q}-\vec{c}|=2$에서 점 Q는 중심이 $C(4,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.



이때 원 C의 중심 $(4,\ 2)$와 직선 $2x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|8-2-1|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{PQ}$의 최솟값은 $\sqrt{5}-2$

11.

주어진 원을 중심이 원점인 원의 방정식으로 나타내면

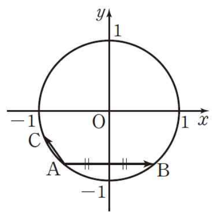
$$x^2+y^2=1$$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$$

$\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$일 때,

$\cos\theta\leq0$이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{AB}$를 x축과 평행하도록 놓으면 세 점 A, B, C의 좌표는 각각 다음과 같다.



$$A(-x_1,\ y_1),\ B(x_1,\ y_1),\ C(x_2,\ y_2)$$

(단, $0<x_1<1$, $-1\leq x_2<-x_1$)

$\overrightarrow{AB}=(2x_1,\ 0)$, $\overrightarrow{AC}=(x_2+x_1,\ y_2-y_1)$이므로

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(2x_1,\ 0)\cdot(x_2+x_1,\ y_2-y_1)$$

$$=2x_1x_2+2x_1^2$$

$$=2\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2-\frac{x_2^2}{2}$$

이때 $x_2^2\leq1$이므로 $-\frac{x_2^2}{2}\geq-\frac{1}{2}$

따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$의 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이다.

12.

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$이므로 점 D는 $\overline{BC}$를 $4:3$으로 내분하는 점이다. 즉,

$$\overrightarrow{AD}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}$$

따라서 $m=\frac{3}{7}$, $n=\frac{4}{7}$이므로 $mn=\frac{12}{49}$

13.

. $\overrightarrow{OP}$에 수직인 직선의 방정식을 $y=-\frac{4}{3}x+k$라 하고 이 직선 위의 점 $R\left(r,\ -\frac{4}{3}r+k\right)$에 대하여 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OR}$의 내적을 구하면

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=(4,\ 3)\cdot\left(r,\ -\frac{4}{3}r+k\right)=3k$$

즉, $\overrightarrow{OP}$에 수직인 한 직선 위에 있는 점 R의 위치에 상관없이 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OR}$의 내적의 값은 $3k$로 일정하다.

기울기가 $-\frac{4}{3}$이고 원 $(x-4)^2+(y-6)^2=2^2$에 접하는 직선을

$$y=-\frac{4}{3}x+k,\quad 4x+3y-3k=0$$

이라고 하면 이 직선과 원의 중심 $(4,\ 6)$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|4\times4+3\times6-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

에서 $3k=44$ 또는 $3k=24$

따라서 구하는 내적의 최댓값은 44, 최솟값은 24이다.

04 벡터의 성분과 내적

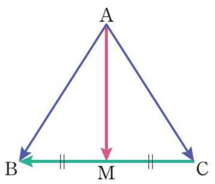
기하와 벡터 교과서 Review

14.

3. $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

이므로 주어진 식은 $\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$



삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라고 하면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

이므로 $\overrightarrow{CB}\cdot 2\overrightarrow{AM}=0$, 즉 $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{AM}$

$\overline{AM}$이 $\overline{BC}$를 수직이등분하므로 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이다.

. $\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$라고 하면

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(s-1)\vec{a}+t\vec{b}$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b}$

두 점 A, B가 원주 위에 있고 선분 OP가 지름이므로

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{BP}$

그러므로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=0$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=0$에서

$(s-1)\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad s-1+t\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=0$

$s+\dfrac{1}{3}t-1=0$ ……①

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서

$s\vec{a}\cdot\vec{b}+(t-1)\vec{b}\cdot\vec{b}=0,\quad s\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}+(t-1)=0$

$\dfrac{3}{5}s+t-1=0$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $s=\dfrac{5}{6}$, $t=\dfrac{1}{2}$

15.

즉, $\overrightarrow{OP}=\dfrac{5}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$이므로 선분 OP와 선분 AB의 교점을 Q라고 하면

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\dfrac{5k}{6}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\vec{b}$

그런데 점 Q는 선분 AB의 내분점이므로

$\dfrac{5k}{6}+\dfrac{k}{2}=1,\quad k=\dfrac{3}{4}$

따라서 $\overline{OQ}:\overline{QP}=3:1$이므로 $\dfrac{S}{T}=3$

16. (1) $\triangle ABC=2|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

(2) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

17. ④

18. 점 D는 정삼각형 ABC의 외심이고, 정삼각형의 외심과 무게중심은 일치하므로 점 D는 정삼각형 ABC의 무게중심이다.

즉, $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$이므로

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\overrightarrow{OD}$

따라서

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=3|\overrightarrow{OD}|=3\sqrt{3^2+4^2}=15$

19. $|\vec{x}-(0,\ 1)|=3$을 만족하는 벡터 $\vec{x}$의 종점은 점 $(0,\ 1)$을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

원 위의 두 점 A, B에 대하여 $|\overrightarrow{QA}|=|\overrightarrow{QB}|=3$이고

두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QB}|\cos\theta=9\cos\theta$이고

$-1\le\cos\theta\le 1$이므로 $\cos\theta=-1$, 즉 $\theta=\pi$일 때

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$의 값은 최소가 된다.

따라서 조건을 만족하는 두 교점의 좌표는

A$(0,\ 4)$, B$(0,\ -2)$ 또는 A$(0,\ -2)$, B$(0,\ 4)$

20. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$, $2\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PC}$

따라서 점 P는 선분AC를 1 : 2로 내분하는 점이다.

삼각형 PAB와 삼각형 PBC의 밑변을 각각 $\overline{PA}$, $\overline{PC}$로 놓으면 두 삼각형의 높이가 같으므로 $S_1:S_2=1:2$이다.

따라서 $\dfrac{S_2}{S_1}=2$이다.