37번 문항 (2023 중앙대학교 논술기출)

주기가 2π 인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=15\,\frac{|\sin x|}{2+\cos x}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\pi} f(x)dx$ 의 값을 구하시오.

접근하기 상당히 막막하게 느껴질텐데, 일단 천천히 접근해봅시다.

주어진 식에서 좌변은 $f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 꼴을 보다보면 $\int_0^{\pi} f(x)dx$ 를 구해야 하는데,

$\int_0^{\pi}\left\{f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx$ 을 하면 처리를 못해줄 것 같고..물론 우변의 $\int_0^{\pi} 15\times\frac{|\sin x|}{2+\cos x}\,dx$ 는 적분이 가능하지만요.

그래서 양 변에 0부터 $\frac{\pi}{2}$ 까지 적분을 취하면 어떨까요?

그렇다면 이렇게 됩니다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx$ 이고 $2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 를 하나 떼어내서 치환한다면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx=\int_0^{\pi} f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx$ 라서 또 처리하기 불편한 꼴이 되어버립니다.

그렇다면 여기서 주목해야 할 점은 $f(x)$ 가 주기를 지닌다는 점입니다.
이를 이용한다면 수열을 나열해서 규칙을 발견하는것처럼 원하는 값을 얻을수도 있습니다.

일단, $f(x)$ 와 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 는 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동했다는 점을 감안하면, 나중에 똑같은 녀석들이 나와서 상쇄되도록 구간의 길이가 $\frac{\pi}{2}$ 를 유지하며 적분을 나열해 볼 필요가 있습니다.

이렇게요. 그리고 이렇게 할 때 주의할점은 함수를 통일시켜 동일한 값이 반복등장하는지 쉽게 관찰해주는 것입니다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$$

이런식으로요. 그렇다면 이렇게 쭉 나열해봅시다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}15\times\frac{|\sin x|}{2+\cos x}dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx+2\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi}15\times\frac{|\sin x|}{2+\cos x}dx$$

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx+2\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}f(x)dx=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}15\times\frac{|\sin x|}{2+\cos x}dx$$

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left\{f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}f(x)dx+2\int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi}f(x)dx=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}15\times\frac{|\sin x|}{2+\cos x}dx$$

그리고 알아보기 쉽게

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=A$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx=B$, $\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx=C$, $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}f(x)dx=D$라 하면

$f(x)$의 주기는 2π이므로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi}f(x)dx=A$입니다.

따라서

$$A+2B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}15\times\frac{|\sin x|}{2+\cos x}dx$$

$$B+2C=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi}15\times\frac{|\sin x|}{2+\cos x}dx$$

$$C+2D=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}15\times\frac{|\sin x|}{2+\cos x}dx$$

$$D+2A=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}15\times\frac{|\sin x|}{2+\cos x}dx$$

즉 4원 1차 연립방정식이 나오게 되었고 우리가 구하는 답은 $\int_0^{\pi}f(x)dx=A+B$이므로 연립해서 A와 B를 구해주면 되겠죠?

38번 문항 (2023 중앙대학교 논술기출)

다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|}{1-\sin x}\,dx$$

당연히 구간의 위, 아래가 절댓값은 같지만 부호가 다르다? 먼저 기함수나 우함수부터 의심해 봐야겠죠. 하지만, 함수 $y=\frac{|x|}{1-\sin x}$은 기함수나 우함수가 아니므로 다른 관점에서 접근할 필요가 있습니다.

당연하게도, 함수에 절댓값이 존재하니 적분범위를 나눠주고 한번 풀어봐야겠죠?

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-x}{1-\sin x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1-\sin x}dx$$

당연히 현재 상황으로는 간단하게 해결되는 것이 없으니 어떻게 해결할지 고민해봅시다.

여기서 해결할 수 있는 유일한 방법은 일단 구간이라도 동일하게 만들어 봐야 뭐라도 해결이 되겠죠?

$-x=u$로 치환하여 0부터 $\frac{\pi}{4}$의 적분을 변형시켜봅시다.

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-x}{1-\sin x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1-\sin x}dx$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{u}{1+\sin u}du+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1-\sin x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{x}{1+\sin x}+\frac{x}{1-\sin x}\right)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x}{1-\sin^2 x}dx$$

자 그 다음, 당연하게도 현재 이상황은 또 적분을 하지 못하는 상황이죠? 그런데 하필 분모가 $1-\sin^2 x$임이 처리가 제일 번거롭습니다. 그렇다면 이를 변형시키기 좋은꼴은 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이겠네요? 이를 이용하면

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x}{1-\sin^2 x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x}{\cos^2 x}dx$$

이고, 분모에 $\cos^2 x$가 들어가있는건 또 적분하기 힘든 꼴이므로 다시 한번 더 변형시켜주면 ($\cos x$의 역수는 $\sec x$이고, $\sec x$는 적분에서 훨씬 사용하기 유용한 꼴이므로 이렇게 변형시켜주는게 낫습니다

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x}{1-\sin^2 x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x}{\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\sec^2 x\,dx$$

그러면 이제 부분적분에 의하여

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\sec^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{4}-2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

마지막으로 치환적분 $(u=\cos x)$으로 정적분

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1}{u} du = \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\ln 2}{2}$$

를 계산해주면 답 $\frac{\pi}{2} - \ln 2$이 나오겠죠?