2024년 도쿄대학 이과 (6문제/150분)

1. 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(0,-1,1)$와, $xy$평면 위의 점 $\mathrm{P}$가 다음 조건 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)을 모두 만족한다.

(ⅰ) 점 $\mathrm{P}$는 원점 $\mathrm{O}$가 아니다.

(ⅱ) $\angle \mathrm{AOP} \geq \dfrac{2}{3}\pi$

(ⅲ) $\angle \mathrm{OAP} \leq \dfrac{\pi}{6}$

$\mathrm{P}$가 가질 수 있는 범위를 $xy$평면 위에 그리시오.

2. 함수 $f(x)$가 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

(1) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$를 만족하는 실수 $\alpha$에 대하여 $f'(\tan\alpha)=0$인 $\alpha$의 값을 구하시오.

(2) (1)에서 구한 $\alpha$에 대하여 $\tan\alpha$의 값을 구하시오.

(3) 구간 $0 \leq x \leq 1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오. 필요하면 $0.69<\ln 2<0.7$임을 이용하시오.

3. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}$가 다음 규칙 (ⅰ), (ⅱ)를 따라 1초마다 움직인다.

(ⅰ) 맨 처음에 $\mathrm{P}$는 점 $(2,1)$에 있다.

(ⅱ) 어떤 시각에 $\mathrm{P}$가 점 $(a,b)$에 있을 때, 이로부터 1초 후 $\mathrm{P}$는

- $\dfrac{1}{3}$의 확률로 $(a,b)$와 $x$축에 대하여 대칭인 점
- $\dfrac{1}{3}$의 확률로 $(a,b)$와 $y$축에 대하여 대칭인 점
- $\dfrac{1}{6}$의 확률로 $(a,b)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점
- $\dfrac{1}{6}$의 확률로 $(a,b)$와 직선 $y=-x$에 대하여 대칭인 점

에 있다.

아래 물음에 답하시오. 단, (1)에 대해서는 결론만을 써도 좋다.

(1) $\mathrm{P}$가 위치할 수 있는 점의 좌표를 모두 구하시오.

(2) 양의 정수 $n$에 대하여 맨 처음으로부터 $n$초 후에 $\mathrm{P}$가 점 $(2,1)$에 있을 확률과, 맨 처음으로부터 $n$초 후에 $\mathrm{P}$가 점 $(-2,-1)$에 있을 확률이 같음을 보이시오.

(3) 양의 정수 $n$에 대하여 맨 처음으로부터 $n$초 후에 $\mathrm{P}$가 점 $(2,1)$에 있을 확률을 구하시오.

4. $f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$라 하자. $0<t<4$를 만족하는 실수 $t$에 대하여, 좌표평면 위의 점 $(t,f(t))$를 지나고 이 점에서 포물선 $y=f(x)$와 공통접선을 가지며 $x$축 위에 중심이 있는 원을 $C_t$라 하자.

(1) 원 $C_t$의 중심의 좌표를 $(c(t),0)$, 반지름을 $r(t)$라 하자. $c(t)$와 $\{r(t)\}^2$를 $t$에 대한 식으로 나타내시오.

(2) 실수 $a$는 $0<a<f(3)$을 만족한다. 원 $C_t$가 점 $(3,a)$를 지나는 실수 $t$는 $0<t<4$의 범위에서 몇 개인가?

5. 좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$, $\mathrm{C}(0,0,1)$이 있고, $\mathrm{D}$를 선분 $\mathrm{AC}$의 중점이라 하자. 삼각형 $\mathrm{ABD}$의 둘레와 내부를 $x$축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 구하시오.

6. $2$ 이상의 정수 중에서 $1$과 자기 자신 이외의 양의 약수를 가지지 않는 수를 소수라 한다. 아래 물음에 답하시오.

(1) $f(x)=x^3+10x^2+20x$라 하자. $f(n)$이 소수가 되도록 하는 정수 $n$을 모두 구하시오.

(2) $a$, $b$를 정수인 상수, $g(x)=x^3+ax^2+bx$라 하자. $g(n)$이 소수가 되도록 하는 정수 $n$의 개수는 $3$개 이하임을 보이시오.

2024년 도쿄대학 이과 풀이

1. 원점 O가 아닌 $xy$평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,y,0)$와 점 $\mathrm{A}(0,-1,1)$에 대하여

$$\cos\angle\mathrm{AOP}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\angle\mathrm{AOP}\geq\frac{2}{3}\pi$에서 $\cos\angle\mathrm{AOP}\leq-\frac{1}{2}$이므로 $\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}\leq-\frac{1}{2}$, $2y\geq\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$

$y\geq 0$에서 $4y^2\geq 2(x^2+y^2)$이고, $y^2-x^2\geq 0$으로부터

$$(y+x)(y-x)\geq 0\ \ (y\geq 0)\cdots\cdots①$$

한편, $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(0,1,-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,y+1,-1)$에서

$$\cos\angle\mathrm{OAP}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}=\frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}}$$

$\angle\mathrm{OAP}\leq\frac{\pi}{6}$에서 $\cos\angle\mathrm{OAP}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2(y+2)\geq\sqrt{6}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}$

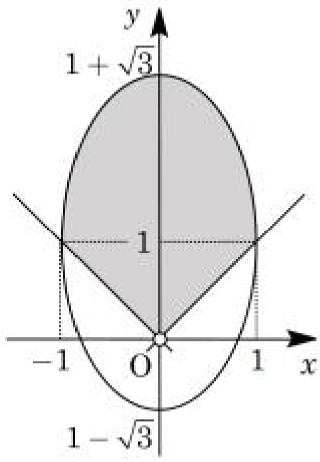
$y+2\geq 0$에서 $4(y+2)^2\geq 6\{x^2+(y+1)^2+1\}$이고,

$$2(y^2+4y+4)\geq 3x^2+3(y^2+2y+1)+3\ \Leftrightarrow\ 3x^2+y^2-2y-2\leq 0$$

에서 $3x^2+(y-1)^2\leq 3$이므로

$$x^2+\frac{(y-1)^2}{3}\leq 1\ \ (y\geq-2)\cdots\cdots②$$

①, ②로부터 P가 가질 수 있는 $xy$평면 위의 범위는 아래 그림의 빗금 친 부분과 같다. 단, 원점 이외의 경계선을 포함한다. ■



2. (1) $f(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}dt \;\; (0 \le x \le 1)$에 대하여, $f(x)=-\int_0^x \frac{t-x}{1+t^2}dt+\int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}dt$

$$f(x)=-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt+x\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}+\int_x^1 \frac{t}{1+t^2}dt-x\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} \cdots\cdots ①$$

$$f'(x)=-\frac{x}{1+x^2}+\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}-\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}+\frac{x}{1+x^2}=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}-\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} \cdots\cdots ②$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$에서 $0<\tan\alpha<1$이고, $f'(\tan\alpha)=\int_0^{\tan\alpha} \frac{dt}{1+t^2}-\int_{\tan\alpha}^1 \frac{dt}{1+t^2}$

이때 $t=\tan\theta \;\; (-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$라 하면, $dt=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$이므로

$$f'(\tan\alpha)=\int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}-\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_0^{\alpha} d\theta-\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\alpha-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\alpha-\frac{\pi}{4}$$

따라서 $f'(\tan\alpha)=0$에서 $2\alpha-\frac{\pi}{4}=0$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{8}$이다. ■

(2) 배각공식에 의하면 $\tan^2\alpha=\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2$

$\tan\frac{\pi}{8}>0$이므로 $\tan\alpha=\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$이다. ■

(3) ②에서 $f''(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}>0$이므로, $f'(x)$는 $0 \le x \le 1$에서 단조증가한다. 또한 (2)로부터 $f'(\sqrt{2}-1)=0$이므로 $0 \le x \le 1$에서 $f(x)$의 증감은 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}-1$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

①로부터,

$$f(0)=\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$f(1)=-\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt+\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=-\frac{1}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

이고, $0.69<\ln 2<0.7$에서 $f(0)-f(1)=\ln 2-\frac{\pi}{4}<0$이므로 $f(0)<f(1)$이다.

따라서 최댓값은 $f(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$이다.

한편 최솟값은 $f(\sqrt{2}-1)$이고, ①로부터

$$f(\sqrt{2}-1)=-\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{t}{1+t^2}dt+(\sqrt{2}-1)\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{dt}{1+t^2}+\int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{t}{1+t^2}dt-(\sqrt{2}-1)\int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

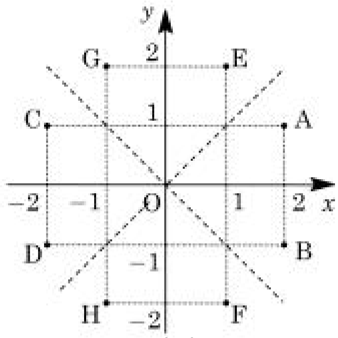
여기서 $\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\ln(4-2\sqrt{2})$, $\int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln(4-2\sqrt{2})$,

$\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{dt}{1+t^2} - \int_{\sqrt{2}-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{8}} d\theta - \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{8} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$이므로, 정리하면

$f(\sqrt{2}-1) = -\frac{1}{2}\ln(4-2\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(4-2\sqrt{2})$이고,

$f(\sqrt{2}-1) = \ln\sqrt{2} - \ln(4-2\sqrt{2}) = \ln\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \ln\frac{1}{2\sqrt{2}-2} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ■

3. (1) 점 $(a,b)$와 $x$축, $y$축, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$에 대하여 대칭인 점은 각각 $(a,-b)$, $(-a,b)$, $(b,a)$, $(-b,-a)$이다. 이로부터 맨 처음 점 $(2,1)$에 있는 점 $\mathrm{P}$가 주어진 규칙에 따라 위치할 수 있는 점의 좌표는 다음의 여덟 개이다. ■




$\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(2,-1)$, $\mathrm{C}(-2,1)$, $\mathrm{D}(-2,-1)$, $\mathrm{E}(1,2)$, $\mathrm{F}(1,-2)$, $\mathrm{G}(-1,2)$, $\mathrm{H}(-1,-2)$

(2) 맨 처음으로부터 $n$초 후에 $\mathrm{P}$가 $\mathrm{A}$, $\mathrm{B}$, $\mathrm{C}$, $\mathrm{D}$, $\mathrm{E}$, $\mathrm{F}$, $\mathrm{G}$, $\mathrm{H}$에 있을 확률을 각각 $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$, $e_n$, $f_n$, $g_n$, $h_n$이라 하면,

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{6}e_n+\frac{1}{6}h_n,\ d_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{6}h_n+\frac{1}{6}e_n$$

이로부터 $a_{n+1}=d_{n+1}$이므로 $n\ge 2$에서 $a_n=d_n$이다. 또한 $a_1=d_1=0$이므로 $a_n=d_n$ $(n\ge 1)$이다. ■

(3) (2)와 같은 방법으로 $a_n=d_n$, $b_n=c_n$, $e_n=h_n$, $f_n=g_n$이므로,

$$a_n+b_n+e_n+f_n=\frac{1}{2}$$

단 $a_1=0$, $b_1=\frac{1}{3}$, $e_1=\frac{1}{6}$, $f_1=0$이다. 이때,

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}e_n\cdots\cdots①,\ b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}f_n\cdots\cdots②,\ e_{n+1}=\frac{2}{3}f_n+\frac{1}{3}a_n\cdots\cdots③,\ f_{n+1}=\frac{2}{3}e_n+\frac{1}{3}b_n\cdots\cdots④$$

①+④에서 $a_{n+1}+f_{n+1}=b_n+e_n=\frac{1}{2}-(a_n+f_n)$이므로, $a_{n+1}+f_{n+1}-\frac{1}{4}=-\left(a_n+f_n-\frac{1}{4}\right)$라 하면

$a_n+f_n-\frac{1}{4}=\left(a_1+f_1-\frac{1}{4}\right)(-1)^{n-1}=-\frac{1}{4}(-1)^{n-1}$로부터 $a_n+f_n=\frac{1}{4}\{1-(-1)^{n-1}\}=\frac{1}{4}\{1+(-1)^n\}\cdots\cdots⑤$

①−④에서 $a_{n+1}-f_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n-e_n)$, ②−③에서 $b_{n+1}-e_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n-f_n)$이므로,

$$a_{n+2}-f_{n+2}=\frac{1}{3}(b_{n+1}-e_{n+1})=\frac{1}{9}(a_n-f_n)\cdots\cdots⑥$$

이때 $a_2=\frac{2}{3}b_1+\frac{1}{3}e_1=\frac{2}{9}+\frac{1}{18}=\frac{5}{18}$, $f_2=\frac{2}{3}e_1+\frac{1}{3}b_1=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$이다.

⑥에서 $(a_{n+2}-f_{n+2})-\frac{1}{3}(a_{n+1}-f_{n+1})=-\frac{1}{3}\left\{(a_{n+1}-f_{n+1})-\frac{1}{3}(a_n-f_n)\right\}$이므로,

$$(a_{n+1}-f_{n+1})-\frac{1}{3}(a_n-f_n)=\left\{(a_2-f_2)-\frac{1}{3}(a_1-f_1)\right\}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

또한 ⑥에서 $(a_{n+2}-f_{n+2})+\frac{1}{3}(a_{n+1}-f_{n+1})=\frac{1}{3}\left\{(a_{n+1}-f_{n+1})+\frac{1}{3}(a_n-f_n)\right\}$이므로,

$$(a_{n+1}-f_{n+1})+\frac{1}{3}(a_n-f_n)=\left\{(a_2-f_2)+\frac{1}{3}(a_1-f_1)\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

따라서 $\frac{2}{3}(a_n-f_n)=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$으로부터

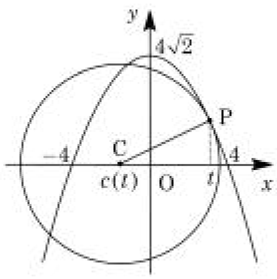
$$a_n-f_n=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\cdots\cdots⑦$$

⑤+⑦에서 $2a_n=\frac{1}{4}\left\{1+(-1)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$이므로, $a_n=\frac{1}{8}\left\{1+(-1)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$이다.

이상으로부터 맨 처음으로부터 $n$초 후에 $\mathrm{P}$가 점 $(2,1)$에 있을 확률 $a_n$은

$$a_n=\frac{1}{8}\left\{1+1+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\ (n\text{이 짝수})$$

$$a_n=\frac{1}{8}\left\{1-1+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=0\ (n\text{이 홀수})$$ ■




4. (1) $f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-2)^2$에 대하여, 포물선 $y=f(x)$와 중심이 $C(c(t),0)$이고 반지름이 $r(t)$인 원 $C_t$가 점 $\mathrm{P}(t,f(t))\,(0<t<4)$에서 공통접선을 가진다.

$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$이므로, 점 P를 지나는 포물선의 접선의 방향벡터 $\vec{u}$를 $\vec{u}=\left(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$로 나타낼 수 있다.

또한 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(t-c(t),-\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)$이고, 점 P에서 포물선과 원 $C_t$가 공통접선을 가지므로 $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$에서

$$\{t-c(t)\}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)=0,\ t-c(t)+\frac{1}{4}t^3-4t=0$$

이로부터 $c(t)=\dfrac{1}{4}t^3-3t$이고,

$$\{r(t)\}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2=\{t-c(t)\}^2+\{f(t)\}^2=\left(-\frac{1}{4}t^3+4t\right)^2+\frac{1}{8}(t^2-16)^2$$

$$=\frac{t^2}{16}(t^2-16)^2+\frac{1}{8}(t^2-16)^2=\frac{1}{16}(t+4)^2(t-4)^2(t^2+2)\ ■$$

(2) (1)로부터 원 $C_t:\left(x-\dfrac{1}{4}t^3+3t\right)^2+y^2=\dfrac{1}{16}(t+4)^2(t-4)^2(t^2+2)$이고, $C_t$가 점 $(3,a)$를 지나므로

$$\left(3-\frac{1}{4}t^3+3t\right)^2+a^2=\frac{1}{16}(t+4)^2(t-4)^2(t^2+2)$$

$$a^2=\frac{1}{16}(t^2-16)^2(t^2+2)-\frac{1}{16}(t^3-12t-12)^2\cdots\cdots①$$

여기서 $g(t)=(t^2-16)^2(t^2+2)-(t^3-12t-12)^2$라 하면

$$\begin{aligned}g'(t)&=4t(t^2-16)(t^2+2)+2t(t^2-16)^2-2(t^3-12t-12)(3t^2-12)\\&=2t(t^2-16)\{2(t^2+2)+(t^2-16)\}-6(t^3-12t-12)(t^2-4)\\&=6t(t^2-16)(t^2-4)-6(t^3-12t-12)(t^2-4)\\&=6(t^2-4)\{(t^3-16t)-(t^3-12t-12)\}=-24(t+2)(t-2)(t-3)\end{aligned}$$

따라서 $0<t<4$에서 $g(t)$의 증감은 다음과 같다.

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(t)$ | $368$ | ↘ | $80$ | ↗ | $98$ | ↘ | $-16$ |

한편 $t$의 방정식 ①은

$$16a^2=g(t)\cdots\cdots②$$

로 나타낼 수 있고, 여기서 $f(3)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(9-16)=\dfrac{7}{4}\sqrt{2}$로부터 실수 $a$는 $0<a<\dfrac{7}{4}\sqrt{2}$의 값을 가지므로

$$0<a^2<\frac{49}{8},\ 0<16a^2<98\cdots\cdots③$$

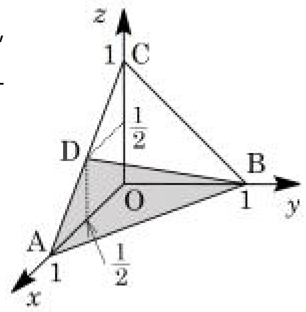
따라서 $0<t<4$의 범위에서 ②를 만족시키는 실수 $t$의 개수는 ③으로부터

$0<16a^2<80\,(0<a<\sqrt{5})$일 때 $t$의 개수는 $1$개

$16a^2=80\,(a=\sqrt{5})$일 때 $t$의 개수는 $2$개

$80<16a^2<98\,(\sqrt{5}<a<\dfrac{7}{4}\sqrt{2})$일 때 $t$의 개수는 $3$개 ■

5. 세 점 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$과 선분 AC의 중점 $D\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$에 대하여, $\triangle ABD$를 $x$축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체를 생각해보자. 먼저, $\triangle ABD$를 포함하는 평면의 방정식은 $x+y+z=1$이고,




(a) 변 AB를 나타내는 방정식은 $0 \le x \le 1$에서 $x+y=1,\ z=0 \cdots\cdots$ ①

(b) 변 AD를 나타내는 방정식은 $\frac{1}{2} \le x \le 1$에서 $x+z=1,\ y=0 \cdots\cdots$ ②

(c) 변 BD를 나타내는 방정식은 $0 \le x \le \frac{1}{2}$에서 $x=z,\ 2x+y=1 \cdots\cdots$ ③

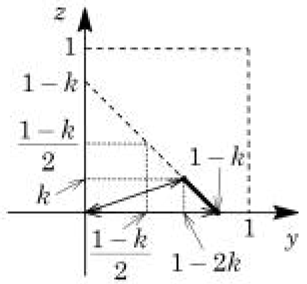
다음으로, $\triangle ABD$를 평면 $x=k\,(0 \le k \le 1)$로 잘랐을 때 그 모양은 선분이 되며, 이를 $x$축의 둘레로 회전시켜 생기는 도너츠 모양의 도형의 넓이를 $S(k)$라 하자.

( i ) $0 \le k \le \frac{1}{2}$일 때

평면 $x=k$와 변 AB와의 교점은 ①로부터 $(k,1-k,0)$, 변 BD와의 교점은 ③으로부터 $(k,1-2k,k)$이고, $\triangle ABD$의 잘린 모양은 이 두 점을 양 끝으로 하는 선분이다.

이때 이 선분을 포함하는 직선($x=k,\ y+z=1-k$)에 점 $(k,0,0)$에서 내린 수선의 발 $\left(k,\frac{1-k}{2},\frac{1-k}{2}\right)$가 선분에 포함되는지에 따라 두 경우로 나눌 수 있다.

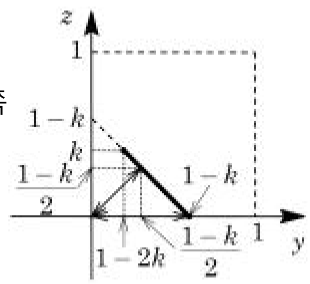
( i - i ) $\frac{1-k}{2} \le 1-2k\left(0 \le k \le \frac{1}{3}\right)$일 때




이 경우 수선의 발은 선분에 포함되지 않으므로 도너츠 모양의 바깥쪽 반지름은 $1-k$, 안쪽 반지름은 $\sqrt{(1-2k)^2+k^2}=\sqrt{5k^2-4k+1}$이고, 그 넓이는

$$\begin{aligned} S(k) &= \pi\left\{(1-k)^2-\left(5k^2-4k+1\right)\right\} \\ &= \pi\left(-4k^2+2k\right) \end{aligned}$$

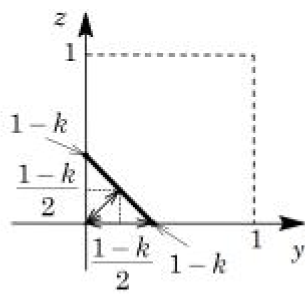
( i -ii) $\frac{1-k}{2} \ge 1-2k\left(\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}\right)$일 때




이 경우 수선의 발은 선분에 포함되므로 도너츠 모양의 바깥쪽 반지름은 $1-k$, 안쪽 반지름은 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-k)$이고, 그 넓이는

$$S(k)=\pi\left\{(1-k)^2-\frac{1}{2}(1-k)^2\right\}=\frac{\pi}{2}(1-k)^2$$

(ii) $\frac{1}{2} \le k \le 1$일 때




평면 $x=k$와 변 AB와의 교점은 ①로부터 $(k,1-k,0)$, 변 AD와의 교점은 ②로부터 $(k,0,1-k)$이고, $\triangle ABD$의 잘린 모양은 이 두 점을 양 끝으로 하는 선분이다. 이 경우 도너츠 모양의 바깥쪽 반지름은 $1-k$, 안쪽 반지름은 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-k)$이고, 그 넓이는

$$S(k)=\pi\left\{(1-k)^2-\frac{1}{2}(1-k)^2\right\}=\frac{\pi}{2}(1-k)^2$$

( i )과 (ii)로부터 $S(k)=\begin{cases} \pi\left(-4k^2+2k\right) & \left(0 \le k \le \frac{1}{3}\right) \\ \frac{\pi}{2}(1-k)^2 & \left(\frac{1}{3} \le k \le 1\right) \end{cases}$이므로, 구하는 회전체의 부피 $V$는

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left(-4k^2+2k\right)dk+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1}(1-k)^2dk=\pi\left[-\frac{4}{3}k^3+k^2\right]_0^{\frac{1}{3}}-\frac{\pi}{6}\left[(1-k)^3\right]_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{5}{81}\pi+\frac{4}{81}\pi=\frac{\pi}{9}\ \blacksquare$$

6. (1) $f(x)=x^3+10x^2+20x=x(x^2+10x+20)$에 대하여, $f(n)=n(n^2+10n+20)$이 소수가 되도록 하는 정수 $n$은, $p$, $q$, $r$, $s$를 소수라 하면

( i ) $(n, n^2+10n+20)=(1, p)$로 $f(n)=p$일 때 $p=1^2+10\times1+20=31$에서 $f(1)=31$은 소수이다.

(ii) $(n, n^2+10n+20)=(-1, -q)$로 $f(n)=q$일 때 $q=-\{(-1)^2+10\times(-1)+20\}=-11$에서 $f(-1)=-11$은 소수가 아니다.

(iii) $(n, n^2+10n+20)=(r, 1)$로 $f(n)=r$일 때 $r^2+10r+20=1$에서 $r^2+10r+19=0$이므로 소수 $r$은 존재하지 않는다.

(iv) $(n, n^2+10n+20)=(-s, -1)$로 $f(n)=s$일 때 $(-s)^2+10(-s)+20=-1$에서 $s^2-10s+21=0$이다.
$(s-3)(s-7)=0$에서 $s=3$, $7$은 모두 소수이고, $f(-3)=3$, $f(-7)=7$이다.
( i )~(iv)로부터 $f(n)$이 소수가 되도록 하는 정수 $n$은 $n=1$, $-3$, $-7$이다. ■

(2) $a$, $b$를 정수인 상수라 할 때, $g(x)=x^3+ax^2+bx=x(x^2+ax+b)$에 대하여 $g(n)=n(n^2+an+b)$가 소수가 되도록 하는 정수 $n$은, $p$, $q$, $r$, $s$를 소수라 하면

( i ) $(n, n^2+an+b)=(1, p)$로 $g(n)=p$일 때 $1^2+a\times1+b=p$에서 $p=a+b+1\cdots\cdots$①

(ii) $(n, n^2+an+b)=(-1, -q)$로 $g(n)=q$일 때 $(-1)^2+a\times(-1)+b=-q$에서 $q=a-b-1\cdots\cdots$②

(iii) $(n, n^2+an+b)=(r, 1)$로 $g(n)=r$일 때 $r^2+ar+b=1$에서 $r^2+ar+b-1=0\cdots\cdots$③

(iv) $(n, n^2+an+b)=(-s, -1)$로 $g(n)=s$일 때 $(-s)^2+a(-s)+b=-1$에서 $s^2-as+b+1=0\cdots\cdots$④

( i )~(iv)로부터 $g(n)$이 소수가 되도록 하는 정수 $n$의 개수는 많아야 $1+1+2+2=6$개다.
먼저 (iii)과 (iv)가 동시에 성립한다고 가정하면 ③$-$④에서

$$r^2-s^2+a(r+s)-2=0,\ (r+s)(r-s+a)=2\cdots\cdots⑤$$

$r+s\geq4$에서 ⑤는 성립하지 않으므로, (iii)과 (iv)는 동시에 성립하지 않는다.
이로부터 $g(n)$이 소수가 되도록 하는 정수 $n$의 개수는 많아야 $4$개고, 이제 ( i ), (ii), (iii)이 동시에 성립하는 경우와 ( i ), (ii), (iv)가 동시에 성립하는 경우를 가정해보자.

(a) ( i ), (ii), (iii)이 동시에 성립하는 경우

$$p=a+b+1\cdots\cdots①,\ q=a-b-1\cdots\cdots②$$

그리고 ③을 만족하는 서로 다른 소수 $r$을 $r=r_1$, $r_2(2\leq r_1<r_2)$라 하면,

$$r_1+r_2=-a\cdots\cdots③',\ r_1r_2=b-1\cdots\cdots③''$$

②, ③′, ③″으로부터

$$q=-r_1-r_2-r_1r_2-1-1=-r_1r_2-r_1-r_2-r<0\cdots\cdots⑥$$

⑥은 성립하지 않으므로 ( i ), (ii), (iii)이 동시에 성립하는 경우는 없고, $g(n)$이 소수가 되도록 하는 정수 $n$의 개수가 $4$개인 경우는 없다.

(b) ( i ), (ii), (iv)가 동시에 성립하는 경우

$$p=a+b+1\cdots\cdots①,\ q=a-b-1\cdots\cdots②$$

그리고 ④를 만족하는 서로 다른 소수 $s$를 $s=s_1$, $s_2(2\leq s_1<s_2)$라 하면,
$s_1+s_2=a\cdots\cdots④'$, $s_1s_2=b+1\cdots\cdots④''$
②, ④′, ④″로부터
$q=s_1+s_2-s_1s_2+1-1=-s_1s_2+s_1+s_2=1-(s_1-1)(s_2-1)<0\cdots\cdots⑦$
⑦은 성립하지 않으므로 ( i ), (ii), (iv)가 동시에 성립하는 경우는 없고, $g(n)$이 소수가 되도록 하는 정수 $n$의 개수가 $4$개인 경우는 없다.
(a), (b)로부터 $g(n)$이 소수가 되도록 하는 정수 $n$의 개수는 $3$개 이하이다. ■

2024년 도쿄대학 문과 (4문제/100분)

1. 좌표평면 위에 포물선 $C: y = ax^2 + bx + c$가 두 점 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(-\cos\theta, \sin\theta)$를 지나고, 점 $\mathrm{P}$와 점 $\mathrm{Q}$에서 각각 원 $x^2 + y^2 = 1$과 공통접선을 가진다. 단, $0^\circ < \theta < 90^\circ$이다.

(1) $a$, $b$, $c$를 $s = \sin\theta$를 이용해 나타내시오.

(2) 포물선 $C$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이 $A$를 $s$를 이용해 나타내시오.

(3) $A \geq \sqrt{3}$임을 보이시오.

2. 아래 물음에 답하시오. 필요하면 $0.3 < \log 2 < 0.31$임을 이용하시오.

(1) $5^n > 10^{19}$인 가장 작은 자연수 $n$을 구하시오.

(2) $5^m + 4^m > 10^{19}$인 가장 작은 자연수 $m$을 구하시오.

3. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(0,1)$이 있다. $x$축 위의 두 점 $\mathrm{P}(p,0)$, $\mathrm{Q}(q,0)$가 다음 조건 (ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족한다.

(ⅰ) $0 < p < 1$이고 $p < q$

(ⅱ) 선분 $\mathrm{AP}$의 중점을 $\mathrm{M}$이라 할 때 $\angle \mathrm{OAP} = \angle \mathrm{PMQ}$

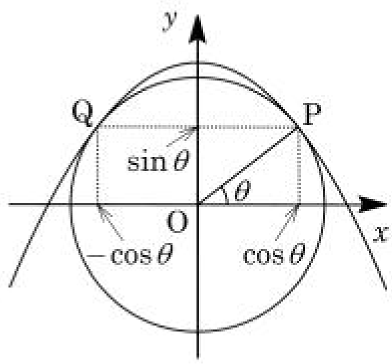
(1) $q$를 $p$를 이용해 나타내시오.

(2) $q = \dfrac{1}{3}$인 $p$의 값을 구하시오.

(3) $\triangle \mathrm{OAP}$의 넓이를 $S$, $\triangle \mathrm{PMQ}$의 넓이를 $T$라 하자. $S > T$인 $p$의 범위를 구하시오.

4. $n$을 5 이상의 홀수라 하자. 평면 위의 점 $\mathrm{O}$를 중심으로 하는 원과 이 원에 내접하는 정$n$각형이 있다. $n$개의 꼭지점에서 서로 다른 네 점을 동시에 고른다. 단, 각 점을 고를 확률은 같다. 고른 네 점을 꼭지점으로 하는 사각형의 내부에 $\mathrm{O}$가 포함될 확률 $p_n$을 구하시오.

1. (1) 포물선 $C: y = ax^2 + bx + c \cdots\cdots$ ①가 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(-\cos\theta, \sin\theta)$ $(0° < \theta < 90°)$를 지나므로




$$a\cos^2\theta + b\cos\theta + c = \sin\theta \cdots\cdots ②$$

$$a\cos^2\theta - b\cos\theta + c = \sin\theta \cdots\cdots ③$$

②, ③에서 $b = 0 \cdots\cdots$ ④, $c = \sin\theta - a\cos^2\theta \cdots\cdots$ ⑤

한편 ①에서 $C: y = ax^2 + c$이므로 $y' = 2ax$

이로부터, 점 $\mathrm{P}$에서 $C$의 접선의 방향벡터 $\vec{u}$는 $\vec{u} = (1, 2a\cos\theta)$로 나타낼 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta, \sin\theta)$이고, 점 $\mathrm{P}$에서 $C$와 원 $x^2 + y^2 = 1$이 공통접선을 가지므로 $\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$이다.

$$\cos\theta + 2a\sin\theta\cos\theta = 0,\ 1 + 2a\sin\theta = 0$$

$s = \sin\theta$라 하면 $a = -\dfrac{1}{2\sin\theta} = -\dfrac{1}{2s} \cdots\cdots$ ⑥

또한 $C$와 원 $x^2 + y^2 = 1$은 모두 $y$축에 대하여 대칭이므로 점 $\mathrm{P}$에서 공통접선을 가지면 점 $\mathrm{Q}$에서도 공통접선을 가진다. 따라서 ④, ⑤, ⑥으로부터 $a = -\dfrac{1}{2s}$, $b = 0$, $c = s - \left(-\dfrac{1}{2s}\right)(1 - s^2) = \dfrac{s}{2} + \dfrac{1}{2s}$ ■

(2) (1)로부터 $C: y = -\dfrac{1}{2s}x^2 + \dfrac{s}{2} + \dfrac{1}{2s} = -\dfrac{1}{2s}(x^2 - s^2 - 1)$이고, $C$와 $x$축과의 교점은 $x = \pm\sqrt{s^2 + 1}$이다. 따라서 $C$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이 $A$는

$$A = -\frac{1}{2s}\int_{-\sqrt{s^2+1}}^{\sqrt{s^2+1}} \left(x + \sqrt{s^2+1}\right)\left(x - \sqrt{s^2+1}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2s}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2\sqrt{s^2+1}\right)^3 = \frac{2}{3s}\left(\sqrt{s^2+1}\right)^3 \ ■$$

(3) $A^2 - 3 = \dfrac{4}{9s^2}(s^2 + 1)^3 - 3 = \dfrac{4(s^6 + 3s^4 + 3s^2 + 1) - 27s^2}{9s^2} = \dfrac{4s^6 + 12s^4 - 15s^2 + 4}{9s^2}$

여기서 $t = s^2$이라 하면, $0 < s < 1$에서 $0 < t < 1$이다. $f(t) = 4t^3 + 12t^2 - 15t + 4$라 하면

$$f'(t) = 12t^2 + 24t - 15 = 3(2t - 1)(2t + 5)$$

$0 < t < 1$에서 $f(t)$의 증감은 다음과 같으므로, $f(t) \geq 0$이다.

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $1$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ | $5$ |

따라서 $A^2 - 3 = \dfrac{f(t)}{9t} \geq 0$이므로 $A \geq \sqrt{3}$이다. 이때 등호는 $t = \dfrac{1}{2}$, 즉 $s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$일 때 성립한다. ■

2. (1) $5^n > 10^{19} \cdots\cdots$ ①에 대하여 $\log 5^n > \log 10^{19}$에서 $n\log\frac{10}{2} > 19$이므로

$$n(1-\log 2) > 19,\ n > \frac{19}{1-\log 2} \cdots\cdots ②$$

여기서 $0.3 < \log 2 < 0.31$에서 $0.69 < 1-\log 2 < 0.7$이므로

$$27.1 < \frac{19}{1-\log 2} < 27.6$$

따라서 ② 즉 ①을 만족하는 가장 작은 자연수 $n$은 $n=28$이다. ■

(2) (1)로부터 $5^{28} > 10^{19}$이므로 $5^m + 4^m > 10^{19} \cdots\cdots$ ③은 $m=28$일 때 성립한다.

여기서 $m=27$일 때 ③을 만족하는지, 즉 $5^{27}+4^{27} > 10^{19}$가 성립하는지를 알아보자.

먼저, $5^{27}+4^{27} = 5^{27}\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^{27}\right\}$에서 $\left(\frac{4}{5}\right)^{27} < \left(\frac{4}{5}\right)^{7} < \frac{1}{4}$임에 주목하면

$$5^{27}\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^{27}\right\} < 5^{27}\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{5^{28}}{4},\ \log 5^{27}\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^{27}\right\} < \log\frac{5^{28}}{4}$$

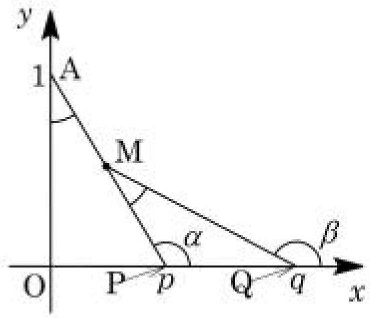
그러면 $\log\frac{5^{28}}{4} = 28(1-\log 2) - 2\log 2 = 28 - 30\log 2$에서

$$18.7 < 28 - 30\log 2 < 19$$

따라서 $\log 5^{27}\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^{27}\right\} < 19$, 즉 $5^{27}+4^{27} < 10^{19}$이므로 $m=27$일 때 ③은 성립하지 않는다.

이상으로부터 수열 $\{5^m + 4^m\}$은 단조증가하므로 ③을 만족하는 가장 작은 자연수 $m$은 $m=28$이다. ■

3. (1) $0<p<1$, $p<q$일 때, $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{P}(p,0)$, $\mathrm{Q}(q,0)$에 대하여 선분 AP의 중점 M은 $\mathrm{M}\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.




이때 $\tan\angle\mathrm{OAP}=\frac{p}{1}=p$이고, 직선 AP, MQ와 $x$축의 양의 방향이 이루는 각을 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$$\tan\alpha=-\frac{1}{p},\ \tan\beta=\frac{-\frac{1}{2}}{q-\frac{p}{2}}=-\frac{1}{2q-p}$$

그러면 $\angle\mathrm{PMQ}=\beta-\alpha$이므로

$$\tan\angle\mathrm{PMQ}=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{-\frac{1}{2q-p}+\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{2q-p}\times\frac{1}{p}}=\frac{2q-2p}{p(2q-p)+1}$$

$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{PMQ}$에서 $p=\frac{2q-2p}{p(2q-p)+1}$이고, $0<p<1$이므로

$$p^2(2q-p)+p=2q-2p,\ (2p^2-2)q=p^3-3p,\ q=\frac{p^3-3p}{2p^2-2}\cdots\cdots(*)\ \blacksquare$$

(2) $q=\frac{1}{3}$일 때, $(*)$에서 $\frac{1}{3}=\frac{p^3-3p}{2p^2-2}$이고, $2p^2-2=3p^3-9p$에서

$$3p^3-2p^2-9p+2=0,\ (p-2)(3p^2+4p-1)=0$$

$0<p<\frac{1}{3}$이므로 $p=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$이다. $\blacksquare$

(3) $\triangle\mathrm{OAP}$의 넓이를 $S$, $\triangle\mathrm{PMQ}$의 넓이를 $T$라 하면

$$S=\frac{1}{2}p\times1=\frac{p}{2},\ T=\frac{1}{2}(q-p)\times\frac{1}{2}=\frac{q-p}{4}$$

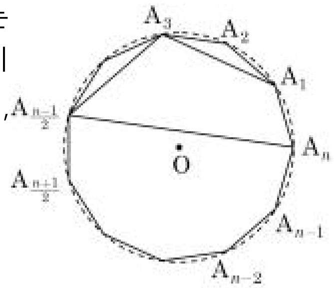
$S>T$일 때, $\frac{p}{2}>\frac{q-p}{4}$에서 $2p>q-p$이므로 $3p>q$

$(*)$에서 $3p>\frac{p^3-3p}{2p^2-2}$이고, $2p^2-2<0$이므로 $3p(2p^2-2)<p^3-3p$

$$5p^3-3p<0,\ p(\sqrt{5}p+\sqrt{3})(\sqrt{5}p-\sqrt{3})<0$$

$0<p<1$로부터 $0<p<\sqrt{\frac{3}{5}}$ 즉 $0<p<\frac{\sqrt{15}}{3}$이다. $\blacksquare$

4. $5$ 이상의 홀수 $n$에 대하여 점 O를 중심으로 하는 원을 잡고, 이 원에 내접하는 정$n$각형을 $\mathrm{A_1A_2 \cdots A_n}$라 하자. 여기서 $n$개의 꼭지점에서 서로 다른 네 점을 동시에 고르고, 고른 네 점을 꼭지점으로 하는 사각형의 내부에 O가 포함될 확률을 $p_n$, 포함되지 않을 확률을 $q_n$이라 하자.




먼저 $n$개의 꼭지점에서 서로 다른 네 점을 고르는 경우의 수는

$$_{n}\mathrm{C}_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

여기에 $n$이 $7$ 이상의 홀수일 때 한 꼭지점이 $A_n$인 사각형 내부에 O가 포함되지 않을 때, 나머지 꼭지점을 각각 $A_i$, $A_j$, $A_k$(단, $1 \le i < j < k \le \dfrac{n-1}{2}$)라 하자.

이때 $(i,j)$의 순서쌍의 개수 $N$은 $k=3$, $k=4$, $\cdots$, $k=\dfrac{n-1}{2}$일 경우를 생각해보면

$$N = {}_2\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{\frac{n-3}{2}}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}\times 2\times 1 + \frac{1}{2}\times 3\times 2 + \cdots + \frac{1}{2}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-5}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}} k(k+1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{n-5}{2}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-1}{2} = \frac{1}{48}(n-5)(n-3)(n-1)$$

이로부터 가장 긴 변이 $A_nA_k$이고 내부에 O가 포함되지 않는 사각형은 $N$개다. 또한 이 사각형들을 O의 둘레로 회전시켜 생각해볼 때, 내부에 O가 포함되지 않는 사각형은 모두 $nN$개다.

$$nN = \frac{1}{48}n(n-5)(n-3)(n-1)$$

따라서 사각형의 내부에 O가 포함되지 않을 확률 $q_n$은

$$q_n = \frac{nN}{_{n}\mathrm{C}_4} = \frac{24}{48}\times\frac{n(n-5)(n-3)(n-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{n-5}{2(n-2)}$$

한편 $n=5$일 때 $q_n = 0$이므로 이 경우에도 위 식은 성립한다.

$n$은 홀수이므로 점 O가 사각형의 변 위에 위치하는 경우는 없다. 따라서 $p_n + q_n = 1$이므로

$$p_n = 1 - q_n = 1 - \frac{n-5}{2(n-2)} = \frac{n+1}{2(n-2)} \quad \blacksquare$$