6번 문항 (2017 고려대학교 모의논술)

$p(x)$ 는 다음 두 가지 성질을 만족하는 가장 낮은 차수의 다항함수이다.

· $p(x)$ 의 최고차항의 계수는 1 이다. · $\lvert\sin(\pi x)\rvert p(x)$ 는 구간 $(-n, 0)$ 에서 미분 가능하다.

(단, n 은 2 이상의 자연수이다.)

제시문 에서 $a_n = \displaystyle\int_0^1 \ln p(x)dx$ 라 할 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_n - \sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)$ 를 구하시오.

자 일단, $p(x)$의 최고차항의 계수는 1이고, 함수 $|\sin(\pi x)|p(x)$는 2이상의 자연수 n에 대하여 구간 $(-n,0)$에서 미분 가능한 최소다항식이므로

$$p(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)$$

이다.

라고 언급하고 있는데, 사실 수능에선 이런 내용을 바로 꺼집어 내어도 문제가 되진 않는다. 다만, 논술이고 엄밀성을 좀 더 추구한다면 이런과정을 하나 보이자.

(해설을 보기 전에 미리 한번 해보면 좋다)

어떤 성질에 대한 증명은 처음부터 일반화 시키는 것이 편하다.

먼저 $|\sin x|$가 점 $(n,0)$에 대하여 미분불가능함을 보이자. (단, n은 정수)

n이 홀수일 때(실제로는 $n=2k-1$, k는 정수 라고 적어주어야 한다)

$$|\sin x|=\begin{cases}\sin x & (n\pi \le x < (n+1)\pi)\\ -\sin x & ((n-1)\pi < x < n\pi)\end{cases}$$

이고 미분계수의 정의 ($\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(x)}{h}=f'(a)$가 성립하려면 우미분계수와 좌미분계수가 동일해야 하므로)에 의하여

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\sin(n+h)-\sin n}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sin n\cos h+\cos n\sin h-\sin n}{h}=\cos n$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{-\sin(n+h)-(-\sin n)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-\sin n\cos h-\cos n\sin h+\sin n}{h}=-\cos n$$

우미분계수와 좌미분계수가 동일하지 않으므로 미분가능하지 않다.

이때 $f(x)=|\sin x|(x-n)$이라 하고 동일하게 정의를 사용하여 보여준다면, 미분가능함을 증명할 수 있다. 따라서 $p(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)$이다.

여기까지는 괜찮은데 이 이후로 걸리는 점이 하나 존재한다.

$a_n=\int_0^1 \ln p(x)dx$ 인데 적분을 진짜로 해야하나? 그리고 그걸 다시

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_n-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)$안에 집어넣는다고 생각하니, 뭔가 정리가 될것같으면서도 뭔가 정리가 잘 안될것같기도 한다.

로그의 장점은 합을 곱으로 묶을 수 있다는 점이므로 일단 한번 해보자.

$$a_n=\int_0^1 \ln p(x)dx=\int_0^1 \ln(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)dx$$

이고 당연히 이 안에서는 적분을 못하므로 하나씩 쪼개서 적분하고 다시 합쳐야 할 것이다

$$=\int_0^1 \ln(x+1)dx+\int_0^1 \ln(x+2)dx+\cdots+\int_0^1 \ln(x+n-1)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 \ln(x+k)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\left[(x+k)\ln(x+k)-(x+k)\right]_0^1$$

(이 상황에선 $\sum$과 $\int$가 교환이 가능하며 이정도 난이도의 문제에서는 $\int \ln x dx = x\ln x - x$임은 굳이 보이지 않아도 된다. 물론 보이면 더 좋고!)

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\{(1+k)\ln(1+k)-k\ln k-1\}=n\ln n-(n-1)$$

(이 꼴이 나왔더라도 당황하지 말고 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$꼴의 텔레스코핑을 생각하자)

정리가 되었으므로 넣어보면

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_n-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{n\ln n-(n-1)-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right\}$이다

그리고 이꼴은 딱히 샌드위치 정리를 쓰지 않더라도 $\frac{k}{n}=x$, $\frac{1}{n}=dx$로 바꾸기 간단한 꼴이므로 최대한 이꼴을 변형시켜보자.

일단

$\lim_{n\to\infty}\frac{-(n-1)}{n}=-1$이므로 나머지 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{n\ln n-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right\}$

만 고려해보면, n을 약분하고 $\ln n$만 밖으로 꺼내면 발산이므로 반대로 $\sum$안에 집어넣어서 뭔가 얻어보아야 할 것 같다. 그리고 $\ln n$은 $\sum$ 안에 들어가면 k가 존재하지 않아 상수취급이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{n\ln n-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\ln n-\ln(n+k)\}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$$=-\int_0^1\ln(1+x)dx=-\left[(1+x)\ln(1+x)-x\right]_0^1=-2\ln2+1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_n-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)=-2\ln 2$ 이다.