쌍곡선의 정의에 의하여

(쌍곡선의 주축의 길이)$=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=12-6=6$

즉, $2a=6$ 풀면 $a=3$

직각삼각형 $\mathrm{PFF'}$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^{\,2}+\overline{\mathrm{PF'}}^{\,2}}=6\sqrt{5}$ 즉, $\overline{\mathrm{OF}}=3\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{3^2+b^2}=3\sqrt{5}$ 에서 $b=6$

$\therefore\ ab=18$

답 ②

M. 이차곡선과 접선

이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)의 접선의 방정식을 구하는 방법을 정리하면 다음과 같다.

<table>
<tr><td>❶ 곡선 위의 점에서의 접선</td><td>❷ 기울기가 주어진 접선</td><td>❸ 곡선 밖의 점에서의 접선</td></tr>
<tr><td colspan="3">이차곡선과 접선의 방정식을 연립하고,
이차방정식의 판별식을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.</td></tr>
</table>

방법 ❶: 이차곡선 위의 점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은 암기해야 한다.

	포물선	타원	쌍곡선
이차 곡선	$y^2=4px$ $(x^2=4py)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$
접선	y_0y $=2p(x+x_0)$ $(x_0x$ $=2p(y+y_0))$	$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}$ $=1$	$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}$ $=\pm1$

방법 ❷: 기울기가 주어진 접선의 공식은 다음과 같다.

기울기가 m이고, 포물선 $y^2=4px$에 접하는 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m}$$

기울기가 m이고, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

기울기가 m이고, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm1$에 접하는 접선의 방정식은

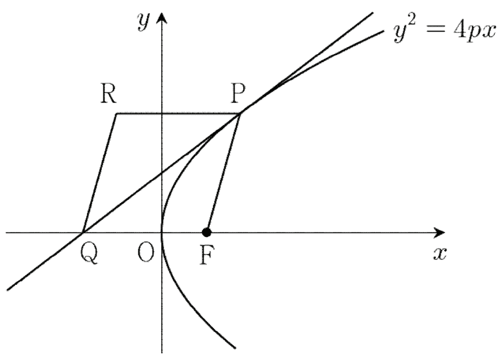
$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

위의 세 공식은 반드시 암기해야 한다. (유도할 수 있다면 더욱 좋다.)

방법 ❸: 접점을 $(x_0,\ y_0)$으로 두고 ❶로 접근한다.

예제 1

아래 그림처럼 초점이 F인 포물선 $y^2=4px(p>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라고 하자. 사각형 PRQF가 평행사변형이 되도록 점 R을 잡을 때, 사각형 PRQF가 마름모임을 증명하시오. (단, P는 제1사분면 위의 점이다.)



증명

문제에서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이다.

점 P에서의 접선의 방정식은

$y_0y=2p(x+x_0)$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하여 정리하면 $x=-x_0$

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(-x_0,\ 0)$이다.

이제 점 R의 좌표를 $\mathrm{R}(s,\ t)$로 두자.

사각형 PRQF가 평행사변형이므로

선분 PQ의 중점과 선분 FR의 중점은 일치한다.

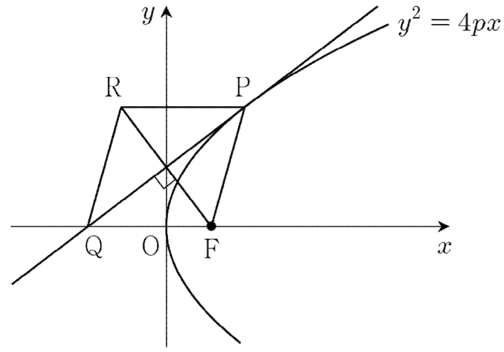
내분점의 공식에 의하여

선분 PQ의 중점은 $\left(0,\ \dfrac{y_0}{2}\right)$,

선분 FR의 중점은 $\left(\dfrac{s+p}{2},\ \dfrac{t}{2}\right)$이므로

$\dfrac{s+p}{2}=0,\ \dfrac{t}{2}=\dfrac{y_0}{2}$ 풀면 $s=-p,\ t=y_0$

점 R의 좌표는 $\mathrm{R}(-p,\ y_0)$이다.



(직선 PQ의 기울기)$=\dfrac{y_0}{2x_0}$ …㉠

(직선 FR의 기울기)$=\dfrac{-y_0}{2p}$ …㉡

㉠×㉡$=-\dfrac{y_0^2}{4px_0}=-1(\because y_0^2=4px_0)$

평행사변형 PRQF의 두 대각선이 서로 직교하므로,

평행사변형 PRQF는 마름모이다.

답 풀이참조

참고

중학교 수학 교과서에 나와 있는 마름모에 대한 내용은 다음과 같다.

(1) 마름모는 네 변의 길이가 모두 같은 사각형이므로 평행사변형이다. 따라서 마름모는 평행사변형의 성질을 모두 만족시킨다.

(2) 〈마름모의 성질〉

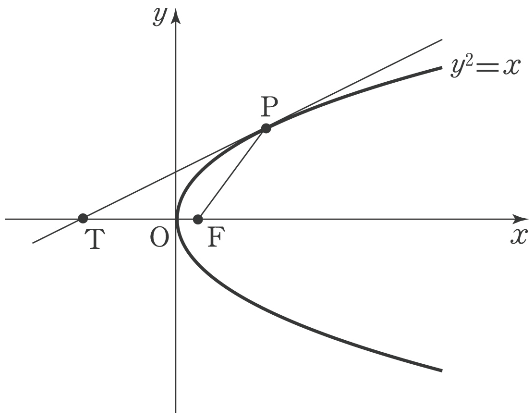
마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

M. 포물선(접선)

M085

○○
(2005(9)−가형15)

다음은 포물선 $y^2=x$ 위의 꼭짓점이 아닌 임의의 점 P에서의 접선과 x축과의 교점을 T, 포물선의 초점을 F라고 할 때, $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FT}}$ 임을 증명한 것이다.



〈증명〉
점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면, 접선의 방정식은
$\boxed{\text{(가)}}$
이 식에 $y=0$을 대입하면 교점 T의 좌표는 $(-x_1, 0)$이다.
초점 F의 좌표는 $\boxed{\text{(나)}}$이므로 $\overline{\mathrm{FT}}=\boxed{\text{(다)}}$
한편 $\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2+y_1^2}=\boxed{\text{(다)}}$
따라서 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FT}}$이다.

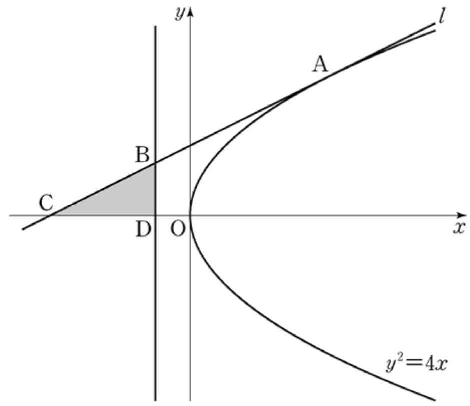
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1)$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$x_1+\frac{1}{2}$
②	$y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1)$	$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$	$x_1+\frac{1}{4}$
③	$y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1)$	$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$	$x_1+\frac{1}{2}$
④	$y_1y=x+x_1$	$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$	$x_1+\frac{1}{4}$
⑤	$y_1y=x+x_1$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$x_1+\frac{1}{2}$

M086

○○
(2016−B형9)

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(4, 4)$에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l과 포물선의 준선이 만나는 점을 B, 직선 l과 x축이 만나는 점을 C, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 넓이는? [3점]



① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

M087

○○
(2010−가형4)

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라고 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=4\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은? [3점]

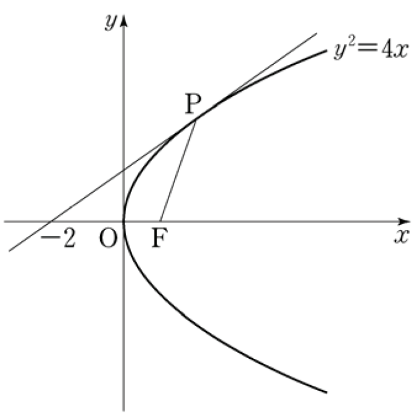
① 21 ② 32 ③ 45
④ 60 ⑤ 77

M088
○○ (2012-가형26)

포물선 $y^2=nx$의 초점과 포물선 위의 점 $(n,\ n)$에서의 접선 사이의 거리를 d라 하자. $d^2\ge 40$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [4점]

M089
○○ (2016(9)-B형12)

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2이다. $\cos(\angle\mathrm{PFO})$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① $-\dfrac{5}{12}$　② $-\dfrac{1}{3}$　③ $-\dfrac{1}{4}$　④ $-\dfrac{1}{6}$　⑤ $-\dfrac{1}{12}$

M090
●●● (2014(6)-B형29)

좌표평면에서 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 A에 대하여 점 B는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 A가 원점이면 점 B도 원점이다.
> (나) 점 A가 원점이 아니면 점 B는 점 A, 원점 그리고 점 A에서의 접선이 y축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A가 포물선 $y^2=16x$ 위를 움직일 때 점 B가 나타내는 곡선을 C라 하자. 점 $(3,\ 0)$을 지나는 직선이 곡선 C와 두 점 P, Q에서 만나고 $\overline{\mathrm{PQ}}=20$일 때, 두 점 P, Q의 x좌표의 값의 합을 구하시오. [4점]

M091
●●● (2019(6)-가형19)

0이 아닌 실수 p에 대하여 좌표평면 위의 두 포물선 $x^2=2y$와 $\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=4px$에 동시에 접하는 직선의 개수를 $f(p)$라 하자. $\lim\limits_{p\to k+} f(p)>f(k)$를 만족시키는 실수 k의 값은? [4점]

① $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　② $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　③ $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$　④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BH}} = \vec{a} \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = 0$

정리하면

$k = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

직각삼각형 BOH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OB}}^2 - \overline{\mathrm{OH}}^2} = \sqrt{|\vec{b}|^2 - \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}\right)^2}$$

구하는 넓이를 S라고 하면

$$\therefore\ S = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\,\overline{\mathrm{BH}} = \frac{1}{2}|\vec{a}|\sqrt{|\vec{b}|^2 - \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

위의 공식은 θ가 직각, 둔각인 경우에도 성립한다.

(2)

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

$= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2$,

$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_1b_1 + a_2b_2)^2$

$= a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2$

위의 두 식을 변변히 빼면

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$= a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2$

$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

이므로

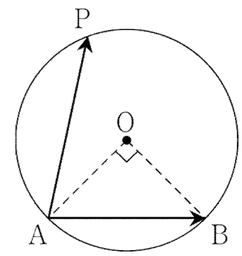
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

답 풀이참조

N. 벡터의 내적: 최대최소(상수변수)

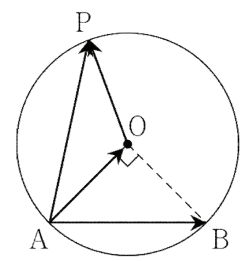
예제 1

반지름의 길이가 1인 원 O 위의 두 정점 A, B에 대하여 $\angle \mathrm{AOB} = 90^\circ$ 이다.



원 O 위의 동점 P에 대하여 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이1



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

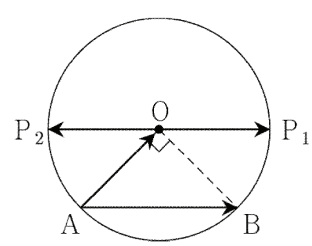
벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$= \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}}}_{\text{일정한 값}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}}_{\text{변하는 값}}$

$= 1 + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}}_{\text{변하는 값}}$ $\cdots(*)$

아래 그림처럼 점 O를 지나고 직선 AB에 평행한 직선이 원 O와 만나는 두 점을 각각 P_1, P_2라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

$-\sqrt{2} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} \le \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \le \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \sqrt{2}$

이를 (*)에 대입하면

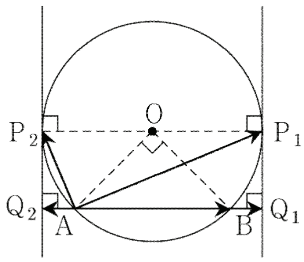
$1 - \sqrt{2} \le \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} \le 1 + \sqrt{2}$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때 성립한다.)

답 최댓값: $1+\sqrt{2}$, 최솟값 $1-\sqrt{2}$

풀이2

아래 그림처럼 원 O에 접하면서 직선 AB에 수직인 두 직선을 그린다. 이때, 두 접점을 각각 P_1, P_2, 두 접선이 직선 AB와 만나는 두 점을 각각 Q_1, Q_2라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_2}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}$$

그런데

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ_1}=\sqrt{2}\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ_2}=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=1-\sqrt{2}$$

이므로

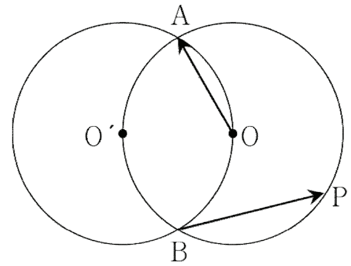
$$1-\sqrt{2}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\le1+\sqrt{2}$$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때 성립한다.)

답 최댓값: $1+\sqrt{2}$, 최솟값 $1-\sqrt{2}$

예제 2

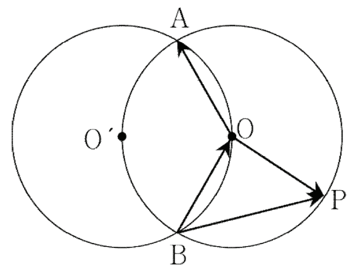
아래 그림처럼 반지름의 길이가 1로 같은 두 원 O, O'이 서로의 중심을 지날 때 생기는 두 교점을 각각 A, B라고 하자.



점 P가 두 원 O, O'의 둘레 위를 움직일 때, 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이1

(1) 점 P가 원 O 위에 있을 경우



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}$$

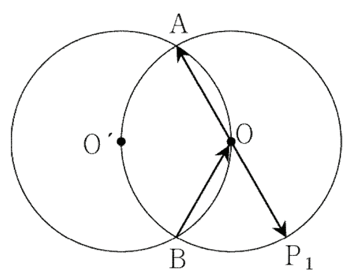
벡터의 내적의 성질에 의하여

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP})$$

$$=\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BO}}_{\text{일정한 값}}+\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}_{\text{변하는 값}}$$

$$=\frac{1}{2}+\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}_{\text{변하는 값}}\qquad\cdots(*1)$$

아래 그림처럼 직선 OA가 원 O와 만나는 두 점 중에서 A가 아닌 점을 P_1라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

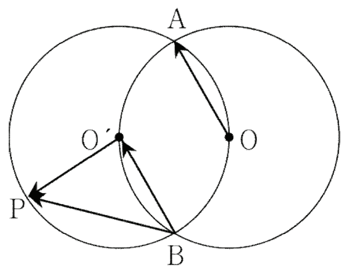
$$-1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=1$$

이를 (*1)에 대입하면

$-\dfrac{1}{2} \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} \leq \dfrac{3}{2}$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 A 위에 올 때 성립한다.)

(2) 점 P가 원 $\mathcal{O}'$ 위에 있을 경우



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BO'}+\overrightarrow{O'P}$

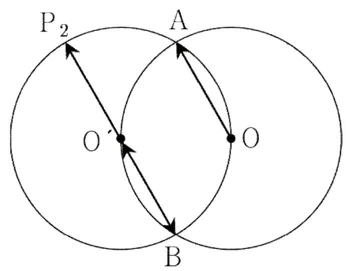
벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{BO'}+\overrightarrow{O'P})$

$=\underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO'}}_{\text{일정한 값}}+\underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O'P}}_{\text{변하는 값}}$

$=1+\underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O'P}}_{\text{변하는 값}}$ $\cdots$(*2)

아래 그림처럼 직선 O′B가 원 $\mathcal{O}'$과 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P_2라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

$-1=\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O'B} \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O'P} \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O'P_2}=1$

이를 (*2)에 대입하면

$0 \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} \leq 2$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 B 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때 성립한다.)

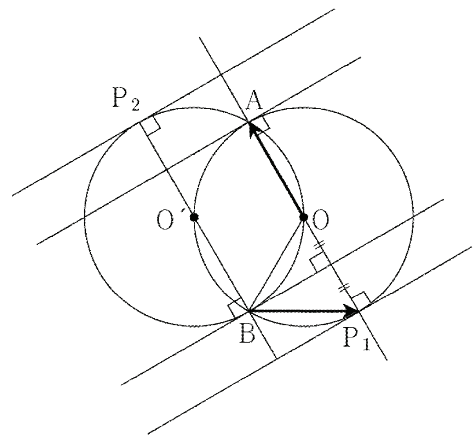
(1), (2)에 의하여

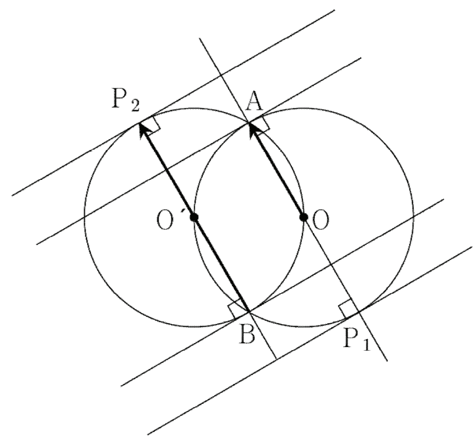
$\therefore\ -\dfrac{1}{2} \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} \leq 2$

답 최댓값: 2, 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$

풀이2

아래 그림처럼 원 O에 접하면서 직선 OA에 수직인 두 직선을 그린다. 이때, 점 A는 접점이 되고, 나머지 한 접점을 P_1이라고 하자. 그리고 원 $\mathcal{O}'$에 접하면서 직선 OA에 수직인 두 직선을 그린다. 이때, 점 B는 접점이 되고, 나머지 한 접점을 P_2라고 하자.





벡터의 내적의 정의에 의하여

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP_1} \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP_2}$

그런데

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP_2}=1\times2=2$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP_1}=-1\times1\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

이므로

$-\dfrac{1}{2} \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} \leq 2$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때 성립한다.)

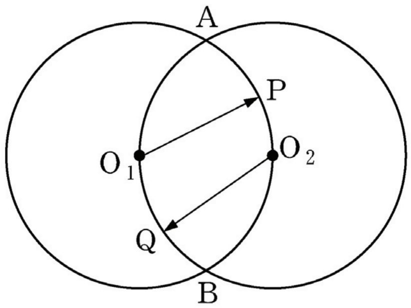
답 최댓값: 2, 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$

N. 벡터의 내적(자취+최대최소+원)

N043

○○○
(2009(9)-가형7)

평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호 $\mathrm{AO_2B}$ 위의 점 P와 호 $\mathrm{AO_1B}$ 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]



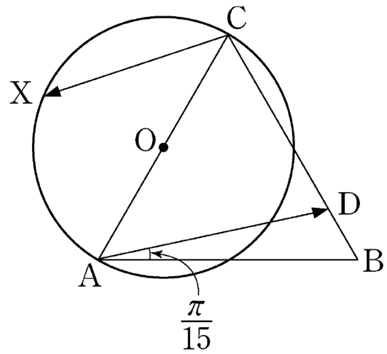
① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ 0

④ $\frac{1}{4}$　　⑤ 1

N044

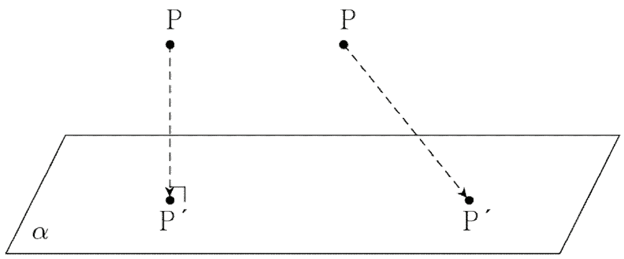
●●●
(2011-가형22)

그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle \mathrm{DAB}=\frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle \mathrm{ACP}=\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



P. 공간도형: 정사영

• 정사영⊂사영

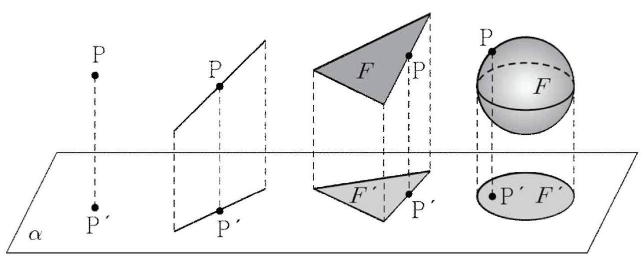


정사영 (⊂그림자) 사영 (=그림자)

태양광선이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 점 P의 그림자 P′을 정사영이라고 한다.
태양광선이 평면 α에 수직이 아닌 방향으로 비출 때, 점 P의 그림자 P′을 사영(정사영X)이라고 한다.

• 정사영은 수선의 발이다. (또는 수선의 발들의 집합이다.)

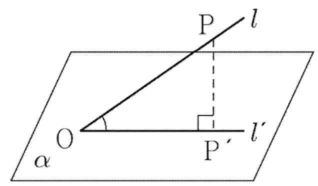
평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P′이라고 할 때, 점 P′을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.
또 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.



일반적으로
점의 정사영은 점,
선분(직선)의 정사영은 선분(직선) 또는 점,
삼각형(다각형)의 정사영은 삼각형(다각형) 또는 선분,
구의 정사영은 원이다.

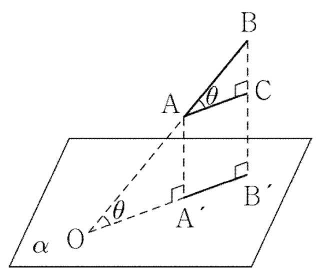
P. 공간도형: 정사영의 길이와 넓이

• 두 직선이 이루는 각



직선 l과 평면 α가 한 점 O에서 만나고 수직이 아닐 때, 직선 l 위의 점 O가 아닌 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P′이라고 하자. 이때, $\angle$POP′을 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라고 한다. 다시 말하면 위의 그림에서
(두 직선 l, l'이 이루는 각)=(직선 l과 평면 α가 이루는 각)

• 정사영의 길이



직각삼각형 ABC에서 삼각비의 정의에 의하여

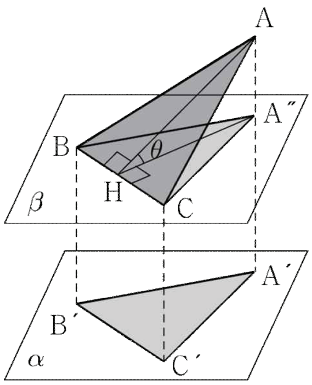
$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\cos\theta$이므로 $\overline{AC}=\overline{AB}\cos\theta$ 즉,

$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$

〈정사영의 길이〉
선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라고 하면
$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$ (←이때, θ는 '직선과 평면이 이루는 각' 의 크기이다.)

• 정사영의 넓이

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영을 삼각형 $\mathrm{A'B'C'}$이라 하고, 평면 α와 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 이때, 변 BC가 평면 α에 평행하다고 하자.



변 BC를 포함하고 평면 α에 평행한 평면을 β, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 이때, 직선 $\mathrm{AA'}$와 평면 β의 교점을 $\mathrm{A''}$라 하면 삼수선의 정리❷에 의하여

$\overline{\mathrm{A''H}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$

이다. 이면각의 정의에 의하여

$\angle \mathrm{AHA''} = \theta$

이므로 두 삼각형 ABC, $\mathrm{A'B'C'}$의 넓이를 각각 S, S'라고 하면 다음이 성립한다.

$$S' = \triangle \mathrm{A''BC} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{A''H}}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{AH}}\cos\theta = S\cos\theta$$

일반적으로 변 BC와 평면 α가 평행하지 않더라도 위의 등식은 성립한다.

〈정사영의 넓이〉

평면 β 위에 있는 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

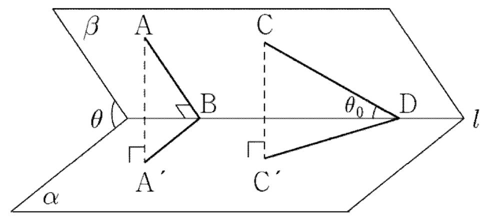
$S' = S\cos\theta$ (←이때, θ는 '두 평면이 이루는 이면각'의 크기이다.)

[주의]

정사영의 길이에서의 θ와 정사영의 넓이에서의 θ는 다르다. 전자의 θ는 '직선과 평면이 이루는 각'의 크기이고, 후자의 θ는 '두 평면이 이루는 이면각'의 크기이다. 이 둘을 반드시 구별할 수 있어야 한다.

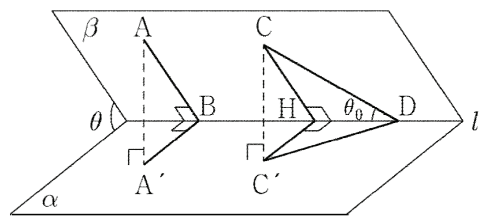
예제 1

아래 그림처럼 직선 l을 교선으로 갖는 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$이다. 직선 l 위의 점 B를 지나고 l에 수직인 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 $\mathrm{A'B}$, 직선 l 위의 점 D를 지나고 l과 이루는 각의 크기가 $\theta_0\left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$인 선분 CD의 평면 α 위로의 정사영을 $\mathrm{C'D}$라고 할 때, 두 선분 $\mathrm{A'B}$, $\mathrm{C'D}$의 길이를 구하시오. (단, 두 점 A, C는 평면 β 위의 점이다.)



풀이

점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



• 선분 $\mathrm{A'B}$의 길이를 구하자.

삼수선의 정리❷에 의하여 $\overline{\mathrm{A'B}} \perp l$이므로

이면각의 정의에 의하여 $\angle \mathrm{ABA'} = \theta$이다.

정사영의 길이에 대한 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{A'B}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$

이때, θ는 '직선 AB와 평면 α가 이루는 각'의 크기인 동시에 '두 평면 α, β가 이루는 이면각'의 크기이다.

• 선분 $\mathrm{C'D}$의 길이를 구하자.

마찬가지의 이유로 $\angle \mathrm{CHC'} = \theta$이다. 이때,

$\theta(= \angle \mathrm{CHC'}) > \angle \mathrm{CDC'}$

임을 관찰할 수 있다.

직각삼각형 CHD에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{CD}}\sin\theta_0$, $\overline{\mathrm{HD}} = \overline{\mathrm{CD}}\cos\theta_0$

정사영의 길이에 대한 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{C'H}} = \overline{\mathrm{CH}}\cos\theta = \overline{\mathrm{CD}}\sin\theta_0\cos\theta$

직각삼각형 $\mathrm{C'HD}$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{C'D}} = \sqrt{\overline{\mathrm{C'H}}^2 + \overline{\mathrm{HD}}^2} = \overline{\mathrm{CD}}\sqrt{\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\cos^2\theta}$$

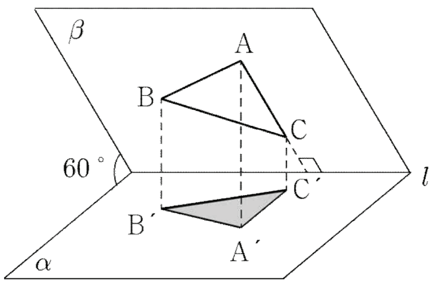
$=\overline{\mathrm{CD}}\sqrt{1-\sin^2\theta_0\sin^2\theta}$ (← 이 식을 공식으로 암기하지 말 것)

답 (1) $\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$ (2) $\overline{\mathrm{CD}}\sqrt{1-\sin^2\theta_0\sin^2\theta}$

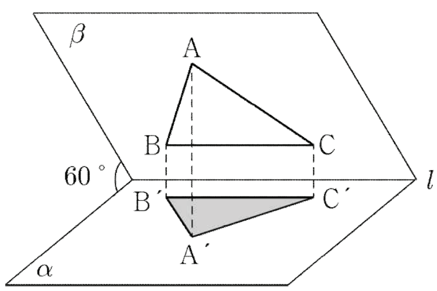
예제 2

다음의 두 물음에 답하시오.

(1) 아래 그림처럼 직선 l을 교선으로 갖는 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다. 평면 β에 포함되는 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 대하여 두 직선 AC, l은 서로 수직이다. 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 둘레의 길이와 넓이를 구하시오.

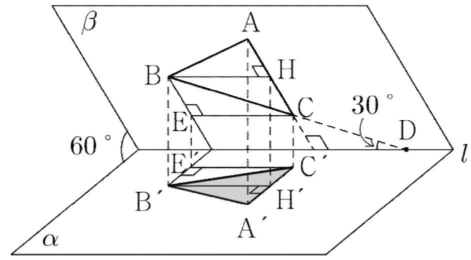


(2) 아래 그림처럼 직선 l을 교선으로 갖는 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다. 평면 β에 포함되는 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 대하여 두 직선 BC, l은 서로 평행하다. 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 둘레의 길이와 넓이를 구하시오.



풀이

(1) 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H, 점 C에서 '점 B를 지나고 직선 AC에 평행한 직선' 에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 평면 α에 내린 수선의 발을 E′이라고 하자. 그리고 직선 BC의 연장선이 직선 l과 만나는 점을 D라고 하자.



평행선의 성질에 의하여 □BECH는 직사각형이다.

평행한 두 직선 CC′, EE′에 의하여 평면 CEE′C′가 유일하게 결정된다. 이때, 평면 CEE′C′을 γ라고 하자.

EC$//l$이므로 $\gamma//l$이다.

$\gamma//l$이고, 평면 α는 직선 l을 포함하므로 E′C′$//l$이다.

마찬가지의 방법으로 B′H′$//l$이다.

(즉, 다섯 개의 직선 BH, EC, l, E′C′, B′H′ 는 서로 평행하다.)

삼수선의 정리❷에 의하여 $\overline{\mathrm{A'C'}}\perp l$, $\overline{\mathrm{B'E'}}\perp l$이므로

평행선의 성질에 의하여 □B′H′C′E′는 직사각형이다.

평행선의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{CDC'}=\angle\mathrm{HBC}=\frac{\pi}{6}$ (엇각)

즉, 두 직선 BC, l이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

마찬가지의 이유로 두 직선 AB, l이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다. (이 경우에는 동위각이 같다.)

• 선분 A′C′의 길이

정사영의 길이에 대한 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{A'C'}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos\frac{\pi}{3}=2$

• 두 선분 A′B′, B′C′의 길이

정사영의 길이에 대한 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{B'E'}}=\overline{\mathrm{BE}}\cos\frac{\pi}{3}=1$

선분 E′C′의 길이를 구하면

$\overline{\mathrm{E'C'}}=\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{BH}}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 B′C′E′에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{B'C'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{B'E'}}^2+\overline{\mathrm{E'C'}}^2}=\sqrt{13}$

마찬가지의 방법으로

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{13}$

따라서 아래의 결과를 얻는다.

(△A′B′C′의 둘레의 길이)$=2+2\sqrt{13}$

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$(\triangle A'B'C'$의 넓이$)=(\triangle ABC$의 넓이$)\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

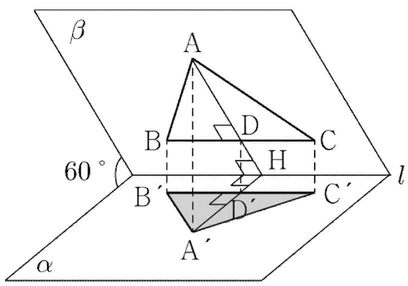
※ 주의: 정사영의 길이 공식과 정사영의 넓이 공식을 헷갈리지 말자.

$(\triangle A'B'C'$의 둘레의 길이$)$

$\neq(\triangle ABC$의 둘레의 길이$)\times\cos\frac{\pi}{3}$

$(\triangle A'B'C'$의 넓이$)=(\triangle ABC$의 넓이$)\times\cos\frac{\pi}{3}$

(2) 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H, 두 선분 AH, BC의 교점을 D, 점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발을 D′라고 하자.



• 선분 A′D′의 길이

삼수선의 정리❷에 의하여

$\overline{A'H}\perp l(\overline{D'H}\perp l)$

정사영의 길이에 대한 공식에 의하여

$\overline{A'D'}=\overline{AD}\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

• 선분 B′C′의 길이

평행한 두 직선 BB′, CC′에 의하여 평면 BB′C′C가 유일하게 결정된다. 이때, 평면 BB′C′C을 γ라고 하자.

$BC//l$이므로 $\gamma//l$이다.

$\gamma//l$이고, 평면 α는 직선 l을 포함하므로 $B'C'//l$이다.

(즉, 세 개의 직선 BC, l, B′C′는 서로 평행하다.)

평행선의 성질에 의하여 □BB′C′C는 직사각형이다.

$\overline{B'C'}=\overline{BC}=4$

직각삼각형 A′D′B′에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{A'B'}=\sqrt{7}$

마찬가지의 방법으로

$\overline{A'C'}=\sqrt{7}$

따라서 아래의 결과를 얻는다.

$(\triangle A'B'C'$의 둘레의 길이$)=4+2\sqrt{7}$

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$(\triangle A'B'C'$의 넓이$)=(\triangle ABC$의 넓이$)\times\cos\frac{\pi}{3}$

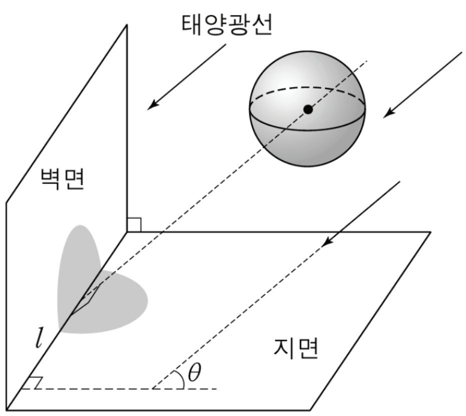
$=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

답 (1) $2+2\sqrt{13}$, $2\sqrt{3}$ (2) $4+2\sqrt{7}$, $2\sqrt{3}$

P039

○○○
(2010(9)−가형15)

그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다.
벽면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 a라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 b라 하자.
옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다.
ㄴ. $\theta=60^\circ$ 이면 $a<b$이다.
ㄷ. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{r^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

P. 정사영

P040

○○
(2024−기하26)

좌표공간에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

$$\overline{AB}=\overline{A'B'}=6$$

이다. 선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영을 M′이라 할 때,

$$\overline{PM'}\perp\overline{A'B'},\ \overline{PM'}=6$$

이 되도록 평면 α 위에 점 P를 잡는다.

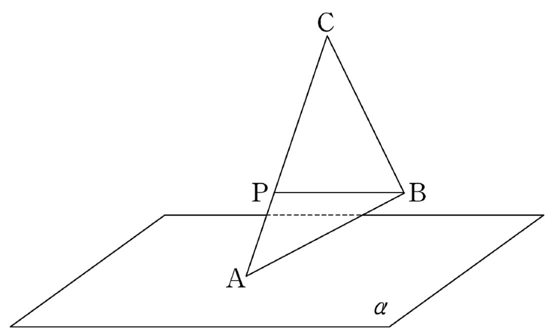
삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 선분 PM의 길이는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

P041

●●●
(2012(9)−가형29)

그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고 α로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{BP}=4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. [4점]

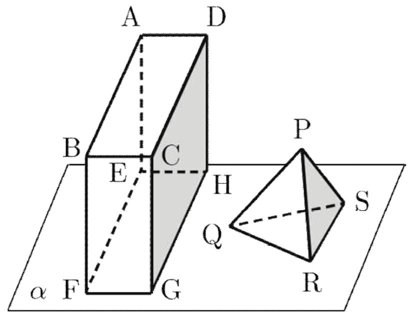


P. 정사영(사면체)

P042

○○
(2004(6)−자연15)

그림과 같이 직육면체 ABCDEFGH와 한 변의 길이가 1인 정사면체 PQRS가 평면 α 위에 놓여있다. 변 GH와 변 RS가 평행할 때, 삼각형 PRS의 평면 CGHD 위로의 정사영의 넓이는? [3점]



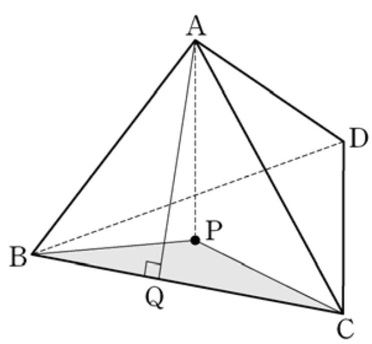
① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{12}$

P043

○○
(2016(9)−B형26)

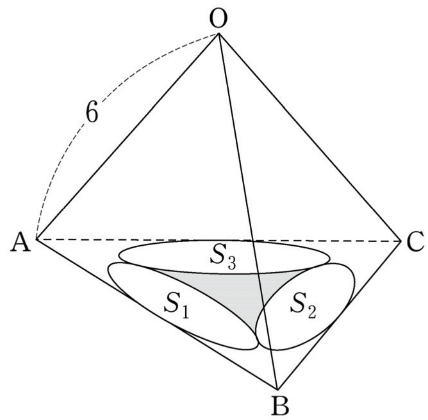
그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=12$, $\cos(\angle ABC)=\frac{\sqrt{3}}{3}$인 사면체 ABCD에 대하여 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 P라 하고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\cos(\angle AQP)=\frac{\sqrt{3}}{6}$일 때 삼각형 BCP의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



P044

●●●
(2008−가형24)

한 변의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 세 삼각형 △OAB, △OBC, △OCA에 각각 내접하는 세 원의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. 그림과 같이 세 도형 S_1, S_2, S_3으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 할 때, $(S+\pi)^2$의 값을 구하시오. [4점]



P. 정사영(원)

P045

○○○
(2014(9)-B형19)

좌표공간에서 y축을 포함하는 평면 α에 대하여 xy평면 위의 원 C_1 : $(x-10)^2+y^2=3$의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 yz평면 위의 원 C_2 : $y^2+(z-10)^2=1$의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 S로 같을 때, S의 값은? [4점]

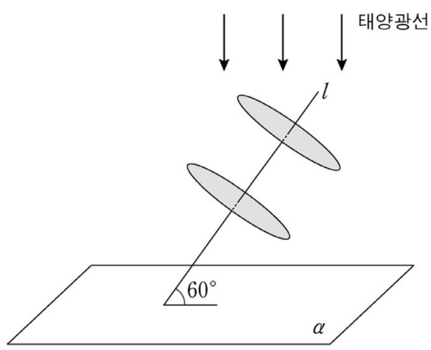
① $\dfrac{\sqrt{10}}{6}\pi$ ② $\dfrac{\sqrt{10}}{5}\pi$ ③ $\dfrac{7\sqrt{10}}{30}\pi$

④ $\dfrac{4\sqrt{10}}{15}\pi$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\pi$

P046

●●●
(2011-가형11)

그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 $60°$이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 원판의 두께는 무시한다.) [4점]



① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{3}{8}$ ② $\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{1}{8}$

④ $\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{3}{4}$

P047

○○○
(2008(9)-가형24)

반지름의 길이가 6인 반구가 평면 α 위에 놓여 있다. 반구와 평면 α가 만나서 생기는 원의 중심을 O라 하자. 그림과 같이 중심 O로부터 거리가 $2\sqrt{3}$이고 평면 α와 $45°$의 각을 이루는 평면으로 반구를 자를 때, 반구에 나타나는 단면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{2}(a+b\pi)$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [4점]