

제 2 교시

수학 영역 (B형)

5지선다형

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여
 행렬 $A - 2B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 4x - 1})$ 의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3. 좌표공간에서 두 점 $P(a, a+2b, 3)$, $Q(b, 1, 1)$ 을 이은
 선분 PQ를 2:1로 외분하는 점이 z축 위에 있을 때, $a+b$ 의
 값은? [2점]

- ① 1 ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

4. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\ln 2$ ② $\frac{3\ln 2}{2}$ ③ $2\ln 2$ ④ $\frac{5\ln 2}{2}$ ⑤ $3\ln 2$

5. 일차변환 f 에 의해서 두 점 $A(2, 1)$, $B(0, 1)$ 이 각각 두 점 $P(1, -1)$, $Q(3, -1)$ 으로 옮겨진다. f 에 의하여 점 $(3, 1)$ 이 옮겨지는 점은? [3점]

- ① $(3, -1)$ ② $(1, -1)$ ③ $(0, -1)$
 ④ $(0, 1)$ ⑤ $(1, 1)$

6. 서로 독립인 두 사건 A , B 가

$$P(A \cup B^C) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{5}{8}$$

를 만족시킬 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? (단, A^C 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{13}{20}$ ② $\frac{7}{10}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{17}{20}$

7. 함수 $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ 에 대하여 $f(a) = \sqrt{3}$ 일 때, $f(2a)$ 의 값은? (단, $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$) [3점]

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\sqrt{3}$

8. 모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ (나) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{a_n} + n \right) = 2$

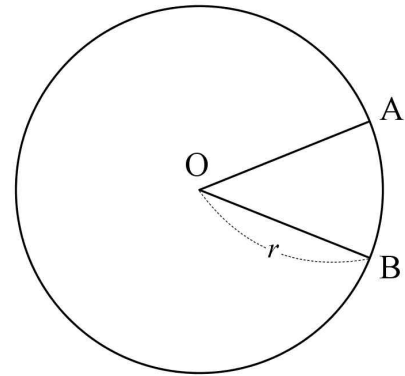
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n a_n + b_n}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{5}$
- ② $\frac{1}{10}$
- ③ $\frac{1}{15}$
- ④ $\frac{1}{20}$
- ⑤ $\frac{1}{25}$

9. 좌표평면 위의 두 점 $F'(-p, 0)$, $F(p, 0)$ 을 초점으로 공유하는 타원과 쌍곡선이 제1사분면의 점 P에서 만난다. $\overline{FP} = 2$ 일 때, 타원의 장축의 길이와 쌍곡선의 주축의 길이의 차는? (단, $p > 0$) [3점]

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 2
- ③ 4
- ④ 8
- ⑤ 16

10. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 r ($r \geq 1$)인 원 위에 $\overline{AB} = 2$ 를 만족시키는 두 점 A, B가 있다. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 6$ 일 때, r 의 값은? [3점]



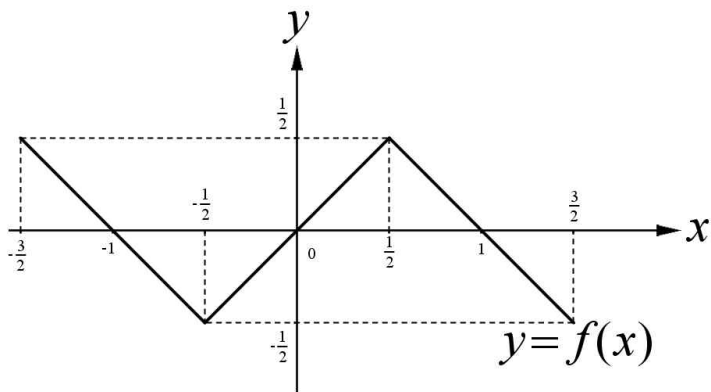
- ① $2\sqrt{2}$
- ② $2\sqrt{3}$
- ③ 4
- ④ $2\sqrt{5}$
- ⑤ $2\sqrt{6}$

11. 좌표평면의 구간 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \left(-\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2}\right) \\ x & \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right) \\ -x+1 & \left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right) \end{cases} \text{ 와 } g(x) = \frac{1}{2} \sin \pi x$$

에 대하여 방정식 $\frac{f(x)-g(2x)}{f(x)} = \frac{f(x)-g(2x)}{g(x)}$ 의
실근의 개수는? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



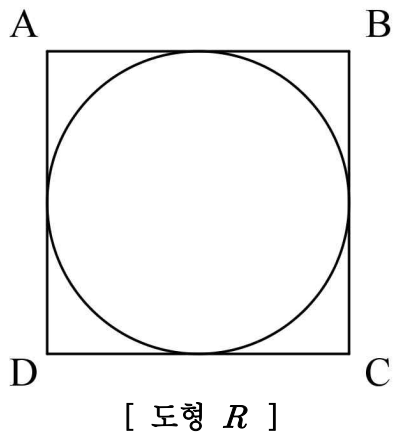
12. 영철, 성현, 광수 세 명의 학생에게 같은 종류의 필기구

10개를 남는 것이 없도록 나누어 주려고 한다. 필기구를 모두
나누어 준 후, 가지고 있는 필기구의 개수가 5개인 학생이
없도록 나누어 주는 경우의 수는?

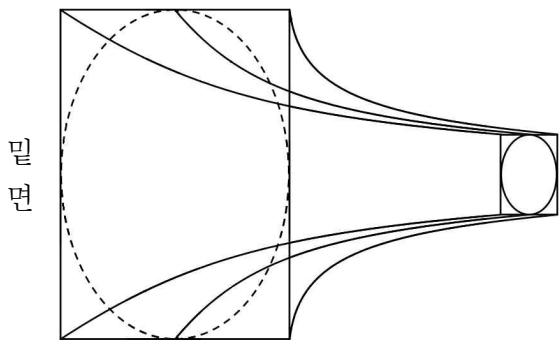
(단, 필기구를 한 개도 받지 못하는 학생이 생길 수 있다.) [3점]

- ① 41 ② 46 ③ 51 ④ 56 ⑤ 61

[13~14] 그림과 같은 정사각형 ABCD에 내접원을 그려 넣은 것을 도형 R이라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 그림과 같이 좌표평면 위의 곡선 $y = \frac{1}{x}$ ($1 \leq x \leq 4$)를 x 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체에 입체도형이 외접하고 있다. 회전체와 입체도형을 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면이 항상 도형 R과 같을 때, 회전체에 외접한 입체도형의 내부의 부피는? [3점]



- ① 3 ② $\frac{5}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

14. 도형 R에서 $\overline{AB} = 2$ 일 때, 내접원 위에 서로 다른 두 점 P, Q를 $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CQ}| = 1$ 을 만족시키도록 잡는다. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 의 최댓값은? [4점]

- ① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

15. 사회연구학에서는 다양한 국가의 도시화율을 예측하고자 할 때 도시/농촌 인구성장 예측기법을 사용한다. 어느 인구조사 연도의 총인구 대비 도시 인구의 비율을 p_0 , 이 해로부터 t 년 뒤 총인구 대비 도시 인구의 비율을 p_t 라 하면 농촌 대비 도시 인구비의 성장률(URR)은 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$URR = \frac{1}{t} \left\{ \log \left(\frac{p_t}{1-p_t} \right) - \log \left(\frac{p_0}{1-p_0} \right) \right\}$$

다음 표에 제시된 인구 정보를 이용하여 구한 2016년도의 총인구 대비 도시 인구의 비율로 옳은 것은?

(단, k 는 상수이다.) [4점]

	총인구 대비 도시 인구의 비율		URR
2004	0.4	2004~2012년 (8년 간)	k
2012	0.6	2012~2016년 (4년 간)	$2k$

- ① $\frac{26}{35}$ ② $\frac{27}{35}$ ③ $\frac{4}{5}$
- ④ $\frac{29}{35}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

16. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 5$ 이고, $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 일 때,

$$(n-1)S_{n+1} = (n+1)S_n - 2a_{n+1} + n - 1 \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$(n+1)S_{n+1} - 2S_{n+1} = (n+1)S_n - 2a_{n+1} + n - 1$$

$$(n+1)a_{n+1} = 2S_n + n - 1 \quad \text{Ⓐ}$$

$$na_n = 2S_{n-1} + n - 2 \quad (n \geq 2) \quad \text{Ⓑ}$$

이고, Ⓐ에서 Ⓑ을 뺀 식으로부터

$$(n+1)a_{n+1} = (n+2)a_n + 1 \quad (n \geq 2)$$

을 얻는다. 양변을 $\boxed{\text{가}}$ 로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{\boxed{\text{가}}}$$

이다. $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ 이라 하면,

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{\boxed{\text{가}}}$$

이고, $a_2 = 5$ 이므로 $n \geq 2$ 에서 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n = \boxed{\text{나}}$$

이다. 따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \begin{cases} 5 & (n=1) \\ \boxed{\text{다}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $f(6) + g(4) \times h(2)$ 의 값은? [4점]

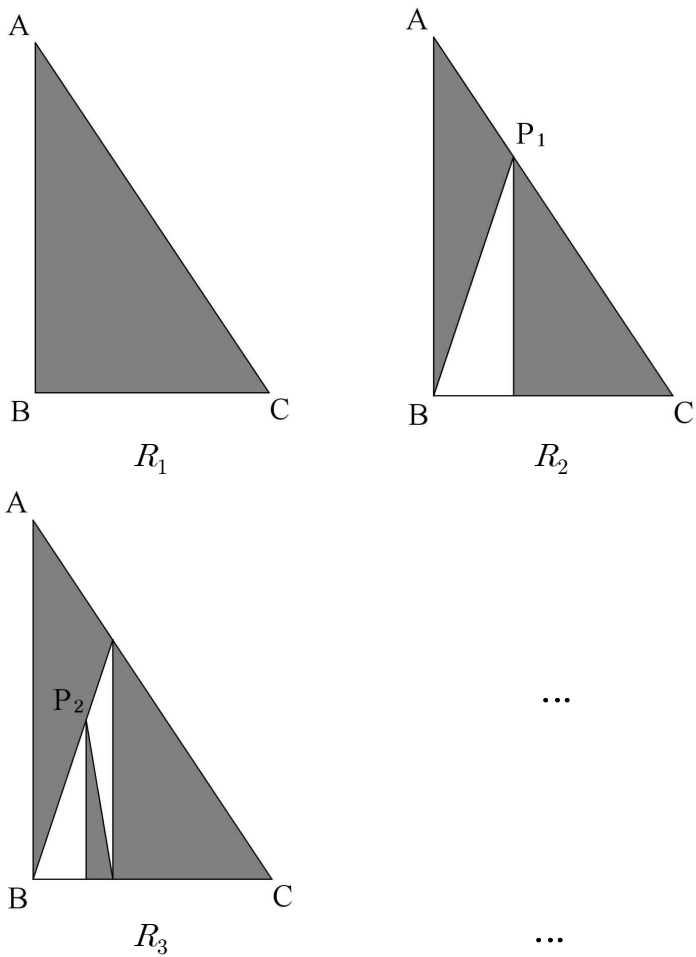
- ① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

17. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$ 이고 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC 를 T_1 이라 하고, 삼각형 T_1 의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에 삼각형 T_1 의 빗변을 3등분하는 점 중에서 점 A 에 가까운 것을 P_1 이라 하고, P_1 과 삼각형 T_1 의 직각인 꼭짓점을 잇고 P_1 에서 선분 BC 에 수선을 내려 T_1 의 내부에 생기는 삼각형 중 넓이가 최소인 것을 T_2 라 하자. 그림 R_1 에서 삼각형 T_2 의 내부의 색칠을 지워 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에 삼각형 T_2 의 빗변을 3등분하는 점 중에서 점 A 에 가까운 것을 P_2 라 하고, P_2 와 삼각형 T_2 의 직각인 꼭짓점을 잇고 P_2 에서 선분 BC 에 수선을 내려 T_2 의 내부에 생기는 삼각형 중 넓이가 최소인 것을 T_3 이라 하자. 그림 R_2 에서 삼각형 T_3 의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{27}{8}$ ② 3 ③ $\frac{27}{10}$ ④ $\frac{27}{11}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

18. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A(A+B-E) = B+E, \quad A^3 = 2E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A+B$ 의 역행렬이 존재한다.
 ㄴ. $(AB)^3 = 2B^3$
 ㄷ. $(B-E)^{15} = 1024E$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어있는 상자에서 임의로 카드 두 장을 꺼내는 시행을 한다. 카드 두 장에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 사건을 A 라 하자. 두 번째 시행에서 사건 A 가 발생했을 때, 첫 번째 시행에서도 사건 A 가 발생했을 확률은? (단, 한 번 꺼낸 카드는 다시 넣지 않는다.) [4점]

- ① $\frac{11}{15}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{7}{15}$

20. $t > 0$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 를 매개변수 t 로 나타내면

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \cos t \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 의 극점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열하였을 때 n 번째 수를 a_n 이라 하고,

원점에서 $f(x)$ 에 그은 각각의 접선에 대하여 그 접점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열하였을 때 n 번째 수를 b_n 이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, n 은 자연수이다.) [4점]

<보 기>

$$\neg. f'(\frac{\pi^2}{4}) = -\frac{1}{2}$$

ㄴ. $0 < t < n\pi$ 일 때, 원점에서 $f(x)$ 에 그을 수 있는 접선의 개수는 n 이다.

$$\text{ㄷ. } 0 < \sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} < \pi$$

- ① \neg ② $\neg, \text{ㄴ}$ ③ $\neg, \text{ㄷ}$
 ④ $\text{ㄴ}, \text{ㄷ}$ ⑤ $\neg, \text{ㄴ}, \text{ㄷ}$

21. 함수 $f(x) = e^{-x^2}$ 와 직선 $x = \frac{1}{2}$ 위의 점 $P(\frac{1}{2}, k)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 k 의 값의 범위는 $\alpha < k < \beta$ 이다. $\beta - \alpha$ 의 최댓값은?
(단, e 는 자연로그의 밑이다.) [4점]

(가) $k \geq f(\frac{1}{2})$
(나) 점 P 에서 함수 $f(x)$ 에 2개의 접선을 그을 수 있다.

- ① $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ② $\sqrt{\frac{2}{e}}$ ③ $\sqrt{\frac{3}{e}}$ ④ $\frac{2}{\sqrt{e}}$ ⑤ $\sqrt{\frac{5}{e}}$

단답형

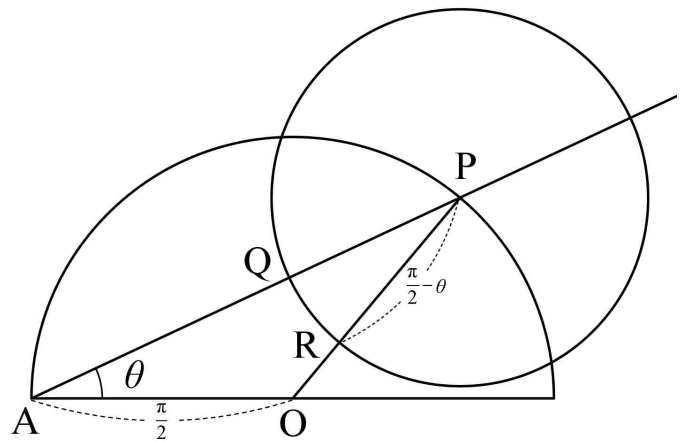
22. 함수 $f(x) = e^{3x-3} + \ln 2x$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 n 번째 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $a_1 = 2$ 이고 $S_5 = 70$ 이다. a_{10} 의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에서 점 $P(1, -1, 1)$ 를 지나고 평면 $2x+2y+z-1=0$ 에 수직인 직선이 평면 $y-z=0$ 과 만나는 점의 좌표를 (a, b, c) 라 하자. $a \times b \times c$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 좌표평면에서 곡선 $y=4^x$, $y=2^{x+1}-1$ 이 $x=k$ ($k>0$)과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=64$ 일 때, 삼각형 OAB의 넓이는 a 이다. $\log_3 2 \times a$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]

26. 그림과 같이 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{\pi}{2}$ 인 반원이 있다. 반원의 지름 위 한쪽 끝 점 A를 지나는 직선과 반원과의 교점 중에서 A가 아닌 것을 점 P라 할 때, $\angle PAO = \theta$ 이다. 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 인 원과 선분 AP, 선분 OP의 교점을 각각 Q, R이라 하자. 부채꼴 PQR의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 APR의 넓이를 $g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [4점]



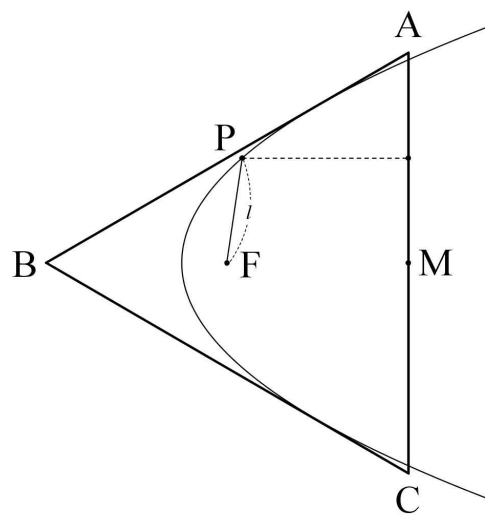
27. 어느 과수원에서 수확된 사과와 당도는 평균이 16, 표준편차가 5인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 임의로 선택한 n 개의 사과를 한 세트로 묶고, 평균 당도가 전체 평균의 0.75배 이상, 전체 평균의 1.25배 이하이면 중간 등급 상품으로 판매하기로 했다. 사과 한 세트가 중간 등급으로 분류될 확률이 90% 이상이 되기 위한 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. (단, Z 가 표준정규분포표를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 1.64) = 0.45$ 로 계산한다.) [4점]

28. 그림과 같이 한 변의 길이가 $16\sqrt{3}$ 인 정삼각형 ABC의 내부에 포물선이 접하고 있다. 변 AC의 중점은 M이고, 포물선의 초점 F는 두 점 B, M의 중점이다. 포물선 위의 점 P에서 선분 AC까지의 거리가 자연수일 때, 집합

$$S = \{l \mid \overline{FP} = l\}$$

의 모든 원소의 합을 구하시오.

(단, 점 P는 삼각형 ABC의 경계 또는 내부에 있다.) [4점]



29. 미분 가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$, $f(x+2) = f(x)$ 를 만족시킨다. $g(x) = x^2 f'(x)$ 로 정의된 함수 $g(x)$ 에 대하여

$$\int_0^3 g(x) dx = \int_2^5 g(x) dx - 20 = \int_{-1}^2 g(x) dx - 12$$

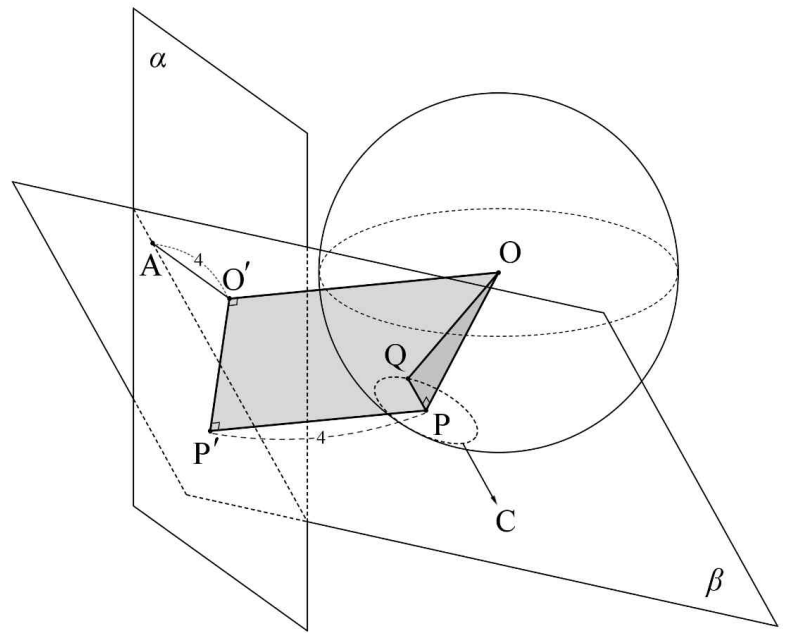
일 때, $\int_0^3 f(x) dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 구의 중심 O 에서 평면 α , 평면 β 까지의 거리는 각각 5, 3이고, 평면 β 와 구가 만나 생기는 원 C 의 중심은 P 이다. 평면 α 와 평면 β 의 교선 위에 점 A , 원 C 위에 점 Q 를 잡고, 두 점 O, P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 O', P' 이라 하면 네 점은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{PP'} = \overline{O'A} = 4$
- (나) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

평면 $OPP'O'$ 과 평면 OPQ 가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\cos^2 \theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



※ 확인 사항
 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.