2016학년도 논술 모의고사 1회 (수학) 해설 & 예시 답안

안녕하세요! 이 논술 모의고사를 제작한 제작자 '正進'입니다. 난생 처음으로 모의고사에 해설지를 만들어서 왠지 모르게 두근두근 거려요! 모의고사 만드는 분들도 이런 느낌으로 만드시는 건지 알고 싶어요...

이 문제를 사용하는 건 상관없지만, 너무 무분별하게 사용하지 마시고, 사용하실 땐 출처를 꼭 밝혀 주세요...

개인이 제작하는 모의고사는 수능부터 시작해서 논술까지 다양하고 많은 양이 있어서 공부하는 양에 있어서는 부족함이 없다고 할 수 있겠지만, 아무래도 중요한 건 퀄리티라 생각합니다. 그런 면에서 제 문제는 그냥 제가 수능 문제를 풀거나 평소 궁금해 했던 내용을 논술 모의고사로 만든 것인지라 퀄리티면에서는 보장할 수 없겠군요..... 하하.....(어이, 이봐!)

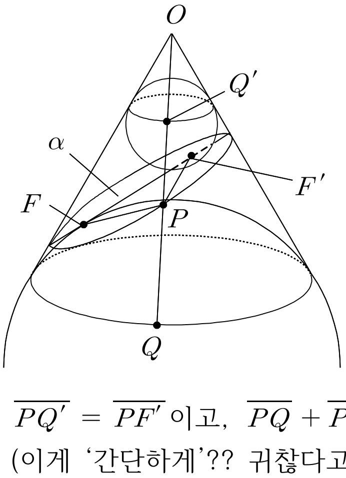
일단, 1회차 난이도는 제작자 기준으로는 무난한 수준이라고 생각합니다. 원래는 제시문 (라)의 경우 처음 한 문장만 제시했는데요,,,, 딸랑 그 한 문장만 놓고 보니 [논제 2-2]를 해결하기가 조금 까다롭더군요. 그래서 조금이나마 단서가 될 수 있도록 내용을 추가했습니다. 또, [논제 2-3]도 원래는 '$\angle ABO > \dfrac{\pi}{2}$임을 보이시오.'만 제시했는데, 그렇게 놓고 보니 조금 어렵겠다 싶었습니다. (물론 문항을 제작했을 때의 이야기입니다. 실제로 여러분들이 풀고 어떻게 느끼셨는지는..... 지금 이 모의고사를 작성하던 시기로선 잘 모르겠네요.) 뭐, 그 외에도 [논제 1-1]의 경우는 서울대 논술(정시인지 수시인지는 정확하게 기억이 안남)에 이미 한번 출제된 내용이기도 합니다. [논제 1]의 경우, [논제 1-3]만 제외하고는 ([논제 1-1]를 이미 한번 접해본 분이라면) 아마 답안 작성 완료까지 10분도 채 안 걸렸을 거라 생각합니다. 그래서 제한시간을 80분으로 조금 빡빡하게 했는데 어땠을지는.....

서론은 이만으로 하고 본격적으로 출제 의도와 제 예시 답안, 채점 기준안을 설명하겠습니다. (출제 의도라 해 봤자 어차피 제가 주어진 문제 상황을 해결한 후 갖다 붙인 거에 불과하지만 말입니다.) 계산 실수로 값이 잘못 나온 경우, 1문제당 2점씩 감점하면 됩니다. (추가로, 이 논술모의고사는 7차 개정교육과정을 바탕으로 제작된 것입니다.)

[논제 1]

[논제 1-1] 주어진 평면 α와 원뿔의 교선인 곡선 C'가 타원임을 보이시오. [10점]

출제 의도 : 타원의 정의를 이용하여 원뿔과 평면의 교선이 타원임을 보일 수 있다.



이 문제의 경우 앞에서 언급했다시피 서울대서 한번 낸 문제라서 예시 답안만 '간단하게' 언급하고 넘어가겠습니다. ....절대 글쓰기 귀찮아서 그러는 거니 그냥 그러려니 해 주세요...

예시 답안 : 왼쪽 그림은 원뿔에 내접하는, 반지름의 길이가 다른 두 구가 평면 α와 점 F, F'에서 접하고 있는 모습이다. 또, 점 Q, Q'은 두 구와 원뿔의 교선 위의 점이고, 점 P는 평면 α와 원뿔의 교선 C'위의 점이며, 네 점 O, Q', P, Q는 한 직선 위에 있다. 그런데, 선분 OQ는 두 구의 공통접선인 원뿔의 모선이므로 $\overline{PQ} = \overline{PF}$, $\overline{PQ'} = \overline{PF'}$이고, $\overline{PQ} + \overline{PQ'} = k$ (단, k는 상수)이므로 타원의 정의에 의해 곡선 C'는 타원이다. (이게 '간단하게'?? 귀찮다고 해 놓고 모두 서술해 주는 우리 제작자의 '친절함')

채점 기준 : 정의를 이용해 적절하게 서술함. ………… 10점

[논제 1-2] 곡선 C는 모선 $\overline{AO}$로 옆면을 자른 원뿔의 전개도에서 어떤 도형인지 설명하시오. [10점]

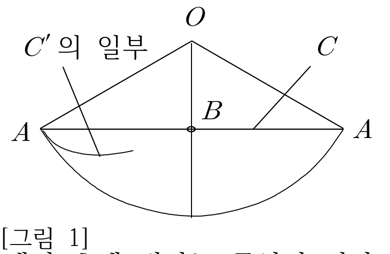
출제 의도 : 전개도를 이용해 최단거리곡선 C의 형태를 추론할 수 있다.

이 문제는 수능에서도 자주 다루는 문제입니다. 다들 잘 아실 테니 이건 넘어가도록 하겠습니다.

채점 기준 : 전개도를 이용해 곡선 C가 원뿔의 전개도에서 현임을 적절하게 설명함. ………… 10점

[논제 1-3] 제시문 (다)를 참고하여 철수의 사고과정에서 오류를 찾아내시오. [15점]

출제 의도 : 제시문 (다)를 이용하여 곡선 C'와 곡선 C가 다른 곡선임을 밝힐 수 있다.



[그림 1]

예시 답안 : 제시문 (다)의 역명제를 고려하면, '임의의 t_1에 대하여 $P(t_1)=Q(t_2)$인 t_2가 존재하지 않거나, $P(t_1)=Q(t_2)$인 t_2가 존재하고 $P(t_1)$에서의 곡선의 접선이 일치하지 않으면 두 곡선은 일치하지 않는다.'이다.(… ①) [논제 1-1]의 곡선 C'는 밑면과 점 A에서 접하는 타원이므로 점 A에서의 곡선의 접선은 밑면의 점 A에서의 접선과 같다. 따라서 C'를 원뿔의 전개도에서 보면 점 A에서 호에 접하는 곡선이 된다. (그림 1) 그러나 곡선 C를 원뿔의 전개도에서 보면 직선이므로 점 A에서 호에 접하는 곡선이 될 수 없다.(… ②) 따라서 두 곡선 C와 C'는 일치할 수 없으므로 평면 α와 원뿔의 교선이 곡선 C'일 거라는 철수의 추론은 잘못됐다.(… ③)

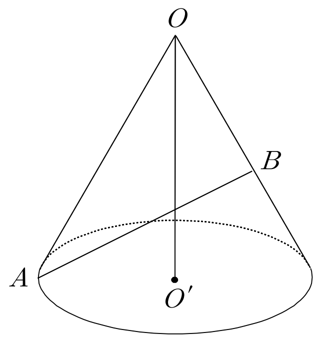
채점 기준
①을 적절하게 서술함. ………… 6점
②를 적절하게 서술함. ………… 6점
③을 적절하게 서술함. ………… 3점
(이외에도 제시문 (다)를 이용하여 논리적으로 서술했을 경우 15점 득점)

3번 문제가 좀 지저분하긴 하지만, 그래도 '논술이니까'라는 한마디로 다 통하니 매우 편하군요!!

[논제 2]
[논제 2-1] $\overline{AO}=l$, $\overline{AO'}=r$일 때, $\overline{OB}$, $\cos\angle AOB$를 구하시오. [10점]

출제 의도 : 전개도에서 중심각을 이용해 선분의 길이와, 배각공식을 이용해 각의 코사인 값을 구할 수 있다.

하하하.... 이 문제는 전주곡에 불과합니다!



[그림 2]

예시 답안 : [그림 1]의 전개도에서 중심각의 크기를 β라 하면 호의 길이와 밑면의 길이의 관계에 의해 $l\beta = 2\pi r$에서 $\beta = \frac{2\pi r}{l}$이다.(… ①) 이때 $\overline{OB} \perp \overline{AB}$이므로 $\overline{OB} = \overline{AO}\cos\frac{\beta}{2} = l\cos\frac{r}{l}\pi$이다.(… ②) 또, [그림 2]에서 $\angle AOB = 2\angle AOO'$이므로, $\sin\angle AOO' = \frac{\overline{AO'}}{\overline{AO}} = \frac{r}{l}$, $\cos\angle AOB = 1 - \frac{2r^2}{l^2}$이다.(… ③)

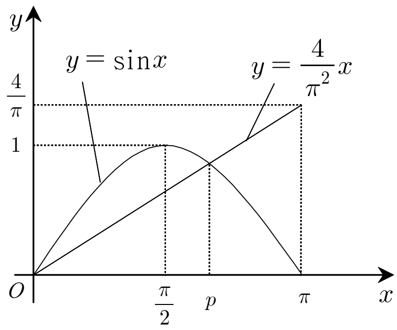
채점 기준
①을 적절하게 서술함. ………… 5점
②를 적절하게 서술함. ………… 5점
③을 적절하게 서술함. ………… 5점
(이외에도 논리적으로 서술했을 경우 15점 득점)

[논제 2-2] $0 < x < \pi$일 때, $\cos x < 1 - \frac{2}{\pi^2}x^2$임을 보이시오. [20점]

출제 의도 : 적분을 이용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있다.

이게 진짜 어려운 부분 중에 하나였을 겁니다. 범위를 나눠서 보여야하기 때문인데, 보통 적분을 이용해 부등식을 증명할 때는 구간을 나눠서 증명하는 경우가 수능 수준에서는 드물기 때문입니다. (이건 절대적으로 필자의 주관입니다.)

예시 답안 : 구간 $(0, \pi)$에서 정의된 함수 $f(x) = 1 - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \cos x$라 하자. 그러면 구간 $(0, \pi)$에서 $f(x) > 0$임을 보이면 된다. $f(x)$를 미분하면 $f'(x) = -\frac{4}{\pi^2}x + \sin x$이다. 이때 $y = \frac{4}{\pi^2}x$와 $y = \sin x$의 그래프를 그려보면 다음 [그림 3]과 같다. 따라서 $f'(x) = 0$인 x는 p로 유일하며, $x < p$이면 $f'(x) > 0$, $p < x$이면 $f'(x) < 0$이다. 따라서 다음과 같이 두 경우로 나눈다.(… ①)
ⅰ) $0 < x < p$일 경우 : $f'(x) > 0$이므로 제시문 (라)에 의해 $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = 1 - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \cos x > 0$가 성립한다.



[그림 3]

$$\therefore \cos x < 1-\frac{2}{\pi^2}x^2$$

ⅱ) $p<x<\pi$일 경우 : $f'(x)<0$이므로 제시문 (라)에 의해 $f(x)-f(\pi)=\int_{\pi}^{x} f'(t)dt = 1-\frac{2}{\pi^2}x^2-\cos x>0$이다.

$$\therefore \cos x < 1-\frac{2}{\pi^2}x^2$$

ⅰ), ⅱ)에 의해 $0<x<\pi$인 모든 x에 대해 $\cos x < 1-\frac{2}{\pi^2}x^2$가 성립한다.(… ②)

채점 기준

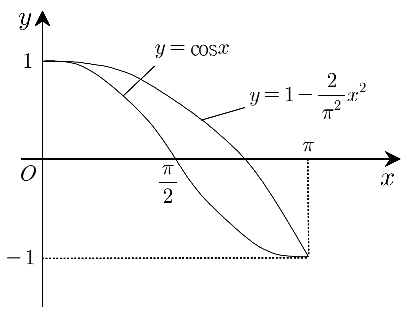
함수 $f(x)=1-\frac{2}{\pi^2}x^2-\cos x$를 설정하고, x의 범위에 따라 $f'(x)$의 부호를 판별함(①) …… 10점

①의 내용을 바탕으로 함수 $f(x)$가 $0<x<\pi$에서 항상 양수임을 보임(②) …………………… 10점

(이외에도 함수의 증감을 이용하여 증명하는 등 논리에 문제가 없을 시 20점 득점)

솔직히 문제를 만들 때는 이 정도는 제시문으로 제시해야겠다고 생각했지만, 해설을 만들면서 저 정도로 제시문을 자세하게 줄 필요가 있나 생각했습니다. 군더더기가 너무 많아서 좀만 잘 읽어보면 바로 단서를 얻을 수 있으니 말이죠. 하지만, 아직 1회고 하니 조금은 무르게 가도 되지 않나 하는 생각에 제시문에 논제를 해결할 단서들을 최대한 욱여넣어서 만들었습니다. 사실 제시문 (라)의 첫 문장만 주어졌다면 이런 생각을 떠올리기 힘들었을 수도 있습니다. 뭐, 그렇다구요......

참고로 $y=\cos x$, $y=1-\frac{2}{\pi^2}x^2$의 그래프는 $0<x<\pi$에서 다음과 같습니다.



[논제 2-3] A에서 직선 $\overleftrightarrow{OB}$에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{OB}<\overline{OH}$임을 보이고, 이를 이용하여 $\cos\angle ABO<0$임을 보이시오. [15점]

출제 의도 : 주어진 조건으로 $\cos\angle ABO<0$임을 보일 수 있다.

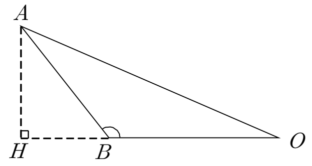
원래 제가 수능대비문제를 풀면서 떠올렸던 궁금증으로, 사실은 이게 이번 논술 주제의 최종 목적이었습니다. 하지만 문제를 만들다 보니 ‘$\angle ABO$가 최대가 되는 경우는 어떤 경우일까?’하는 의문이 떠올랐고, 그걸 그대로 문제로 만든 게 [논제 2-4]입니다. 문제로 만들면서는 조금 수정을 해서

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

바로 어떻게 보여야 하는지 떠올리기 어렵게 만들었지만요.

예시 답안 : 주어진 조건과 위의 [논제 2-1]에 의하면 $\overline{OH} = \overline{AO}\cos\angle AOB = l\left(1 - \frac{2r^2}{l^2}\right)$, $\overline{OB} = l\cos\frac{r}{l}\pi$이다. 그런데, $\triangle AOO'$에서 $0 < \sin\angle AOO' = \frac{r}{l} < 1$ ($\because$ 제시문 (가)에 의해 $l \neq r$, $l > 0$, $r > 0$)이므로 $0 < \frac{r}{l}\pi < \pi$이다.($\cdots$ ①) 따라서 $\frac{r}{l}\pi = x$로 치환하면 $\overline{OH} = l\left(1 - \frac{2}{\pi^2}x^2\right)$, $\overline{OB} = l\cos x$이다. 그런데, [논제 2-2]에 의해 $0 < x < \pi$일 때, $\cos x < 1 - \frac{2}{\pi^2}x^2$성립한다.

$$\therefore \overline{OB} < \overline{OH} \quad (\cdots ②)$$


[그림 4]

이를 그림으로 나타내면 [그림 4]와 같다.

[그림 4]에서 $\cos\angle ABH = \frac{\overline{HB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OH} - \overline{OB}}{\overline{AB}} > 0$이므로 $\angle ABH < \frac{\pi}{2}$, $\angle ABO = \pi - \angle ABH > \frac{\pi}{2}$이다.

$$\therefore \cos\angle ABO < 0 \ (\cdots ③)$$

채점 기준

$\overline{OH}$, $\overline{OB}$를 적절하게 구한 후 $\frac{r}{l}\pi$의 범위를 적절하게 구함. (①) ································ 7점

①에서 구한 값 중 $\frac{r}{l}\pi = x$로 치환한 후 [논제 2-2]를 이용해 $\overline{OB} < \overline{OH}$임을 보임.(②) $\cdots$ 3점

②의 결과를 바탕으로 $\triangle AHO$, $\triangle AOB$의 관계를 적절하게 그린 후 각도를 이용해 $\cos\angle ABO < 0$임을 보임. (③) ··········· 5점

(이외에도 논리적으로 서술했을 경우 15점 득점. ①에서 [논제 2-2]의 결과에 의해 $0 < x < 1$에서 $\cos\pi x < 1 - 2x^2$이 성립함을 보인 후에 $\frac{r}{l} = x$로 치환한 것도 정답 인정. 단, ③을 보이는 과정에서 $\overline{OB} < \overline{OH}$을 이용하지 않은 경우 5점 감점. 그림을 그리고 '그림에 의해 $\angle ABO > \frac{\pi}{2}$이다.'등의 서술은 인정 안 됨.)

이 문제를 만들 때, $\overline{OH}$, $\overline{OB}$를 구하고 보니 $\frac{r}{l}\pi$를 치환하고 싶더라구요. 그래서 치환하고 보니 [논제 2-2]의 상황을 증명해야 했습니다. 결국은 증명을 해 내서 이렇게 논술 문제가 되었네요...

[논제 2-4] $\overline{AB} = kl$ (단, k는 상수)일 때, $\angle ABO$가 최대가 되는 $\frac{r}{l}$이 열린구간 $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$에 적어도 하나 이상 존재함을 보이시오. (단, 필요하다면 $9.5 < \pi^2 < 10$임을 이용하시오.) [20점]

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

출제 의도 : 중간값 정리[1]로 $\angle ABO$가 최대가 되는 $\frac{r}{l}$이 열린구간 $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$에 적어도 하나 이상 존재함을 보일 수 있다.

이 문제가 진정한 이번 논제의 하이라이트.... 라 할 수 있었지만, 이미 [논제 2-2]에서 이 논제를 해결할 실마리(라기보단 그냥 답 자체)를 줬기 때문에 [논제 2-2]를 잘 해결했다면 남은 건 p가 $\frac{2}{3}\pi < p < \frac{3}{4}\pi$임을 보이기만 하면 되는데..... 이건 조금 끈기를 가지고 계산하면 쉽게 나옵니다.

예시 답안 : $\angle ABO$가 최대가 될 때, $\cos\angle ABO$는 최소가 되므로, $\cos\angle ABO$가 최소가 될 때의 $\frac{r}{l}$의 값의 범위를 구하면 된다. 그런데 [논제 2-3]에서 $\cos\angle ABO = \frac{1}{k}\left(\cos x - 1 + \frac{2}{\pi^2}x^2\right) = g(x)$이다. (단, $\frac{r}{l}\pi = x$) $g(x)$를 미분하면 $g'(x) = \frac{1}{k}\left(-\sin x + \frac{4}{\pi^2}x\right) = 0$인 $x = p$일 때, $x < p$이면 $g'(x) < 0$이고, $x > p$이면 $g'(x) > 0$이므로 $g(x)$는 $x = p$에서 최솟값을 갖는다.(… ①) ([논제 2-2] 참고) 그런데 $g'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{k}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{3\pi}\right) < 0$ $(\because (3\sqrt{3}\pi)^2 = 27\pi^2 > 27 \cdot 9.5 = 243 + 13.5 = 256.5 > 256 = 16^2 \rightarrow \frac{8}{3\pi} < \frac{\sqrt{3}}{2}$)이고, $g'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{k}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\pi}\right) > 0$($\because \pi^2 < 10 < 18 = (3\sqrt{2})^2 \rightarrow \frac{3}{\pi} > \frac{1}{\sqrt{2}}$)이므로 제시문 (마)에 의해 $g'(p) = 0$인 p가 열린구간 $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$에 적어도 하나 이상 존재하여 $x = p$에서 $g(x)$는 최솟값을 갖는다. 따라서 $\frac{2}{3}\pi < p = \frac{r}{l}\pi < \frac{3}{4}\pi$이므로 $\angle ABO$가 최대가 되는 $\frac{r}{l}$이 열린구간 $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$에 적어도 하나 이상 존재한다. (… ②)

채점 기준

$\angle ABO$가 최대가 될 때, $\cos\angle ABO$는 최소가 됨을 이용하여, $\cos\angle ABO$를 x에 대한 함수 $g(x)$로 세우고, $g(x)$가 최소가 되는 점이 존재함을 보임. (①) ………………………………………… 10점

제시문 (마)를 이용하여 $g(x)$가 최소가 되는 x값이 $\frac{2}{3}\pi$와 $\frac{3}{4}\pi$사이에 있음을 보이고, 이를 통해 $\angle ABO$가 최대가 되는 $\frac{r}{l}$이 열린구간 $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$에 적어도 하나 이상 존재함을 보임.(②) … 10점

(이외에도 논리적으로 서술했을 경우 20점 득점)

네, 이걸로 제 1회가 끝났는데요, 여러분들이 체감한 난이도는 어떠셨나요? 저는 개인적으로 작년(2015학년도 수시선발) 연세대학교 정도의 난이도라 생각하는데요.... 아니, 제시문에 논제를 해결할 수 있는 모든 정보를 제작자 기준으로‘친절하게’ 다 알려줬으니 작년보다는 더 쉽다고 해야 할 듯..... 그렇지만 제시문 (가) ~ (다)는 버리더라도 (개인적으로 제시문 (다)는 안 버렸으면 하는데요.... 버리면 뭐, 어쩔 수 없죠... 쩝) (라)와 (마)의 내용만큼은 꼭 교과서나 기본 개념서를 확인했으면 하는, 그래

[1] 이 용어는 7차개정교육과정(2007개정교육과정)의 용어로, 2009개정교육과정(2015년 현재 고2 대상)에서는 ‘사잇값 정리’로 바뀌었습니다.

서 조금이라도 대학 논술을 대비하는 데 도움이 되었으면 하는 게 제작자의 바람입니다.

이번 1회는 서장에 불과합니다. 이거보다도 엄청 어려운 게 두 개 정도 더 있습니다. 근데 그 두 개는 대학 내용을 (정확히는 하나는 대학과정, 하나는 대학원(!)과정입니다.) 좀 알면 쉽게 해결할 수 있는 문제라는 게 함정..... 물론 요즘의 논술 출제 경향하고는 조금 달라서 최대한 고등학교에서 배우는 개념을 확실하게 익혔으면 풀 수 있게 만들었지만, 글쎄요..... 어떨지는 직접 뚜껑을 까 봐야 알 듯합니다. 뭐, 아무튼 잡담은 이로 줄이고 좀 더 어려운 2회로 돌아올 테니 기대해 주세요!!! (하하하) 그럼 20000~ (← 괜히 다들 써대던 말을 한번 써 보고 싶었던 제작자.....)

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)