1. 답 ④	2. 답 ④	3. 답 ②	4. 답 ⑤
5. 답 42	6. 답 ④	7. 답 ④	8. 답 ③
9. 답 ②	10. 답 ⑤	11. 답 ③	12. 답 ③
13. 답 ③	14. 답 ⑤	15. 답 14	16. 답 ②
17. 답 ①	18. 답 ④	19. 답 ④	20. 답 ④
21. 답 ①	22. 답 $\frac{1}{3}x^3-x+C$		
23. 답 x^5-x^2+2x+C		24. 답 ④	25. 답 ②
26. 답 100	27. 답 ③	28. 답 ③	29. 답 ①
30. 답 ⑤	31. 답 26	32. 답 ②	33. 답 ②
34. 답 ①	35. 답 ⑤	36. 답 ③	37. 답 ①
38. 답 ②	39. 답 ③	40. 답 ②	41. 답 ①
42. 답 ⑤	43. 답 ④	44. 답 ③	45. 답 ⑤
46. 답 24	47. 답 ③	48. 답 ②	49. 답 ①
50. 답 ③	51. 답 ③	52. 답 ②	53. 답 ④
54. 답 ⑤	55. 답 30	56. 답 ④	57. 답 3
58. 답 ④	59. 답 ②	60. 답 ③	61. 답 14
62. 답 ②	63. 답 ①	64. 답 ①	65. 답 ⑤
66. 답 16	67. 답 22	68. 답 30	69. 답 ④
70. 답 420	71. 답 ⑤	72. 답 ③	73. 답 ①
74. 답 ③	75. 답 ③	76. 답 17	77. 답 2
78. 답 ③	79. 답 ③	80. 답 ②	81. 답 ⑤
82. 답 ③	83. 답 ②	84. 답 ②	85. 답 ③
86. 답 ③	87. 답 ②	88. 답 ③	89. 답 ⑤
90. 답 ③	91. 답 16	92. 답 ⑤	93. 답 ⑤
94. 답 ③	95. 답 ④	96. 답 ①	97. 답 2
98. 답 ③	99. 답 ①	100. 답 ④	101. 답 ②
102. 답 ③	103. 답 15	104. 답 ④	105. 답 4
106. 답 ⑤	107. 답 ①	108. 답 7	109. 답 ③
110. 답 ⑤	111. 답 ⑤	112. 답 ③	113. 답 ⑤
114. 답 ④	115. 답 2	116. 답 ④	117. 답 ④
118. 답 ①	119. 답 ②	120. 답 12	121. 답 ①
122. 답 ②	123. 답 ④	124. 답 ③	125. 답 ⑤
126. 답 ④	127. 답 ⑤	128. 답 ①	129. 답 ②

1. 답 ④

[해설]

$F'(x)=f(x)$에서

$F(x)=\int(2x+1)dx$

$\quad =x^2+x+C$

이때, $F(1)=2+C=3$에서

$\quad C=1$

즉, $F(x)=x^2+x+1$이므로

$\quad F(-1)=(-1)^2-1+1=1$

2. 답 ④

[해설]

$f'(x)=2x+4$에서

$f(x)=\int(2x+4)dx$

$\quad =x^2+4x+C$

이때, $f(x)=(x+2)^2+C-4$이고 최솟값은 $x-2$일 때 4이므로

$C-4=4$

$\therefore\ C=8$

즉, $f(x)=x^2+4x+8$이므로

$\quad f(-2)=(-2)^2+4\cdot(-2)+8=4$

3. 답 ②

$\int f(x)dx=xf(x)-2x^3-x^2$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}(xf(x)-2x^3-x^2)$

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2-2x,\ xf'(x)=6x^2+2x$

$f'(x)=6x+2$

$\therefore\ f(x)=\int(6x+2)dx=3x^2+2x+C$

이때, $f(1)=8$이므로 $f(1)=5+C=8$

$\therefore\ C=3$

즉, $f(x)=3x^2+2x+3$이므로

$f(-1)=3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+3=4$

4. 답 ⑤

[해설] $\int\{3f(x)g(x)+1\}dx=3x^2+10x+C$에서 부정적분의 정의에 의하여 $(3x^2+10x+C)'=3f(x)g(x)+1$이므로

$6x+10=3f(x)g(x)+1,\ 3f(x)g(x)=6x+9$

$\therefore f(x)g(x)=2x+3$

$\therefore f(1)g(1)=2\cdot1+3=5$

5. 답 42

[해설] $\int g(x)dx=2x^2f(x)+C$에서

부정적분의 정의에 의하여

$g(x)=\{2x^2f(x)+C\}'=4xf(x)+2x^2f'(x)$이므로

$g(3)=12f(3)+18f'(3)$

$\quad =12\cdot2+18\cdot1=42$

6. 답 ④

[해설] $f'(x)=g'(x)$이므로

$f(x)-g(x)=C$ (C는 상수)

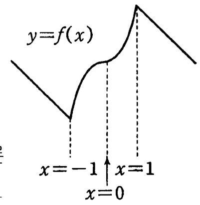
$f(x)=2,\ g((0)=1$이므로

$f(0)-g(0)=2-1=1=C$

$\therefore f(1)-g(1)=C=1$

7. 답 ④

[해설] ㄱ. $f(x)=\begin{cases}-x+C_1 & (x>1)\\ \frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1<x<1)\\ -x+C_3 & (x<-1)\end{cases}$



이므로 연속함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다. 따라서, 함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.(참)

ㄴ. ㄱ에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이 아니므로 $f(x)\neq f(-x)$(거짓)

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프에서 $f(1)>f(0)$이므로 $f(0)=0$이면 $f(1>0)$이다.(참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

8. 답 ③

[해설]

$F(x)=\int(x^2-6x+2)dx=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x+C$ (C는 상수)

$F(x)$는 $f'(x)=2x-6$으로 나누어 떨어지므로

$F(3)=0$에서 $9-27+6+C=0\quad \therefore C=12$

$\therefore F(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x+12$

$F(x)=0$에서 $x^3-9x^2+6x+36=0$

3	1	−9	6	36
		3	−18	−36
	1	−6	−12	0

$(x-3)(x^2-6x-12)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=3\pm\sqrt{21}$

따라서, $\alpha,\ \gamma$는 방정식 $x^2-6x-12=0$의 두근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\gamma=6,\ \alpha\gamma=-12$

$\therefore \alpha^2+\gamma^2=(\alpha+\gamma)^2-2\alpha\gamma=36+24=60$

9. 답 ②

[해설] $f'(x)+g(x)=3$이므로

$f(x)+g(x)=\int 3dx=3x+C_1$ (C는 상수)

$f(0)+g(0)=2-1=1$이므로 $C_1=1$

$\therefore f(x)+g(x)=3x+1 \quad \cdots ㉠$

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=4x+3$에서

$\{f(x)g(x)\}' = 4x+3$이므로

$f(x)g(x) = \int (4x+3)dx = 2x^2+3x+C_2$ (C_2는 상수)

$f(0)g(0) = 2 \cdot (-1) = -2$이므로 $C_2 = -2$

$\therefore f(x)g(x) = 2x^2+3x-2 = (x+2)(2x-1)$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=x+2$, $g(x)=2x-1$

또는 $f(x)=2x-1$, $g(x)=x+2$

그런데 $f(0)=2$, $g(0)=-1$이므로

$f(x)=x+2$, $g(x)=2x-1$

$\therefore f(2)+g(1) = 4+1 = 5$

10. 답 ⑤

[해설] $f(x)=(x-1)^2Q_1(x)+1$, $f(x)=(x+1)^2Q_2(x)-1$ 이라 하면

$f(x)-1=(x-1)^2Q_1(x)$ … ㉠

$f(x)+1=(x+1)^2Q_2(x)$ … ㉡

㉠에서 $f'(x)=2(x-1)Q_1(x)+(x-1)^2Q_1'(x)$

㉡에서 $f'(x)=2(x-1)Q_2(x)+(x-1)^2Q_2'(x)$

즉, $f'(x)=k(x+1)(x-1)$ ($k\neq 0$인 실수)로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int k(x+1)(x-1)dx$

$= k\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)+C$ (C는 상수)

한편, $f(1)=1$, $f(-1)=-1$이므로

$f(1) = -\frac{2}{3}k+C = 1$, $f(-1)=\frac{2}{3}k+C=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $k=-\frac{3}{2}$, $C=0$

$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x$, $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$

$\therefore f(0)+f'(0) = \frac{3}{2}$

11. 답 ③

[해설]

$\int \{-f(x)+3g(x)\}dx = x+2$ 에서

$-\int f(x)dx + 3\int g(x)dx = x+2$ …… ㉠

$\int \{f(x)-2g(x)\}dx = x^2-1$ 에서

$\int f(x)dx - 2\int g(x)dx = x^2-1$ …… ㉡

㉡$\times 3+$㉠$\times 2$를 하면

$\int f(x)dx = 3x^2+2x+1$

12. 답 ③

[해설]

$f(x) = \int (x-1)(x-2)dx$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-2)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{f'(x)} = \lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{(x-1)(x-2)}$

$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}$

$= \lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-2}$

$=-3$

13. 답 ③

[해설]

$\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x)$

$= f(x) = 3x^2-2x-3$

$g(x) = \int f(x)dx$

$= \int (3x^2-2x-3)dx$

$= x^3-x^2-3x+C$

이때, $g(0)=C=3$ 이므로

$g(x)=x^3-x^2-3x+3$

$\therefore\ g(1)=0$

14. 답 ⑤

[해설]

$f(x) = \int (x^2-2x+4)dx$에서 $f'(x)=x^2-2x+4$

$\lim_{h\to0}\frac{f(n+nh)-f(n)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(n+nh)-f(n)}{nh}\times n$

$=nf'(n)$

$=n(n^2-2n+4)$

$\therefore \sum_{n=1}^{6}a_n = \sum_{n=1}^{6}(n^3-2n^2+4n)$

$=\left(\frac{6\cdot7}{2}\right)^2 - 2\times\frac{6\cdot7\cdot13}{6}+4\times\frac{6\cdot7}{2}$

$=441-182+84$

$=343$

15. 답 14

[해설]

$g(x) = \int xf(x)dx$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x) = xf(x)$

$f(x)+g(x) = \int (x^4+x^3-12x^2-10x-15)dx$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+g'(x) = x^4+x^3-12x^2-10x-15$

$f'(x)+xf(x) = x^4+x^3-12x^2-10x-15$

이때, $f(x)$를 n차 다항함수라고 하면 좌변은 $(n+1)$차이고 변은 사차이므로

$n=3$

즉, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$(3ax^2+2bx+c)+x(ax^3+bx^2+cx+d)$

$=ax^4+bx^3+(3a+c)x^2+(2b+d)x+c$

$= x^4 + x^3 - 12x^2 - 10x - 15$ …… ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로

$a = 1,\ b = 1,\ c = -15,\ d = -12$

즉, $f(x) = x^3 + x^2 - 15x - 12$이므로

$f(-2) = -8 + 4 + 30 - 12 = 14$

16. 답 ②

[해설]

$$\frac{d}{dx}\left\{\int (ax^2 + 6x + b)dx\right\}$$

$= ax^2 + 6x + b = 2x^2 + 6x + 2$ …… ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로

$a = 2,\ b = 2$

$\therefore a + b = 4$

17. 답 ①

[해설]

ㄱ. $\frac{d}{dx}\left(\int \sqrt{2}\, dx\right) = \frac{d}{dx}(\sqrt{2}x + C) = \sqrt{2}$ (참)

ㄴ. $\int \left(\frac{d}{dx}\sqrt{2}\right)dx = \int 0dx = C$ (거짓)

ㄷ. $\int \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}x + C,\ \int \sqrt{2}\, dy = \sqrt{2}y + C$에서

$\int \sqrt{2}x dx$는 x에 대한 식이고 $\int \sqrt{2}dy$는 y에 대한 식이므로

$\int \sqrt{2}\, dx \neq \int \sqrt{2}\, dy$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

18. 답 ④

[해설] $\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3 + x - 2)\right\}dx = x^3 + x + \mathrm{C}$ (C 는 상수),

$\frac{d}{dx}\left\{\int (3x^2 - 2x)dx\right\} = 3x^2 - 2x$이므로 $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + \mathrm{C}$

$f(x) = 1$이므로 $\mathrm{C} = 1$

$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$

$\therefore f(1) = 1 + 3 - 1 + 1 = 4$

19. 답 ④

[해설]

$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = 4x$ 에서

$f(x) + g(x) = 2x^2 + C_1$ …… ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = 4x^3 - 8x + 12$ 에서

$f(x)g(x) = x^4 - 4x^2 + 12x + C_2$ …… ㉡

㉠에서

$f(0) + g(0) = C_1 = 0$

$\therefore\ f(x) + g(x) = 2x^2$

㉡에서

$f(0)g(0) = C_2 = -9$

$\therefore\ f(x)g(x) = x^4 - 4x^2 + 12x - 9$

이때,

$f(x)g(x) = x^4 - 4x^2 + 12x - 9$

$= (x-1)(x+3)(x^2 - 2x + 3)$

$= (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x + 3)$

이므로

$f(x) = x^2 + 2x - 3,\ g(x) = x^2 - 2x + 3$

$\therefore\ f(x) - g(x) = 4x - 6$

$\therefore\ f(10) - g(10) = 4 \times 10 - 6 = 34$

20. 답 ④

[해설] (좌변)$= \int\left[\frac{d}{dx}\{f(x) + 2x^2 - kx + 4\}\right]dx$

$= f(x) + 2x^2 - kx + \mathrm{C}$ (C는 상수)

(우변)$= \frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{10}\int_0^x (t + n^2)dt\right\}$

$= \sum_{n=1}^{10}\left\{\frac{d}{dx}\int_0^x (t + n^2)dt\right\}$

$= \sum_{n=1}^{10}(x + n^2) = \sum_{n=1}^{10}x + \sum_{n=1}^{10}n^2$

$= 10x + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6}$

$= 10x + 385$

이므로 주어진 등식은 $f(x) + 2x^2 - kx + \mathrm{C} = 10x + 385$

$\therefore f(x) = -2x^2 + (k+10)x + 385 - \mathrm{C}$

$= -2\left(x^2 - \frac{k+10}{2}x\right) + 385 - \mathrm{C}$

함수 $f(x)$가 $x = 3$에서 최댓값을 가지므로

$\frac{k+10}{4} = 3$ $\therefore k = 2$

21. 답 ①

[해설]

$\int (x+1)(x^2 - x + 1)dx + \int (x-1)(x^2 + x + 1)dx$

$= \int (x^3 + 1)dx + \int (x^3 - 1)dx$

$= \int 2x^3 dx = \frac{1}{2}x^4 + C$

22. 답 $\frac{1}{3}x^3 - x + C$

[해설]

$\int (x-1)(x+1)dx = \int (x^2 - 1)dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - x + C$

23. 답 $x^5 - x^2 + 2x + C$

[해설]

$\int (3x^3 - x^2 + 2)dx + \int (5x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x)dx$

$= \int \{(3x^3 - x^2 + 2) + (5x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x)\}dx$

$= \int (5x^4 - 2x + 2)dx$

$= x^5 - x^2 + 2x + C$

24. 답 ④

[해설] $f(x) = \int 1dx + 2\int x dx + 3\int x^2 dx + \cdots + n\int x^{n-1}dx$

$= x + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + \cdots + n \cdot \frac{1}{n}x^n + C$

$= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + 5$

$f(1) = 11$이므로 $n + 5 = 11$에서 $n = 6$

25. 답 ②

[해설]

$F(x) = \int (1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n \cdot x^{n-1})dx$

$= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + C$ (C는 적분상수)

$F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} + C$

$= \dfrac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}} + C$

$= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} + C$

$\therefore \lim_{n\to\infty} F\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} + \lim_{n\to\infty} C = \frac{1}{2} + C$

$\frac{1}{2} + C = \frac{2}{3}$에서 $C = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\therefore F(0) = C = \frac{1}{6}$

26. 답 100

[해설]

$f(x) = \int \sin^2 x dx + \int \cos^2 x dx$

$= \int (\sin^2 x + \cos^2 x)dx$

$= \int 1dx = x + C$

이때, $f(10) = 10$이므로

$10 + C = 10$

$\therefore\ C = 0$

즉, $f(x) = x$이므로

$f(100) = 100$

27. 답 ③

[해설]

$f(x) = \int (1 - 2\sin^2 x)dx - \int 2\cos^2 x dx + \int \frac{x^4}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx$

$= \int \{1 - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)\}dx + \int \frac{x^4 - 1}{x^2+1}dx$

$= \int (-1)dx + \int (x^2 - 1)dx$

$= \int (x^2 - 2)dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - 2x + C$ (C는 상수)

$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + C = \frac{1}{3}$이므로 $C = 2$

$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 2$

$\therefore f(3) = 9 - 6 + 2 = 5$

28. 정답 ③

$g(-x) = -g(x)$이고

$h(x) = \int f(x)dx + \int g(-x)dx$

$= \int \{f(x) + g(-x)\}dx = \int \{f(x) - g(x)\}dx$ 이므로

$f(x) + g(-x) = \frac{4x^2+8}{x^2+2} - \frac{4x^3+8x}{x^2+2}$

$= -\frac{4x^3 - 4x^2 + 8x - 8}{x^2+2}$

$= -\frac{(x^2+2)(4x-4)}{x^2+2} = -4x + 4$

$\therefore\ h(x) = \int (-4x+4)dx = -2x^2 + 4x + C$

$\therefore\ h(4) - h(2) = (-2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + C) - (-2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + C) = -16$

29. 답 ①

[해설] $F(x) = xf(x) + 2x^3 - x^2 + 1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = f(x) + xf'(x) + 6x^2 - 2x$

$xf'(x) = -6x^2 + 2x$

$f'(x) = -6x + 2$

$f(x) = \int f'(x)dx = -3x^2 + 2x + C$ (C는 상수)

$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2}$의 극한값이 존재하고 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이여야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2} f(x) = -12 + 4 + C$에서 $C = 8$

$\therefore f(x) = -3x^2 + 2x + 8$

$\therefore f(1) = -3 + 2 + 8 = 7$

30. 답 ⑤

[해설]

$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$

$= (x+2)^6 + (x-2)^6$

$= \sum_{r=0}^{6} {}_6C_r x^{6-r} \cdot 2^r + \sum_{r=0}^{6} {}_6C_r x^{6-r} \cdot (-2)^r$

$= \sum_{r=0}^{6} \left\{{}_6C_r x^{6-r} \cdot 2^r + {}_6C_r x^{6-r} \cdot (-2)^r\right\}$

$= \sum_{r=0}^{3} 2 \cdot {}_6C_r x^{6-2r} \cdot 2^{2r}$

$= \sum_{r=0}^{3} \boxed{{}_6C_{2r} x^{6-2r} \cdot 2^{2r+1}}$

$\therefore F(x)=\sum_{r=0}^{3} {}_6C_{2r}\cdot \frac{1}{7-2r}x^{7-2r}\cdot 2^{2r+1}+C$ (C는 적분상수)

따라서 $F(x)$의 x^3의 계수는 ${}_6C_4\cdot \frac{1}{3}\cdot 2^5=\boxed{160}$ 이고, x^5의 계수는

${}_6C_2\cdot \frac{1}{5}\cdot 2^3=\boxed{24}$ 이다.

$\therefore$ (가)${}_6C_{2r}x^{6-2r}\cdot 2^{2r+1}$, (나)160, (다)24

31. 답 26

[해설]

$F(x)=\int f(x)dx$

$=\int (4x^2-2x-7)dx$ (C_1은 적분상수)

$=\frac{4}{3}x^3-x^2-7x+C_1$

$G(x)=\int g(x)dx$

$=\int (-2x^2+4x+5)dx$

$=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+5x+C-2$ (C_2는 적분상수)

$H(x)=F(x)-G(x)$라 하면

$H(x)=\left(\frac{4}{3}x^3-x^2-7x+C_1\right)-\left(-\frac{2}{3}x^3+2x^2+5x+C_2\right)$

$=2x^3-3x^2-12x+(C_1-C_2)$

$H'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$H'(x)=0$에서 $x=-1$또는 $x=2$

이때, 두 함수 $y=F(x)$, $y=G(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $F(x)-G(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 (극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 한다.

$H(-1)H(2)=\{(C_1-C_2)+7\}\{(C_1-C_2)-20\}<0$

$-7<C_1-C_2<20$

$\therefore -7<F(0)-G(0)<20$

따라서 정수 $F(0)-G(0)$은 $-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 19$ 로 모두 26개다.

32. 답 ②

[해설]

$f'(x)=(x-1)|x|-1$ 에서

$$f'(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & (x\ge 0 \\ -x^2+x-1 & (x<0) \end{cases}$$

이므로

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+C_1 & (x\ge 0) \\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

이때, $f(x)$는 연속함수이고 $f(0)=0$이므로

$C_1=C_2=0$

$\therefore\ f(6)+f(-6)$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot 6^3-\frac{1}{2}\cdot 6^2-6\right)+\left\{-\frac{1}{3}\cdot(-6)^3+\frac{1}{2}\cdot(-6)^2-(-6)\right\}$

$=72+72=144$

33. 답 ②

[해설] $f'(x)=\begin{cases} 1 & (x<0) \\ 0 & (0\le x<1) \\ -1 & (x\ge 1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} x+C_1 & (x<0) \\ C_2 & (0\le x<1) \\ -x+C_3 & (x\ge 1) \end{cases}$

$f(-1)=1$이므로 $-1+C_1=1$에서 $C_1=2$

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $C_1=C_2$

$\therefore C_2=2$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $C_2=-1+C_3$

$\therefore C_3=3$

따라서, $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<0) \\ 2 & (0\le x<1) \\ -x+3 & (x\ge 1) \end{cases}$의 그래프의 개형은 ②이다.

34. 답 ①

[해설]

$f'(x)=|x-3|$에서

(i) $x<3$일 때

$f(x)=\int(-x+3)dx=-\frac{1}{2}x^2+3x+C_1$ (C_1은 적분상수)

(ii)$x\ge 3$일 때

$f(x)=\int(x-3)dx=\frac{1}{2}x^2-3x+C_2$ (C_2는 적분상수)

이때, $f(x)$는 연속함수이므로 $\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)$에서

$-\frac{9}{2}+9+C_1=\frac{9}{2}-9+C_2$

$\therefore C_1-C_2=-9$

$\therefore f(2)-f(4)=\left(-\frac{1}{2}\cdot 2^2+3\cdot 2+C_1\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2-3\cdot 4+C_2\right)$

$=(4+C_1)-(-4+C_2)$

$=8+(C_1-C_2)$

$=-1$

35. 답 ⑤

[해설]

$f'(x)=\begin{cases} a(x+3)(x+1) & (x<0) \\ b(x-1) & (x\ge 0) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} a\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x\right)+C_1 & (x<0) \\ b\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)+C_2 & (x\ge 0) \end{cases}$ (C_1, C_2는 적분상수)

함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$에서 $C_1=C_2$

$\therefore f(0)=C_1=C_2$

(i) $x<0$일 때, 방정식 $f(x)-f(0)=0$에서

$a\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x\right)+C_1-C_1=0$

$\frac{1}{3}ax(x+3)^2=0$

$\therefore x=-3$ ($\because x<0$)

(ii) $x\ge 0$일 때, 방정식 $f(x)-f(0)=0$에서

$b\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)+C_2-C_2=0$

$\frac{1}{2}bx(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에 의하여 방정식 $f(x)-f(0)=0$의 모든 근의 합은

$-3+0+2=-1$

36. 답 ③

점(x, y)에서의 접선의 기울기가 $3x^2-2x+1$이므로

$f'(x)=3x^2-2x+1$

$\therefore f(x)=\int(3x^2-2x+1)dx$

$=x^3-x^2+x+C$

이 곡선이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$f(2)=2^3-2^2+2+C=C+6=-1$

$\therefore C=-7$

즉, $f(x)=x^3-x^2+x-7$이므로

$f(1)=1^3-1^2+1-7=-6$

37. 답 ①

[해설]

$f'(x)=\tan\theta(x)=-2x+4$ 이므로

$f(x)=\int(-2x+4)dx$

$=-x^2+4x+C$

이때, $f(2)=-2^2+4\cdot 2+C=2$에서

$C=-2$

즉, $f(x)=-x^2+4x-2$이므로

$f(4)=-4^2+4\cdot 4-2=-2$

38. 답 ②

[해설] $f'(x)=-2x+a$이므로

$f(x)=\int(-2x+a)dx$

$=-x^2+ax+\mathrm{C}$ (C는 상수)

이차곡선 $y=f(x)$의 y절편이 -1이므로 $\mathrm{C}=-1$

$\therefore f(x)=-x^2+ax-1$

한편, 이차곡선 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$f(2)=-4+2a-1=1$ $\therefore a=3$

따라서, $f(x)=-x^2+3x-1$이므로 $f(3)=-9+9-1=-1$

39. 답 ③

[해설]

$\int xf(x)dx=4x^4+3x^3+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=16x^3+9x^2+4x$

$\therefore f(x)=16x^2+9x+4$

따라서 $f'(x)=32x+9$이므로 점 $(2, f(2))$에서 접선의 기울기는

$f'(2)=32\times 2+9=73$

40. 답 ②

[해설] 접선의 기울기가 $3x(x-2)$인 곡선을 $y=h(x)$라 하면

$h'(x)=3x(x-2)$

$\therefore h(x)=\int(3x^2-6x)dx=x^3-3x^2+\mathrm{C}$ (C는 상수)

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

곡선 $y=h(x)$가 x축에 접하므로 극댓값이 0이거나 극솟값이 0이다.

(i) 극댓값이 0일 때

$h(0)=\mathrm{C}=0$ $\therefore h(x)=x^3-3x^2$

(ii) 극솟값이 0일 때

$h(2)=8-12+\mathrm{C}=0$에서 $\mathrm{C}=4$

$\therefore h(x)=x^3-3x^2+4$

따라서, $f(x)=x^3-3x^2+4$, $g(x)=x^3-3x^2$또는

$f(x)=x^3-3x^2$, $g(x)=x^3-3x^2+4$이므로

$|f(x)-g(x)|=4$

41. 답 ①

[해설]

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ 에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+xh}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{x+\frac{f(h)}{h}\right\}$

이때, $f(0)=0$이므로

$f(x)=xg(x)$ (단, $g(x)$는 다항함수)

라 하면

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left\{x+\frac{f(h)}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{x+\frac{hg(h)}{h}\right\}$

$=x+g(0)$

$\therefore f(x)=\int\{x+g(0)\}dx$

$=\frac{1}{2}x^2+g(0)x$ ($\because f(0)=0$)

또한, $f(2)=2+2g(0)=4$이므로

$g(0)=1$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖는다.

42. 답 ⑤

[해설]

주어진 식의 양변에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0),\ g(0)=g(0)-g(0)$

$\therefore f(0)=0,\ g(0)=0$

양변에 $y=-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x),\ g(0)=g(x)-g(-x)$

$\therefore f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$

따라서 다항함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄱ. $\int_{-a}^{b} f(x)dx=\int_{-a}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx$

$=0+\int_{a}^{b} f(x)dx$

$=\int_{a}^{b} f(x)dx$ (참)

ㄴ. $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

따라서 $y=h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx=\int_{-a}^{a} h(x)dx=0$ (참)

ㄷ. $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F(-x)=F(x)$이므로

$\int_{-a}^{-b} f(x)dx=[F(x)]_{-a}^{-b}$

$=F(-b)-F(-a)$

$=F(b)-F(a)$

$=\int_{a}^{b} f(x)dx$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

43. 답 ④

[해설]

$f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy$에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)-0$

$\therefore f(0)=0$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-3xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-3xh}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-3x$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-3x$

$=f'(0)-3x$

이때, $f'(0)=k$라 하면

$f'(x)=-3x+k$ …… ㉠

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(-3x+k)dx$

$=-\frac{3}{2}x^2+kx+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=-\frac{3}{2}x^2+kx$ …… ㉡

$f'(4)=f(4)$이므로 ㉠, ㉡에서

$-12+k=-24+4k$

$\therefore k=f'(0)=4$

44. 답 ③

[해설] $f'(x)=a(x-2)(x+2)$ $(a<0)$이라 하면 $f'(0)=3$이므로

$a=-\frac{3}{4}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=-\frac{3}{4}\int(x^2-4)dx=-\frac{1}{4}x^3+3x$ $(\because f(0)=0)$

이 때, 삼차방정식 $-\frac{1}{4}x^3+3x=kx$, 즉 $x\{x^2+4(k-3)\}=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+4(k-3)=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$k\neq 3$이고 $\frac{D}{4}=0-4(k-3)>0$이여야 하므로 $k<3$

45. 답 ⑤

[해설] $f'(x)=ax(x-4)$ $(a>0)$라 하면

$f(x)=\int f'(x)dx+\int(ax^2-4ax)dx$

$=\frac{a}{3}x^3-2ax^2+\mathrm{C}$ (C는 상수)

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a}{3}x^3-2ax^2+\mathrm{C}}{x^3}=\frac{a}{3}$ 이므로

$\frac{a}{3}=1$에서 $a=3$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+\mathrm{C}$

따라서, $f(x)$의 이차항의 계수는 -6이다.

46. 답 24

[해설]

조건 (가)에서

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(3x^2+2x-5)dx$

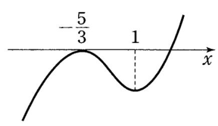
$=x^3+x^2-5x+C$

조건 (나)에서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 극댓값 또는 극솟값이 0이다.

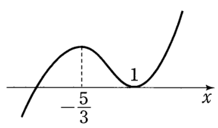
$f'(x)=(3x+5)(x-1)=0$에서

$x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

조건 (다)를 만족하는 그래프는 [그림 2]이므로

$f(1)=-3+C=0$ $\therefore C=3$

$\therefore f(x)=x^3+x^2-5x+3$

$\therefore f(3)=3^3+3^2-5\cdot 3+3=24$

47. 답 ③

[해설]

$f'(x)=ax(x-1)(x+1)$

$\quad =ax^3-ax\,(a>0)$

이므로

$f(x)=\int(ax^3-ax)dx$

$\quad =\frac{a}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2+C$

ㄱ. $f(-x)=\frac{a}{4}\cdot(-x)^4-\frac{a}{2}\cdot(-x)^2+C$

$\quad =\frac{a}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2+C=f(x)$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=-1$과 $x=1$에서 극솟값을 가진다.

따라서 $f(0)f(1)<0$ 이면 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. 극댓값이 2이므로

$f(0)=C=2$

또한, $f(2)=4a-2a+C=2a+2=3$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

즉, $f(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4}x^2+2$이므로

$f(-1)=f(1)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+2=\frac{15}{8}$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

48. 답 ②

[해설] $S_n=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

49. 답 ①

폐구간 $[0,\ 2]$를 n등분하면 각 등분점의 x좌표는 차례로

$\frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \frac{6}{n},\ \cdots,\ \frac{2n}{n}$

이고 각 직사각형의 가로의 길이는 모두 $\frac{2}{n}$이다.

또한, 폐구간 $[0,\ 2]$를 n등분하면 각 등분점의 x좌표는 차례로

$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots,\ \frac{2n}{n}$

이고 각 직사각혀의 가로의 길이는 모두 $\frac{1}{n}$이다.

따라서 n개의 직사각형의 넓이의 합을 S_n, $2n$개의 직사각형의 넓이의 합을 S_{2n}이라 하면

$S_n=\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^3=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}$

$S_{2n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^3=\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}$

$\therefore\ S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{\frac{2k}{n}}\right)^3\cdot\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(\boxed{\frac{k}{n}}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$

$\therefore$ (가) : $\frac{2k}{n}$, (나) : $\frac{k}{n}$

50. 답 ③

[해설] 폐구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 각 등분점의 x좌표는 차례로

$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots,\ \frac{n}{n}$

이고 각 직사각형의 가로의 길이는 모두 $\frac{1}{n}$이다.

$\therefore\ S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$

$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$\therefore\ A_5=S_5-\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{6\cdot 11}{6\cdot 25}-\frac{1}{3}=\frac{8}{75}$

51. 답 ③

[해설] $r_k=\boxed{\sqrt{r^2-\left(\frac{k}{n}r\right)^2}}$

이때, r_k를 밑면의 반지름의 길이로 하고 높이가 $\frac{r}{n}$인 원기둥의 부피를 V_k라 하면

$V_k=\pi {r_k}^2\cdot\frac{r}{n}=\pi\left(r^2-\frac{k^2}{n^2}r^2\right)\frac{r}{n}$

$=\frac{\pi r^3}{n}\cdot\left(\boxed{1-\frac{k^2}{n^2}}\right)$

따라서 n개의 원기둥의 부피의 합을 W_n이라 하면

$W_n=\sum_{k=1}^{n}V_k=\frac{\pi r^3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)$

$=\frac{\pi r^3}{n}\left\{n-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right\}$

$=\boxed{\pi r^3}\cdot\left\{1-\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right\}$

52. 답 ②

[해설] 다음 그림에서 알 수 있듯이 $\mathrm{A}-\mathrm{B}$는 그림 (가)의 가장 큰 직사각형의 넓이와 그림 (나)의 가장 작은 직사각형의 넓이의 차와 같다.

$f(x)=x^2+1$이라 하면

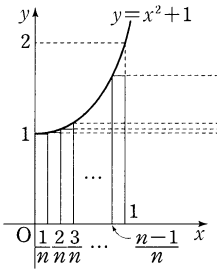


그림 (나)

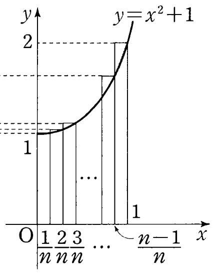


그림 (가)

$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{1}{n}\cdot f(1)-\frac{1}{n}\cdot f(0)=\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\le 0.15$

$\therefore n\ge 6.666\cdots$

따라서, 구하는 n의 최솟값은 7이다.

53. 답 ④

[해설] 구간 $[0,\ 2]$를 n등분하면 양 끝점과 각 분점의 x좌표의 값은 차례로

$0,\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \frac{6}{n},\ \cdots,\ \frac{2n-2}{n},\ 2$

이므로 직사각형의 넓이의 합을

$$S_n=\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\left(\frac{6}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^3$$
$$=\frac{2}{n}\left(\frac{2\cdot 1}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\left(\frac{2\cdot 2}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\left(\frac{2\cdot 3}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^3$$
$$=\frac{2\cdot 2^3}{n^4}(1^3+2^3+3^3+\cdots n^3)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{16k^3}{n^4}=\frac{16}{n^4}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

따라서, 구하는 넓이 S는

$S=\lim_{n\to\infty}S_n=4$

54. 답 ⑤

[해설] 직사각형의 세로의 길이는 모두 $\frac{3}{n}$이고, 가로의 길이는 위에서 부터 $\frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \frac{6}{n},\ \cdots,\ \frac{2n}{n}$ 이므로 이 들의 넓이의 합은

$$\mathrm{S}_n=\frac{3}{n}\left(\frac{2}{n}+\frac{4}{n}+\frac{6}{n}+\cdots+\frac{2n}{n}\right)$$
$$=\frac{6}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)$$
$$=\frac{6}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{3(x+1)}{n}$$

$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$이므로

$\mathrm{S}_n-\mathrm{S}=\frac{3(n+1)}{n}-3\le\frac{1}{500}$에서 $\frac{3}{n}\le\frac{1}{500}$ $\quad\therefore n\ge 1500$

따라서, 자연수 n의 최솟값은 1500이다.

55. 답 30

[해설] $\overline{\mathrm{AB}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}}=\frac{3k}{n}$

$\overline{\mathrm{BC}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{BB}_k}=\frac{2k}{n}$, 즉 $\mathrm{S}_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{3k}{n}\cdot\frac{2k}{n}=3\left(\frac{k}{n}\right)^2$

$$\therefore 30\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{S}_k=30\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}3\left(\frac{k}{n}\right)^2$$
$$=90\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$
$$=90\int_0^1 x^{2dx}$$
$$=90\left[\frac{x^3}{x}\right]_0^1=30$$

56. 답 ④

[해설] ㄱ. $b=a+1$이므로 $b-a=1$

$g(n)=\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$에서

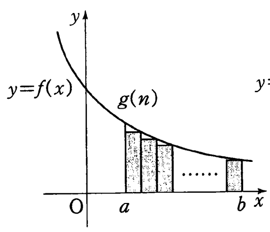
$g(1)=f(a+1)=f(b)$이고

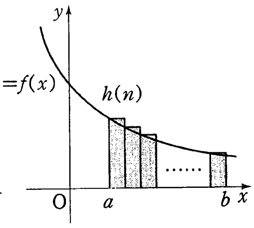
$h(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$에서

$h(1)=f(a)$이므로

$g(1)-h(1)=f(b)-f(a)$ (참)

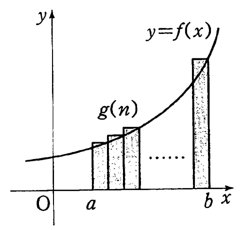
ㄴ. (i) $y=f(x)$가 감소함수일 때,

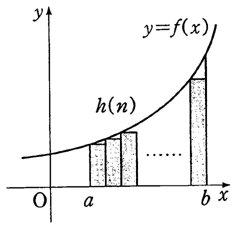




위의 그림에서 $h(n)>\int_a^b f(x)dx>g(x)$

(ii) $y=f(x)$가 증가함수 일 때,





위의 그림에서 $h(n)<\int_a^b f(x)dx<g(x)$ (거짓)

ㄷ. $y=f(x)$는 감소함수이므로

$h(20)>g(2)$이고 $g(20)>g(10)$

$\therefore h(2))>g(20)>g(10)$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

57. 답 3

[해설] $\int_{-1}^{1}f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_{-1}^{1}$

$=f(1)-f(-1)=2-f(-1)=-1$

$\therefore\ f(-1)=3$

58. 답 ④

[해설] $a=0,\ b=1$로 놓으면 정적분의 정의에 의하여

$\Delta x=\frac{1-0}{n}=\boxed{\frac{1}{n}}$, $x_k=0+k\Delta x=\boxed{\frac{k}{n}}$

$f(x_k)=(x_k)^2+1=\left(\boxed{\frac{k}{n}}\right)+1$

$\therefore \int_0^1(x^2+1)dx$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\boxed{\frac{k}{n}}\right)+1\right\}\cdot\boxed{\frac{1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2}\right)+1$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}+1$

$=\frac{1}{3}+1=\boxed{\frac{4}{3}}$

59. 답 ②

[해설] 정적분의 정의에 의하여

$S(h)=\int_0^h f(x)dx$

이고 $F'(x)=f(x)$라 하면

$S(h)=\int_0^h f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_0^h=F(h)-F(0)$

$\lim_{h\to0}\frac{S(nh)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{F(nh)-F(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(nh)-F(0)}{nh}\times n=nF'(0)=nf(0)=n$

$\therefore f(0)=1$

60. 답 ③

[해설] $\mathrm{F}(t)=3t^2+3\quad(0\le t\le 8)$이라 하면 비가 온 뒤 3시간 후부터 5시간 후까지 하천의 하류 부분에 유입된 물의 양은 $\mathrm{F}(5)-\mathrm{F}(3)$이다.

$\therefore \mathrm{F}(5)-\mathrm{F}(3)=\int_0^5(3t^2+3)dt-\int_0^3(3t^2+3)dt$

$=\int_3^5(3t^2+3)dt=[t^3+3t]_3^5$

$=(125+15)-(27+9)$

$=104$

61. 답 14

[해설] $\mathrm{A}_1=\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$, $\quad \mathrm{A}_n=\frac{1}{n}f(1)$이므로

$\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f(1)\right\}$

$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right)$

$=\frac{1}{n}\{1+an+(1+a+2b)n^2\}$

$=\frac{7n^2+1}{n^3}$

즉, $a=0$, $1+a+2b=7$이므로 $b=3$

$\therefore f(x)=x^3+3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}\mathrm{A}_k=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$

$=8\int_0^1 xf(x)dx$

$=8\int_0^1 x(x^2+3)dx$

$=8\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$

$=8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=14$

62. 답 ②

[해설]

$\int_0^1(x^2+2x+1)dx-\int_0^1(x^2-2x+1)dx$

$=\int_0^1\{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)\}dx$

$=\int_0^1 4x\,dx=[2x^2]_0^1=2$

63. 답 ①

[해설]

$\int_{-2}^3(4x^3+3x^2-2x-1)dx-\int_2^3(4x^3+3x^2-2x-1)dx$

$=\int_{-2}^3(4x^3+3x^2-2x-1)dx+\int_3^2(4x^3+3x^2-2x-1)dx$

$=\int_{-2}^2(4x^3+3x^2-2x-1)dx$

$=2\int_0^2(3x^2-1)dx$

$=2[x^3-x]_0^2$

$=12$

64. 답 ①

[해설]

$\int_0^{2n}f(x)dx$

$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\ \cdots\ +\int_{2n-2}^{2n}f(x)dx$

$=1+3+5+\ \cdots\ +(2n-1)$

$=n^2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\int_0^{2n}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}=1$

65. 답 ⑤

$f(x)=\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x}(t^2+1)dt$

$=\frac{d}{dx}\left\{2\int_0^x(t^2+1)dt\right\}$

$=2\frac{d}{dx}\int_0^x(t^2+1)dt=2(x^2+1)$

$\therefore\ f(-2)=2\{(-2)^2+1\}=10$

66. 답 16

[해설] $g(x)=(x-3)^3+b$이므로

$g(0)=-a^3+b=0$에서 $b=a^3$ $\cdots$ ㉠

한편, 그래프의 평행이동에 의해

$\int_a^{3a} g(x)dx=\int_0^{2a} g(x+a)dx$이고,

$\int_0^{2a} g(x)dx-\int_0^{2a} f(x)dx$

$=\int_0^{2a} g(x+a)dx-\int_0^{2a} f(x)dx$

$=\int_0^{2a}\{f(x)+b\}dx-\int_0^{2a} f(x)dx$

$=\int_0^{2a} b\ dx=[bx]_0^{2a}=2ab$

$\therefore 2ab=32$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2a^4=32$

$\therefore a^4=16$

67. 답 22

[해설] $\int_0^1 (x^n-x^{n+1})dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$

$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\frac{1}{(n+1)(n+2)}\le\frac{1}{100}$에서

$(n+1)(n+2)\ge 100$

$9\cdot 10<100<10\cdot 11$이므로 $n\ge 9$

$\frac{1}{1000}\le\frac{1}{(n+1)(n+2)}$에서

$(n+1)(n+2)\le 1000$

$31\cdot 32<1000<32\cdot 33$이므로 $n\le 30$

따라서, $9\le x\le 30$이므로 자연수 n의 개수는 22이다.

68. 답 30

[해설]

일차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(9,\ 5)$에 대하여 대칭이므로

$I(1)+I(6)=\int_1^2 f(x)dx+\int_{16}^{17} f(x)dx=10$

$I(2)+I(5)=\int_4^5 f(x)dx+\int_{13}^{14} f(x)dx=10$

$I(3)+I(4)=\int_7^8 f(x)dx+\int_{10}^{11} f(x)dx=10$

$\therefore \sum_{n=1}^{6} I(n)=30$

69. 답 ④

[해설]

(가)에서

$a_1=\int_0^2 (2x+1)dx=[x^2+x]_0^2=6$

(나)에서

$a_{n+1}=\int_0^2 (a_nx+1)dx=\left[\frac{a_n}{2}x^2+x\right]_0^2=2a_n+2$

$a_{n+1}=2a_n+2$에서 $a_{n+1}+2=2(a_n+2)$

따라서 수열 $\{a_n+2\}$는 첫째항이 $a_1+2=6+2=8$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n+2=8\cdot 2^{n-1}=2^{n+2}$

$\therefore a_n=2^{n+2}-2$

$\therefore a_{20}=2^{22}-2$

70. 답 420

[해설]

조건 (나)에서 $\int_{a_n}^0 a_{n+1}dx-\int_{a_{n+2}}^0 a_{n+1}dx=\int_0^{a_{n+2}} xdx-\int_0^{a_n} xdx$

$\int_{a_n}^0 a_{n+1}dx+\int_0^{a_{n+2}} a_{n+1}dx=\int_0^{a_{n+2}} xdx+\int_{a_n}^0 xdx$

$\int_{a_n}^{a_{n+2}} a_{n+1}dx=\int_{a_n}^{a_{n+2}} xdx$

$a_{n+1}[x]_{a_n}^{a_{n+2}}=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{a_n}^{a_{n+2}}$

$a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\frac{1}{2}(a_{n+2}^2-a_n^2)$

$a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\frac{1}{2}(a_{n+2}+a_n)(a_{n+2}-a_n)$

$\therefore a_n+1=\frac{1}{2}(a_{n+2}+a_n)\ (\because a_{n+2}\ne a_n)$

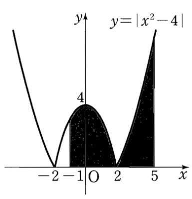
$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 $a_2-a_1=4-2=2$인 등차수열이므로

$\sum_{n=1}^{20} a_n=\frac{20(2\cdot 2+19\cdot 2)}{2}=420$

71. 답 ⑤

$|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & (x\le -2,\ x\ge 2)\\ -x^2+4 & (-2<x<2)\end{cases}$ 이므로



$\int_{-1}^5 |x^2-4|dx=\int_{-1}^2 (4-x^2)dx+\int_2^5 (x^2-4)dx$

$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^5$

$=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-4+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{125}{3}-20\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)$

$=36$

72. 답 ③

[해설]

$$\int_{-1}^{2}(|x|-1)^2\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x-1)^2\,dx+\int_{0}^{2}(x-1)^2\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{0}^{2}(x^2-2x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

73. 답 ①

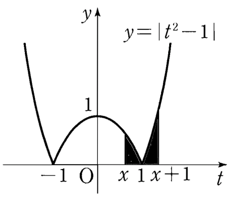
[해설] 구간 $[0,\ 2]$에서 $|x^2(x-1)|=\begin{cases}-x^3+x^2 & (0\le x<1)\\ x^3-x^2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

$$\therefore \int_{0}^{2}|x^2(x-1)|dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-x^3+x^2)dx+\int_{1}^{2}(x^3-x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)+\left(4-\frac{8}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

74. 답 ③

[해설]

함수 $f(x)$ 는 다음 그림에서 어두운 부분의 넓이를 뜻한다.



$$f(x)=\int_{x}^{x+1}|t^2-1|\,dt$$
$$=\int_{x}^{1}\{-(t^2-1)\}\,dt+\int_{1}^{x+1}(t^2-1)\,dt$$
$$=\int_{1}^{x}(t^2-1)\,dt+\int_{1}^{x+1}(t^2-1)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^x+\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^{x+1}$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)$$
$$=\frac{2}{3}x^3+x^2-x+\frac{2}{3}$$

이때, $f'(x)=2x^2+2x-1$ 이므로

$f'(x)=2x^2+2x-1=0$ 에서

$$x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\quad(\because\ 0\le x\le 1)$$

따라서 $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 에서 $f(x)$ 가 극소이면서 최솟값을 가지므로

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ a+b=0$$

75. 답 ③

[해설] 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $f'(x)>0$

구간 $(1,\ 3)$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 $f'(x)<0$

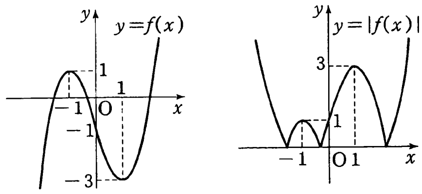
$$\therefore \int_0^3|f'(x)|dx=\int_0^1|f'(x)|dx+\int_1^3|f'(x)|dx$$
$$=\int_0^1 f'(x)dx-\int_1^3 f(x)dx$$
$$=[f(x)]_0^1-[f(x)]_1^3$$
$$=\{f(1)-f(0)\}-\{f(3)-f(1)\}$$
$$=\{1-(-3)\}-\{(-3)-1\}$$
$$=4+4=8$$

76. 답 17

[해설] $f(x)=x^3-3x-1$에서 $f'(x)=3x^2-3$

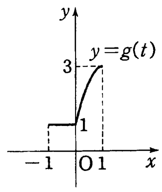
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

이때, $f(1)=-3$, $f(-1)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서, $-1\le x\le t$에서 $|f(x)|$ 의 최댓값 $g(t)$와 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases}1 & (-1\le t\le 0)\\ -t^3+3t+1 & (0\le t\le 1)\end{cases}$$



$$\therefore \int_{-1}^{1}g(t)dt$$
$$=\int_{-1}^{0}1dt+\int_{0}^{1}(-t^3+3t+1)dt$$
$$=[t]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t\right]_0^1$$
$$=1+\left(\frac{-1}{4}+\frac{3}{2}+1\right)=\frac{13}{4}$$
$$\therefore p+q=4+13=17$$

77. 답 2

[해설] (i) $x<0$일 때,

$$f(x)=\int_{-1}^{x}(-t-1)dt=\left[-\frac{1}{2}t^2-t\right]_{-1}^{x}$$
$$=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}-1$$
$$=-\frac{1}{2}(x^2+2x+1)$$
$$=-\frac{1}{2}(x+1)^2$$

(ii) $x\ge 0$일 때,

$f(x)=\int_{-1}^{x}(|t|-1)dt$

$=\int_{-1}^{0}(-t-1)dt+\int_{0}^{x}(t-1)dt$

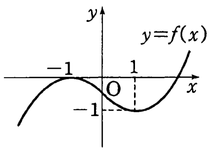
$=\left[-\frac{1}{2}t^2-t\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}t^2-t\right]_{0}^{x}$

$=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)$

$=\frac{1}{2}(x^2-2x-1)$

$=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$

따라서, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의개수는 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같으므로 구하는 서로 다른 실근의 개수는 2개다.



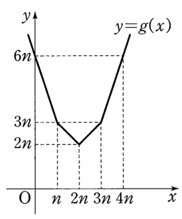
***78.* 답 ③**

[해설]

$g(x)=|x-n|+|x-2n|+|x-3n|$이라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-3x+6n & (x<n)\\ -x+4n & (n\le x<2n)\\ x & (2n\le x<3n)\\ 3x-6n & (x\ge 3n)\end{cases}$$

이므로 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $y=g(x)$의 그래프는 직석 $x=2n$에 대하여 대칭이므로

$f(n)=2\left\{\int_{0}^{n}(-3x+6n)dx+\int_{n}^{2n}(-x+4n)dx\right\}$

$=2\left(\left[-\frac{3}{2}x^2+6nx\right]_{0}^{n}+\left[-\frac{1}{2}x^2+4nx\right]_{n}^{2n}\right)$

$2\left\{\left(-\frac{3}{2}n^2+6n^2\right)+(-2n^2+8n^2)-\left(-\frac{1}{2}n^2+4n^2\right)\right\}$

$=14n^2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{14n^2}{(2n-1)^2}=\frac{7}{2}$

다른풀이

$f(n)=\int_{0}^{4n}g(x)dx$의 값은 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=4n$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$f(n)=2\left\{\frac{1}{2}(3n+6n)\cdot n+\frac{1}{2}(2n+3n)\cdot n\right\}=14n^2$

***79.* 답 ③**

[해설] ㄱ. $a\le x\le b$ 에서 $f(x)>0$ 이므로 $\int_{a}^{b}f(x)dx>0$

즉, $\int_{a}^{b}|f(x)|dx=\int_{a}^{b}f(x)dx$

$\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|=\int_{a}^{b}f(x)dx$

$\therefore \int_{a}^{b}|f(x)|dx=\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|$

ㄴ. $f(x)$ 의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 c라 하면 $a\le x\le c$ 에서 $f(x)\ge 0$, $c<x\le b$ 에서 $f(x)<0$이므로

$\int_{a}^{c}f(x)dx\ge 0,\ \int_{c}^{b}f(x)dx<0$

즉, $\int_{a}^{b}|f(x)|dx=\int_{a}^{c}|f(x)|dx+\int_{c}^{b}|f(x)|dx$

$=\int_{a}^{c}f(x)dx-\int_{c}^{b}f(x)dx$

$\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|=\left|\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx\right|$

$\le\left|\int_{a}^{c}f(x)dx\right|+\left|\int_{c}^{b}f(x)dx\right|$

$=\int_{a}^{c}f(x)dx-\int_{c}^{b}f(x)dx$

$\therefore \int_{a}^{b}|f(x)|dx\ne\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|$

ㄷ. $a\le x\le b$ 에서 $f(x)<0$ 이므로 $\int_{a}^{b}f(x)dx<0$

즉, $\int_{a}^{b}|f(x)|dx=-\int_{a}^{b}f(x)dx$

$\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|=-\int_{a}^{b}f(x)dx$

$\therefore \int_{a}^{b}|f(x)|dx=\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|$

따라서 보기에서 $\int_{a}^{b}|f(x)|dx=\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|$ 를 만족하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

***80.* 답 ②**

$f(x)=\begin{cases}2x+1 & (x\ge 0)\\ -3x^2+2x+1 & (x<0)\end{cases}$ 이므로

$\int_{-2}^{3}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{3}f(x)dx$

$=\int_{-2}^{0}(-3x^2+2x+1)dx+\int_{0}^{3}(2x+1)dx$

$=[-x^3+x^2+x]_{-2}^{0}+[x^2+x]_{0}^{3}$

$=-(8+4-2)+(9+3)$

$=2$

***81.* 답 ⑤**

$f'(x)=\begin{cases}2 & (x>1)\\ -1 & (x<1)\end{cases}$ 이므로 $f(x)=\begin{cases}2x+C_1 & (x>1)\\ -x+C_2 & (x<1)\end{cases}$

이때, $f(x)$ 는 연속함수이고 $f(1)=2$ 이므로

$2+C_1=2,\ -1+C_2=2$

$\therefore\ C_1=0,\ C_2=3$

$\therefore \int_0^4 f(x)\,dx$

$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^4 f(x)\,dx$

$=\int_0^1(-x+3)\,dx+\int_1^4 2x\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^1+[x^2]_1^4=\frac{5}{2}+15=\frac{35}{2}$

82. 답 ③

[해설] (ⅰ) $-2<x<0$일 때, $-1<x+1<1$이므로

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(x+1)^{n-1}}=\frac{x^2}{1-\frac{1}{x+1}}=x(x+1)=x^2+x$

(ⅱ) $0<x<2$일 때, $-1<x+1<1$이므로

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(2-x)}{(x-1)^{n-1}}=\frac{x(2-x)}{1-\frac{1}{x-1}}=\frac{x(2-x)(x-1)}{x-2}$

$=-x(x-1)=-x^2+x$

이 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속이므로

$\lim_{n\to+0} f(x)=\lim_{n\to-0\infty} f(x)=f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$

$\therefore \int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0(x^2+x)\,dx+\int_0^1(-x^2+x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$

83. 답 ②

[해설] $\int_{-1}^2 xf(|x|)dx=\int_{-1}^0 xf(-x)dx+\int_0^2 xf(x)dx$이고,

$y=f(-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$-1\le x\le 0$에서 $f(-x)=1$

$0\le x\le 1$에서 $f(x)=1$

$1\le x\le 2$에서 $f(x)=-x+2$

$\therefore \int_{-1}^2 xf(|x|)dx$

$=\int_{-1}^0 x\,dx+\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(-x^2+2x)dx$

$=\int_{-1}^1 x\,dx+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2$

$=0+\left(-\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}$

84. 답 ②

[해설] $f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ -1 & (0<x\le 1)\\ x-2 & (1<x\le 3)\\ 1 & (x>3)\end{cases}$ 이므로

(ⅰ) $x\le 0$일 때, $F(x)=\int_0^x f(t)dt=0$

(ⅱ) $0<x\le 1$일 때, $F(x)=\int_0^x(-t)dt=-\frac{1}{2}x^2$

(ⅲ) $1<x\le 3$일 때,

$F(x)=\int_0^1(-t)dt+\int_1^x(t-2)dt$

$=\left[-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_1^x$

$=\frac{1}{2}x^2-2x+1=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$

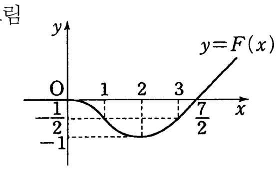
(ⅳ) $x>3$일 때,

$F(x)=\int_0^1(-t)dt+\int_1^3(t-2)dt+\int_3^x 1dt$

$=\left[-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_1^3+[t]_3^x$

$=x-\frac{7}{2}$

따라서, $y=F(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



85. 답 ③

[해설] (i) $x<1$일 때,

$g(x)=\int_{-1}^x(t-1)f(t)dt$

$=\int_{-1}^x(t-1)(-1)dt$

$=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^x$

$=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}$

(ⅱ) $x\ge 1$일 때,

$g(x)=\int_{-1}^x(t-1)f(t)dt$

$=\int_{-1}^1(t-1)(-1)dt+\int_1^x(t-1)(-t+2)dt$

$=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^1+\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_1^x$

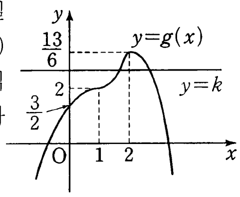
$=-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{17}{6}$

ㄱ. 구간 $(1,\ 2)$에서

$g'(x)=-x^2+3x-2=-(x-1)(x-2)$이고 $g(x)>0$이므로 $g(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=0,\ \lim_{x\to1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=0$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. $x<1$일 때, $g'(x)=-x+1$, $x>1$일 때, $g'(x)=-(x-1)(x-2)$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 k가 존재하지 않는다. (거짓)



따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

86. 답 ③

$f(x)+f(-x)=0$ 에서 $f(-x)=-f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 원점에 대해서 대칭인 홀수차항 만으로 이루어진 다항함수이다.

따라서 $x^4f(x)$, $x^2f(x)$ 는 원점에 대하여 대칭인 홀수차항 만으로 이루어진 다항함수이고, $x^3f(x)$, $xf(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭인 짝수차함만으로 이루어진 다항함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}(x^4+x^3+x^2+x+1)f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x^3+x)f(x)\,dx$$
$$=2\int_0^1(x^3+x)f(x)\,dx=10$$
$$\therefore \int_0^1(x^3+x)f(x)\,dx=5$$

87. 답 ②

$$\int_{-2}^{2}x(x+1)^3\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}x(x^3+3x^2+3x+1)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(x^4+3x^3+3x^2+x)\,dx=\int_{-2}^{2}(x^4+3x^2)\,dx$$
$$=2\int_0^2(x^4+3x^2)\,dx=2\left[\frac{1}{5}x^5+x^3\right]_0^2=\frac{144}{5}$$

88. 답 ③

[해설]

$$\int_{-2}^{-1}\frac{x^2}{|x|}dx+\int_1^2\frac{x^2}{|x|}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{x^2}{-x}dx+\int_1^2\frac{x^2}{x}dx$$
$$=-\int_{-2}^{-1}x\,dx+\int_1^2 x\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=3$$

89. 답 ⑤

[해설]

$$\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx \text{ 에서}$$
$$\frac{9}{4}=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\frac{5}{4}$$

이므로 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=1$

$$\therefore \int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx$$
$$=2\int_0^1(x^2+\alpha\beta)\,dx=2\left[\frac{1}{3}x^3+\alpha\beta x\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{1}{3}+\alpha\beta\right)=\frac{2}{3}+2\alpha\beta=1 \qquad \therefore\ \alpha\beta=\frac{1}{6}$$

따라서 방정식 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=\frac{1}{6}$

90. 답 ③

[해설] $f(x)$는 기함수이므로 원점에 대하여 대칭이다.

(가)에서 $\int_0^2 f(x)dx=-3$이므로 $\int_{-2}^{0}f(x)dx=3$

(나)에서 $\int_{-1}^{5}f(y)dy=\int_{-1}^{5}f(x)dx=8$

(다)에서 $\int_{-1}^{0}f(z)dz=\int_{-1}^{0}f(x)dx=2$이므로

$\int_0^{-1}f(x)dx=-2$

$$\therefore \int_{-2}^{5}f(t)dt=\int_{-2}^{5}f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_0^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{5}f(x)dx$$
$$=3+(-2)+8=9$$

91. 답 16

[해설] $\int_{-k}^{k}\{f'(x)+f(x)g'(x)+g'(x)+f'(x)g(x)\}dx$
$$=\int_{-k}^{k}\{f'(x)+g'(x)+f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\}dx$$
$$=\int_{-k}^{k}[f'(x)+g'(x)+\{f(x)g(x)\}']\,dx$$
$$=[f(x)+g(x)+f(x)g(x)]_{-k}^{k}$$
$$=f(k)+g(k)+f(k)g(k)-\{f(-k)+g(-k)+f(-k)g(-k)\}$$

그런데 $f(-k)=f(k)=3$, $g(-k)=-g(k)=-2$이므로

(주어진 식)$=3+2+6-(3-2-6)=16$

92. 답 ⑤

[해설]

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ (a\neq 0)$라 하면

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

임의의 실수 t에 대하여 $\int_{-t}^{t}f'(x)dx=0$이므로 $b=d=0$이다.

$\therefore f'(x)=4ax^3+2cx$ …… ㉠

$f(x)=ax^4+cx^2+e$ …… ㉡

㉠에서 $f'(-x)=-f'(x)$

㉡에서 $f(2)=f(-2)=-1$, $f(-4)=f(4)=17$

$$\therefore \int_{-4}^{2}f'(-x)dx=-\int_{-4}^{2}f'(x)dx$$
$$=-[f(x)]_{-4}^{2}$$
$$=-\{f(2)-f(-4)\}$$
$$=-(-1-17)$$
$$=18$$

93. 답 ⑤

[해설] (가)에서 $\int_0^2 f(x)dx=A$ … ㉠

라 하면 $f(x)=|x-1|+A$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2\{|x-1|+A\}=A$$

$\int_0^1 (1-x+\mathrm{A})dx + \int_1^2 (x-1+\mathrm{A})dx = \mathrm{A}$

$\left[x-\frac{1}{2x^2}+\mathrm{A}x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \mathrm{A}x\right]_1^2 = \mathrm{A}$

$\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{A}\right)+(2-2+2\mathrm{A})-\left(\frac{1}{2}-1+\mathrm{A}\right)=\mathrm{A}$ 에서 $\mathrm{A}=-1$

$\therefore \int_0^2 f(x)dx = -1$

(나)에서 $f(x+2)=f(x)$이므로

$\int_1^7 f(x)dx = 3\int_0^2 f(x)dx = -3$

94. 답 ③

[해설] $\int_0^1 f(x)dx = k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2-2x-k$이므로

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (3x^2-2x-k)dx$

$= [x^3-x^2-kx]_0^1 = -k = k$

$\therefore k=0$

즉, $f(x)=3x^2-2x$ 이므로 $f(10)=280$

95. 답 ④

$\int_0^1 xf(x)dx = k$ (k는 상수)라 하면 $f(x)=5x^3+4x^2+k$이므로

$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x(5x^3+4x^2+k)dx$

$= \int_0^1 (5x^4+4x^3+kx)dx$

$= \left[x^5+x^4+\frac{k}{2}x^2\right]_0^1$

$= 2+\frac{k}{2} = k$

$\therefore k=4$

즉, $f(x)=5x^3+4x^2+4$이므로

$\int_2^0 xf(x)dx = -\int_0^2 (5x^4+4x^3+4x)dx$

$= -[x^5+x^4+2x^2]_0^2 = -56$

96. 답 ①

[해설] $\int_0^1 f(x)dx = k$ (k는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+3k$ 이므로

$f(x)=\int (2x+3k)dx = x^2+3kx+C$

이때, $f(0)=1$이므로 $C=1$

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+3kx+1)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3k}{2}x^2+x\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{3}{2}k+1 = k$

$\therefore k=-\frac{8}{3}$

즉, $f(x)=x^2-8x+1$이므로

$\int_{-1}^2 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_{-1}^2$

$= f(2)-f(-1) = -11-10 = -21$

97. 답 2

[해설] $f(x)=\int_1^x (t^2-t+2)dt$에서

$f(1)=\int_1^1 (t^2-t+2)dt = 0$

또한, $f'(x)=x^2-x+2$이므로 $f'(1)=2$

$\therefore f(1)+f'(1)=2$

98. 답 ③

$\int_1^x f(t)dt = -x^3+ax^2+4$ 의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-1+a+4 \quad \therefore a=-3$

따라서 $\int_1^x f(t)dt = -x^3-3x^2+4$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-3x^2-6x=-3(x+1)^2+3$

이므로 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

99. 답 ①

[해설] $\int_{-1}^x f(t)dt = x^4-2x+a$에 $x=-1$을 대입하면

$0=(-1)^4-2\cdot(-1)+a \qquad \therefore a=-3$

또한 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x^3-2$

이므로 $f'(x)=12x^2$

$\therefore f'(2)=48 \qquad \therefore f'(2)+a=45$

100. 답 ④

[해설] 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4-15x^2-2x = xf(x)$

$\therefore f(x)=5x^3-15x-2$

$\therefore f'(x)=15x^2-15=15(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로 극댓값은

$f(-1)=5\cdot(-1)^3-15\cdot(-1)-2=8$

101. 답 ②

[해설] 조건 (가)에서 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_2^0 f(t)dt = -1 \quad \therefore \int_0^2 f(t)dt = 1 \qquad \cdots ㉠$

㉠을 조건 (나)에 대입하면

$g(x)=x^2-2x+3$

$g(x)$를 조건 (가)에 대입하면

$$\int_2^x f(t)dt = xg(x)+kx-1$$
$$= x(x^2-2x+3)+kx-1$$

위 식을 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=6+2k-1 \qquad \therefore k=-\frac{5}{2}$

102. 답 ③

[해설] $f'(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2+t+k)dt = x^2+x+k$

$f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값을 가지므로 $f'(-3)=0$

$f'(-3)=9-3+k=0$에서 $k=-6$

$\therefore f'(x)=x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=2$

따라서, $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은

$$f(2)=\int_0^2 (t^2+t-6)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-6t\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{8}{3}+2-12\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-6\right)$$
$$=-\frac{13}{6}$$

103. 답 15

[해설] $\{f(x)\}^2-1=2\int_{-1}^x (2t+3)f(t)dt \quad \cdots ㉠$

㉠에서 좌변의 차수는 $2n$, 우변의 차수는 $n+2$이므로

$2n=n+2$에서 $n=2$

$\{f(x)\}^2=f(x)\cdot f(x)$이므로 곱의 미분법을 이용하여

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)f'(x)=2(2x+3)f(x)$

$\therefore f'(x)=2x+3$

$f(x)=\int(2x+3)dx=x^2+3x+C \quad$ (C는 상수)

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$\{f(-1)\}^2-1=0$에서 $\{f(-1)\}^2=1$

$f(-1)>0$이므로 $f(-1)=1$

$f(-1)=1-3+C=1$에서 $C=3$

$\therefore f(x)=x^2+3x+3$

따라서, $m=f(2)=4+6+3=13$이므로

$n+m=2+13=15$

104. 답 ④

[해설] ㄱ. $G(0)=\int_1^2 (t^2+t-2)dt$

$$=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-2t\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{8}{3}+2-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$
$$=\frac{11}{6} \qquad \text{(참)}$$

ㄴ. $G(x)=\int_1^{x+2}(t^2+t-2)dt$이므로

$G'(x)=(x+2)^2+(x+2)-2=x^2+5x+4$

즉, $y=G'(x)$의 그래프는 직선 $x=-\frac{5}{2}$에 대하여 대칭이다.(거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $G'(x)=x^2+5x+4$이므로

$G(x)=\int G(x)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+4x+C \quad$ (C는 상수)

ㄱ에서 $G(0)=\frac{11}{6}$이므로

$G(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+4x+\frac{11}{6}$

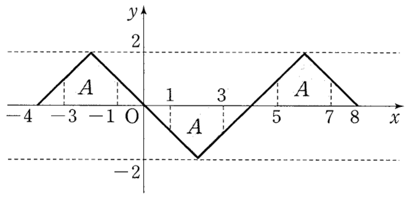
$\therefore G(-x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x+\frac{11}{6}$

$\therefore G(x)=G(-x)+\frac{2}{3}x^3+8x \quad$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

105. 답 4

[해설] 정적분의 정의에 의하여 함수 $g(x)$의 최댓값은 A부분의 넓이와 같고 최솟값은 A의 넓이의 음수의 값과 같다.

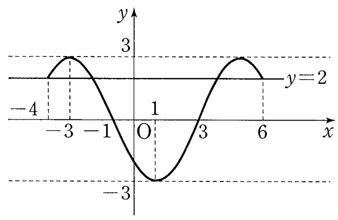


따라서 A부분의 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times1\times1\right)=3$

이므로 $-3\le g(x)\le 3$이다.

또한 $g(x)$는 연속함수이므로 $y=g(x)$의 그래프는 대략 다음과 같이 나타낼 수 있다.



따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 네 개의 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=2$를 만족하는 실수 x의 개수는 4개다.

106. 답 ⑤

[해설]

$F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\int_\alpha^x f(t)dt=f(x)$

(i) $x\le\alpha$일 때, $f(x)\ge0$이므로 $F(x)$는 증가함수이다.

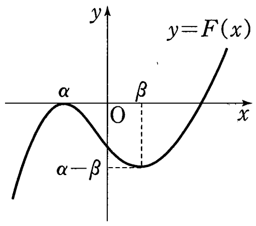
(ii) $\alpha<x\le\beta$일 때, $f(x)\le0$이므로 $F(x)$는 감소함수이다.

(iii) $x>\beta$일 때, $f(x)\ge0$이므로 $F(x)$는 증가함수이다.

또한, $F(\alpha)=\int_\alpha^\alpha f(t)dt=0$이고

$F(\beta)=\int_\alpha^\beta f(t)dt=-\frac{1}{2}\cdot(\beta-\alpha)\cdot2=\alpha-\beta$

따라서 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $F(x)$의 극댓값은 0이다. (참)
ㄴ. $F(x)$의 극솟값은 $\alpha-\beta$이다. (참)
ㄷ. $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=f(0)x=-2x$는 한 점에서 만나므로 방정식 $F(x)-f(0)x=0$은 한 개의 실근을 갖는다. (참)
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

107. 답 ①

[해설] $g(x)=x+\int_0^x f(t)dt$ ...... ㉠
$g'(x)=1+f(x)$이고 (가)에 의하여
$g'(x)=1+f(x)=a(x-1)(x-2)$
또한, (나)에 의하여
$g'\left(\frac{3}{2}\right)=a\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=-6$
따라서 $g'(x)=-6(x^2-3x+2)=-6x^2+18x-12$
이고 $f(x)=-6(x-1)(x-2)-1=-6x^2+18x-13$
이때 ㉠에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=0$이므로
$g(x)=\int g'(x)dx$
$=\int(-6x^2+18x-12)dx$
$=-2x^3+9x^2-12x$ $(\because g(0)=0)$
$\therefore \alpha-\beta+f(1)$
$=g(1)-g(2)+f(1)$
$=-5-(-4)+(-1)=-2$

108. 답 7

[해설]
$\int_0^1(x+y)^2f(y)dy$
$=\int_0^1(x^2+2xy+y^2)f(y)dy$
$=x^2\int_0^1 f(y)dy+2x\int_0^1 yf(y)dy+\int_0^1 y^2f(y)dy$
이때, $\int_0^1 f(y)dy=p,\ \int_0^1 yf(y)dy=q,\ \int_0^1 y^2f(y)dy=r$
라 하면 주어진 등식은
$\int_0^x f(y)dy+px^2+2qx+r=x^2+k$
따라서 양변을 x 에 대하여 미분하면
$f(x)+2px+2q=2x$
$\therefore f(x)=2(1-p)x-2q$
이때, $f(-1)=2p-2-2q=-2$ 에서
$p=q$ ......㉠
또한, $\int_0^1 f(y)dy=\int_0^1(-2py+2y-2q)dy$
$=\left[-py^2+y^2-2qy\right]_0^1$
$=-p+1-2q=p$
$\therefore 2p+2q=1$ ......㉡
㉠, ㉡에서 $p=q=\frac{1}{4}$ 이므로
$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$
$\therefore f(5)=7$

109. 답 ③

[해설]
$\int_a^x f(t)dt=(x-a)f(x)+(1-x)^3$ ...... ㉠
㉠에 $x=a$를 대입하면
$(1-a)^3=0$에서 $a=1$
$\{(1-x)^3\}'=(1-3x+3x^2-x^3)'$
$=-3+6x-3x^2$
$=-3(1-x)^2$
이므로 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+(x-1)f'(x)-3(1-x)^2$
$f'(x)=3(x-1)$
$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$
$=3\int(x-1)dx$
$=3\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)+C$
$\frac{3}{2}x^2-3x+C$ (C는 적분상수)
이때, $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식
$\frac{3}{2}x^2-3x+C=0$은 중근을 갖는다.
$D=9-4\cdot\frac{3}{2}C=0$에서 $C=\frac{3}{2}$
$\therefore f(3)=\frac{3}{2}\cdot 3^2-3\cdot 3+\frac{3}{2}=6$

110. 답 ⑤

[해설]
$F'(t)=t^2-3t$ 라 하면
$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-2}^{-2+x}(t^2-3t)dt$
$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-2}^{-2+x}F'(t)dt$
$=\lim_{x\to 0}\frac{F(-2+x)-F(-2)}{x}$
$=F'(-2)$
$=10$

111. 답 ⑤

[해설] $f(t)=2t^2+at-1$, $\mathrm{F}'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(2t^2+at-1)dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(2)}{x-2}$$
$$=\mathrm{F}'(2)=f(2)$$

따라서, $f(2)=8-2a-1=5$에서 $a=-1$

112. 답 ③

[해설] $f(x)$ 의 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^{x^4}f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{\int_1^{x^4}f(t)\,dt}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{[F(x)]_1^{x^4}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{[F(x)]_1^{x^4}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x^4)-F(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x^4)-F(1)}{x^4-1}\times(x^{2>11})$$
$$=2F'(1)=2f(1)=10$$
$$\therefore f(1)=5$$

113. 답 ⑤

[해설] $f(x)$의 한 부정적분을 $\mathrm{F}(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\mathrm{F}(x^3)-\mathrm{F}(1)}{(x-1)}\cdot(x^2-x+1)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\mathrm{F}(x^3)-\mathrm{F}(1)}{(x^3-1)}\cdot(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$
$$=3\cdot f(1)\quad(\because \mathrm{F}'(x)=f(x))$$
$$=3\cdot(1-1+2010)=6030$$

114. 답 ④

[해설]

조건 (가)에서 $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-2h}^{2+2h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+2h)-F(2-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{F(2+2h)-F(2)\}-\{F(2-2h)-F(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(2+2h)-F(2)}{2h}\times2-\frac{F(2-2h)-F(2)}{-2h}\times(-2)\right\}$$
$$=4F'(2)$$
$$=4f(2)=8$$
$$\therefore f(2)=2$$

조건 (나)에서

$$\int_{-2}^{2}f'(x)dx=f(2)-f(-2)=-2$$
$$2-f(-2)=-2$$
$$\therefore f(-2)=4$$

115. 답 2

[해설] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{1+\frac{(2-1)}{n}\right\}^2\cdot\frac{2-1}{n}$

$$=\int_1^2 x^2dx=\int_1^a x^2dx$$

$\therefore\ a=2$

116. 답 ④

[해설]

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}=2\lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$ 이고

$$\Delta x=\frac{0-(-1)}{n},\quad x_k=-1+k\Delta x=-1+\frac{k}{n}$$

이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}=2\int_{-1}^{0}x^2\,dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}=\frac{2}{3}$$

117. 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^3+\left(2+\frac{2}{n}\right)^3+\ \cdots\ +\left(2+\frac{n}{n}\right)^3\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$$

이때, $f(x)=x^3$, $a=2$, $b=3$ 이라 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-2}{n}=\frac{1}{n},\quad x_k=a+k\Delta x=2+\frac{k}{n}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to0}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$=\int_2^3x^3\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^3=\frac{65}{4}$$

118. 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4+(n+2)^4+\ \cdots\ +(2n)^4}{n^5}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4+\left(1+\frac{2}{n}\right)^4+\ \cdots\ +\left(1+\frac{n}{n}\right)^4\right\}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}$$

이때, $f(x)=x^4$, $a=1$, $b=2$ 라 하면

$$\Delta x=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n},\quad x_k=1+k\Delta x=1+\frac{k}{n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}=\int_1^2x^4\,dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2=\frac{31}{5}$$

119. 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)}{\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

이때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^3\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=2$$

(단, $a=0,\ b=2,\ \Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=\frac{2k}{n}$)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_{0}^{1}x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(단, $a=0,\ b=1,\ \Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$)

이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$$

120. 답 12

[해설] $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 (x^3+x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{81}{4}+\frac{9}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(20-4)=12$$

121. 답 ①

[해설] $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^4\frac{10}{n}=5\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^4\frac{2}{n}$

$$=5\int_0^2 x^4dx$$
$$=5\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$
$$=5\cdot\frac{32}{5}=32$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{p}{n}=p\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$
$$=p\int_0^1 x^2dx$$
$$=p\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{p}{3}$$

따라서, $\frac{p}{3}=32$에서 $p=96$

122. 답 ②

[해설] $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{3k}{n}\right)\frac{1}{n}$에서

(i) 구간 $[0,\ 1]$에서 $x_k=0+\frac{k}{n}$일 때

(주어진 식) $=\int_0^1 f(1+3x)dx$ $\quad\therefore a=3$

(ii) 구간 $[0,\ 3]$에서 $x_k=0+\frac{3k}{n}$일 때

(주어진 식) $=\frac{1}{3}\int_0^3 f(1+x)dx$ $\quad\therefore b=3$

(iii) 구간 $[1,\ 4]$에서 $x_k=1+\frac{3k}{n}$일 때

(주어진 식) $=\frac{1}{3}\int_1^4 f(x)dx$ $\quad\therefore c=4$

$\therefore a+b+c=3+3+4=10$

123. 답 ④

[해설] $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{2k}{n}\right)\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{2k}{n}\right)\left\{1+\left(2+2\frac{k}{n}\right)\right\}^2\frac{2}{n}$$
$$=\int_2^4 x(1+x)^2dx=\int_2^4(x^3+2x^2+x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_2^4$$
$$=\left(64+\frac{128}{3}+8\right)-\left(4+\frac{16}{3}+2\right)$$
$$=\frac{310}{3}$$

124. 답 ③

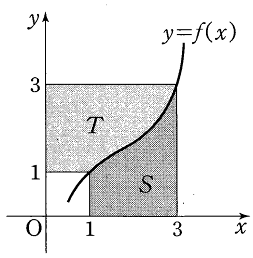
[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{k}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(3+\frac{k}{2n}\right)\cdot\frac{1}{2n}$$
$$=2\int_3^{\frac{7}{2}}f(x)dx=2\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}f(x)dx$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(3+\frac{k}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n}=2\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}f(x)dx$$

125. 답 ⑤

[해설]

오른쪽 그림에서



$S+T=3^2-1^2=8$이고,

$$T=\int_1^3 x\,dy$$
$$=\int_1^3 f^{-1}(y)dy$$
$$=\int_1^3 f^{-1}(x)dx$$
$$=\int_1^3 g(x)dx$$
$$\therefore\int_1^3 g(x)dx=8-S$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$$

$= \frac{3}{2}\int_1^3 g(x)dx$

$= \frac{3}{2}(8-S)$

$= 12 - \frac{3}{2}S$

126. 답 ④

[해설] 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$ 이 성립하므로 $f(-x)=-f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\cdot\frac{1}{2n} = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = -\frac{1}{4}$$

(단, $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $\Delta x = \frac{1}{2n}$, $x_k = \frac{k}{2n}$)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{4n}\right)\cdot\frac{1}{4n} \equiv \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 2$$

(단, $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $\Delta x = \frac{1}{4n}$, $x_k = \frac{1}{4}+\frac{k}{4n}$)

$$\therefore \int_{-\frac{1}{4}}^{0} f(x)dx = -\int_{-\frac{1}{4}}^{0} f(x)dx$$

$$= -\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = -\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx\right) = -\left(-\frac{1}{4}-2\right) = \frac{9}{4}$$

127. 답 ⑤

[해설] 호 AP_k의 중심각의 크기는 $\dfrac{\frac{2}{3}\pi}{n}k = \dfrac{2k\pi}{3n}$ 이므로

호 AP_k의 길이 l_k는

$l_k = 3\cdot\frac{2k\pi}{3n} = \frac{2k\pi}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} l_k^{\,3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^3$$

$$= \frac{8}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k\pi}{n}\right)^3\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 dx$$

$$= \frac{8}{\pi}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi^3$$

128. 답 ①

[해설] $f_2(x) = \frac{1}{x}\int_1^{x+1} f_1(t)dt$

$= \frac{1}{x}\int_1^{x+1}(t+1)dt = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_1^{x+1}$

$= \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{2}(x+1)^2+(x+1)-\frac{3}{2}\right\}$

$= \frac{1}{2}x+2$

$f_3(x) = \frac{1}{x}\int_1^{x+1} f_2(t)dt$

$= \frac{1}{x}\int_1^{x+1}\left(\frac{1}{2}t+2\right)dt = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{4}t^2+2t\right]_1^{x+1}$

$= \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{4}(x+1)^2+2(x+1)-\frac{9}{4}\right\}$

$= \frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$

⋮

따라서 $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{4}$, $\cdots$ 이므로

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

[다른 풀이]

함수 $f_n(x) = a_n x + b_n$이라 하면

$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_1^{x+1}(a_n t + b_n)dt$

$= \frac{1}{x}\left[\frac{a_n}{2}t^2 + b_n t\right]_1^{x+1}$

$= \frac{1}{x}\left\{\frac{a_n}{2}(x+1)^2 + b_n(x+1) - \frac{a_n}{2} - b_n\right\}$

$= \frac{1}{2}a_n x + (a_n + b_n) = a_{n+1}x + b_{n+1}$

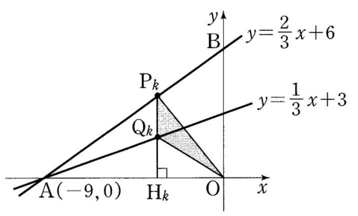
$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ (단, $a_1 = 1$)

$\therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

129. 답 ②

[해설]



위의 그림과 같이 점 P_k에서 x축에 내린 수선의 발을 H_k라 하면

$H_k\left(-9+\frac{9}{n}k,\ 0\right)$이므로

$P_k\left(-9+\frac{9}{n}k,\ \frac{6}{n}k\right)$, $Q_k\left(-9+\frac{9}{n}k,\ \frac{3}{n}k\right)$

따라서 삼각형 OP_kQ_k의 넓이 S_k는

$S_k = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6}{n}k-\frac{3}{n}k\right)\cdot\left(9-\frac{9}{n}k\right)$

$= \frac{27}{2}\left\{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{27}{2}\left\{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{n}$$

$= \frac{27}{2}\int_0^1 (x-x^2)dx$

$= \frac{27}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$= \frac{27}{2} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{9}{4}$

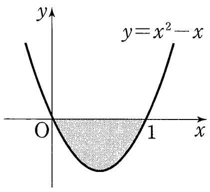
1. 답 ⑤	2. 답 ④	3. 답 ①	4. 답 ③
5. 답 ④	6. 답 ③	7. 답 ④	8. 답 ④
9. 답 ⑤	10. 답 ③	11. 답 ⑤	12. 답 ④
13. 답 ⑤	14. 답 ⑤	15. 답 ②	16. 답 ①
17. 답 ⑤	18. 답 ④	18. 답 ④	20. 답 ②
21. 답 253	22. 답 34	23. 답 ①	24. 답 ④
25. 답 143	26. 답 24	27. 답 ②	28.답 ③
29. 답 ⑤	30. 답 ⑤	31. 답 ①	32. 답 ⑤
33. 답 $a=4$	33. 답 $a=4$	35. 답 ⑤	36. 답 4
37. 답 ②	38. 답 ②	39. 답 ②	40. 답 ③
41. 답 ④	42. 답 ⑤	43. 답 ①	44. 답 ②
45. 답 173	46. 답 ②	47. 답 ②	48. 답 ③
49. 답 ②	50. 답 ③	51. 답 ④	52. 답 ⑤
53. 답 ⑤	54. 답 ④	55. 답 ②	56. 답 ③
57. 답 ②	58. 답 ③	59. 답 ②	60. 답 ④
61. 답 ②	62. 답 ③	63. 답 ⑤	64. 답 20
65. 답 ①	66. 답 ②	67. 답 **113**	68. 답 **23**
69. 답 ②	70. 답 **27**	71. 답 ②	72. 답 **47**
73. 답 **72**	74. 답 ④	75. 답 ③	76. 답 ④
77. 답 ⑤	78. 답 ④	79. 답 ③	80. 답 ⑤
81. 답 ①	82. 답 ②	83. 답 ④	84. 답 ①
85. 답 ⑤	86. 답 ②	87. 답 ③	88. 답 ⑤
89. 답 162	90. 답 ②	91. 답 ③	92. 답 ④
93. 답 ④	94. 답 ②	95. 답 ②	96. 답 48
97. 답 ⑤	98. 답 ④	99. 답 ③	100. 답 ⑤

1. 답 ⑤

[해설] $x^2-x=x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이 S는

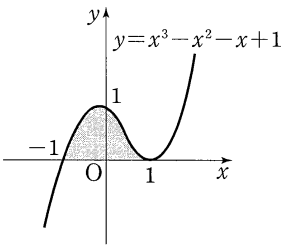


$$S=-\int_0^1 (x^2-x)\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

2. 답 ④

[해설] $y=x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$ 이므로 주어진 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



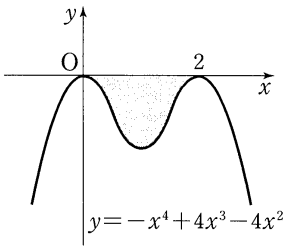
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^1 (x^3-x^2-x+1)dx=2\int_0^1(-x^2+1)dx$$

$$=2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

3. 답 ①

[해설] $y=-x^4+4x^3-4x^2=-x^2(x^2-4x+4)=-x^2(x-2)$ 이므로 주어진 곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2|-x^4+4x^3-4x^2|dx=\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{15}$$

4. 답 ③

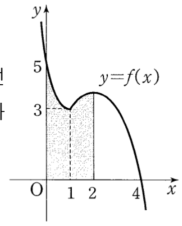
[해설] 함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$을 만족해야 한다. 즉 $2-4+5=-1+4+a=0$ $\quad\therefore a=0$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2x^2-4x+5 & (x<1)\\ -x^2+4x & (x\geq 1)\end{cases}$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x좌표는

$-x^2+4x=0,\ x(x-4)=0$

$\therefore x=4(\because x\geq 1)$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0,\ x=2$로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_0^1(2x^2-4x+5)dx$$

$$+\int_1^2(-x^2+4x)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_1^2$$

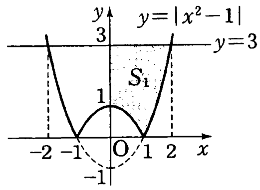
$$=\frac{11}{3}+\frac{11}{3}=\frac{22}{3}$$

5. 답 ④

[해설] $|x^2-1|=3$에서 $x^2=4$

$\therefore x=\pm2$

오른쪽 그림에서 S_1의 넓이는



$$S_1=\int_0^1\{3-(-x^2+1)\}dx$$

$$+\int_1^2\{3-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_0^1(x^2+2)dx+\int_1^2(-x^2+4)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}+2\right)+\left(-\frac{8}{3}+8+\frac{1}{3}-4\right)=4$$

따라서, 구하는 넓이는 $2S_1=2\times4=8$

6. 답 ③

[해설] $4\times4-\int_1^5 f(x)dx=9$ 이므로 $\int_1^5 f(x)dx=7$

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$이 대칭축이므로

$$\int_1^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^5 f(x)dx=\frac{7}{2}$$

7. 답 ④

[해설]

$f(x)=\int_0^x(t-a)(t-b)\,dt$ 에서 $f'(x)=(x-a)(x-b)$

이고 $x=\frac{1}{2},\ x=\frac{3}{2}$에서 극값을 가지며 $a<b$ 이므로

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$

$$\therefore\ f(x)=\int_0^x\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^x\left(t^2-2t+\frac{3}{4}\right)dt$$

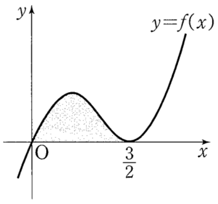
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{3}{4}t\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{3}{4}x$$

$=\frac{1}{12}x(4x^2-12x+9)$

$=\frac{1}{12}x(2x-3)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같으므로 넓이 S는



$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{3}{4}x\right)dx=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{8}x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{64}$$

***8.* 답 ④**

[해설] 직사각형들의 넓이의 합을 S_1이라 하면

$$S_1=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{19}{27}}=\frac{9}{19}$$

곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^1 x^{2dx}=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

따라서, 구하는 넓이는

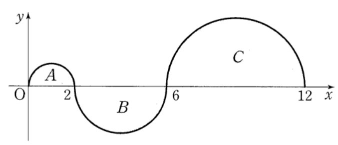
$$S_1-S_2=\frac{9}{19}-\frac{1}{3}=\frac{8}{57}$$

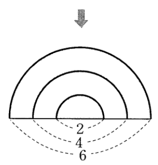
9. 답 ⑤

[해설]

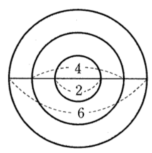
$f(x)=f(-x)$ 이므로 $\int_{-12}^{12}f(x)dx=2\int_0^{12}f(x)dx$ …… ㉠

이때, $\int_0^{12}f(x)dx$ 는 다음 그림의 A, C 부분의 넓이에서 B 넓이를 뺀 것과 같다.





따라서 ㉠이 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



***10.* 답 ③**

[해설] 주어진 조건에 의하여 방정식

$x^4+ax^2+b=b$ 는 $x=0$의 중근과 $x=2$, $x=-2$의 근을 $f(x)=x^4+ax^2+b$가지므로 라고 하면

$f(x)-b=x^2(x-2)(x+2)=x^2(x^2-4)=x^4-4x^2$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{2}\{b-f(x)\}dx=-\int_{-2}^{2}\{f(x)-b\}dx$$

$$=-\int_{-2}^{2}(x^4-4x^2)dx=-2\int_0^2(x^4-4x^2)dx$$

$$=-2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=-2\times\left(-\frac{64}{15}\right)=\frac{128}{15}$$

***11.* 답 ⑤**

[해설] 사각형 $OQPR$가 정사각형이려면 점 P가 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점일 때이다.

$f(x)=x$에서 $xg(x)=x$, 즉 $x\{g(x)-1\}=0$

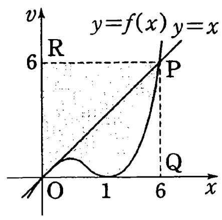
$x=0$ 또는 $g(x)=1$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=6$

사각형 $OQPR$는 $x=6$일 때 넓이가 가장 큰 정사각형이므로

$a=b=6$ $\therefore Q(6,\ 0)$, $R(0,\ 6)$

따라서, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=6$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$6\times6-\int_0^6 f(x)dx$$

$$=36-\int_0^6 f(x)dx$$

***12.* 답 ④**

[해설] $\int_2^7\{f(x)-3\}dx$

$$=\int_2^5\{f(x)-3\}dx+\int_5^7\{f(x)-3\}dx$$

$$=\int_2^5\{f(x)-3\}dx-\int_5^7\{3-f(x)\}dx$$

$=10-6=4$

한편, $y=f(x-2)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$$\int_4^7\{3-f(x-2)\}dx=\int_2^5\{3-f(x)\}dx=-10$$

$$\therefore \int_4^7\{4-f(x-2)\}dx=\int_4^7\{1+3-f(x-2)\}dx$$

$$=\int_4^7 1\,dx+\int_4^7\{3-f(x-2)\}dx$$

$$=[x]_4^7+\int_2^5\{3-f(x)\}dx$$

$=3-10=-7$

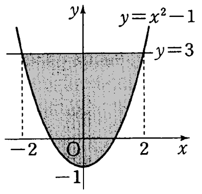
$$\therefore \int_2^7\{f(x)-3\}dx+\int_4^7\{4-f(x-2)\}dx$$

$=4+(-7)=-3$

***13.* 답 ⑤**

[해설] ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $S(1)$은

곡선 $y=x^2-1$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이이다.



곡선과 직선의 교점의 x좌표는

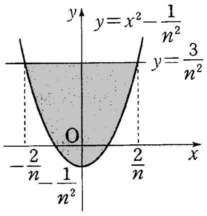
$x^2-1=3$에서 $x=\pm 2$

$\therefore\ S(1)=\int_{-2}^{2}\{3-(x^2-1)\}dx$

$=2\int_{0}^{2}(4-x^2)dx$

$=2\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{32}{3}$ (참)

ㄴ. 곡선과 직선의 교점의 x좌표는



$x^2-\frac{1}{n^2}=\frac{3}{n^2}$에서

$x=\pm\frac{2}{n}$이므로

$S(n)=2\int_{0}^{\frac{2}{n}}\left(\frac{3}{n^2}-x^2+\frac{1}{n^2}\right)dx$

$=2\int_{0}^{\frac{2}{n}}\left(\frac{4}{n^2}-x^2\right)dx$

$=2\left[\frac{4}{n^2}x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{2}{n}}=2\left(\frac{8}{n^3}-\frac{8}{3n^3}\right)=\frac{32}{3n^3}$

$\frac{32}{3n^3}<\frac{1}{21}$에서 $n^3>224$

$6^3=216$, $7^3=343$이므로 최소의 자연수 n은 7이다. (참)

ㄷ. $\frac{1}{S(1)}+\frac{1}{S(2)}+\cdots+\frac{1}{S(10)}$

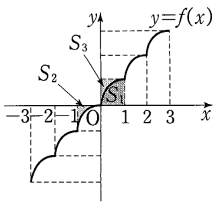
$=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S(n)}=\frac{3}{32}\sum_{n=1}^{10}n^3$ ($\because$ ㄴ)

$=\frac{3}{32}\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=\frac{3\cdot 55^2}{32}$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14. 답 ⑤

[해설] $0\le x\le 1$일 때,



모든 실수 x에 대하여

$f(x)=-(x-1)^2+1$이고

$f(x+1)=f(x)+1$이 성립하므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$S_2=S_3$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=-n$, $x=n$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$-\int_{-n}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{n}f(x)dx=n^2$

한편,

$S_1=\int_{0}^{1}\{-(x-1)^2+1\}dx$

$=\int_{0}^{1}(-x^2+2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1=\frac{2}{3}$

따라서, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=n$, 으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{n}^{2n}f(x)dx$

$=(n+S_1)+(n+1+S_1)+(n+2+S_1)+\cdots$
$+(2n-1+S_1)$

$=\{n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n-1)\}+nS_1$

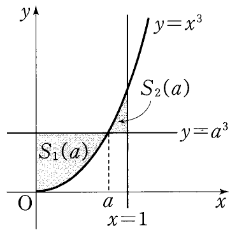
$=\frac{n(n+2n-1)}{2}+\frac{2}{3}n$

$=\frac{n(9n+1)}{6}$

15. 답 ②

[해설]

오른쪽 그림에서



$S_1(a)=a^4-\int_{0}^{a}x^3dx$

$=a^4-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^a$

$=a^4-\frac{1}{4}a^4$

$=\frac{3}{4}a^4$

$S_2(a)=\int_{a}^{1}(x^3-a^3)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-a^3x\right]_a^1$

$=\left(\frac{1}{4}-a^3\right)-\left(\frac{1}{4}a^4-a^4\right)$

$=\frac{3}{4}a^4-a^3+\frac{1}{4}$

어두운 부분의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{3}{2}a^4-a^3+\frac{1}{4}$

$S'(a)=6a^3-3a^2=3a^2(2a-1)$

$S'(a)=0$에서 $a=0$또는 $a=\frac{1}{2}$

$0<a<1$에서 $S(a)$의 증감을 조사하면 다음 표와 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

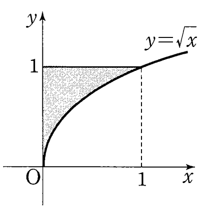
따라서 $S(a)$는 $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값

$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}=\frac{7}{32}$

을 갖는다.

16. 답 ①

[해설] $y=\sqrt{x}$ 에서 $x=y^2$

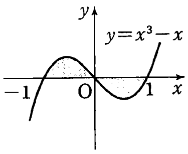


따라서 구하는 넓이 S는

$S=\int_{0}^{1}y^2\,dy=\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

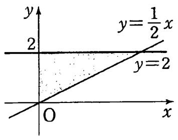
17. 답 ⑤

[해설] $y=x^3-x=x(x+1)(x-1)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$$A=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$
$$=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

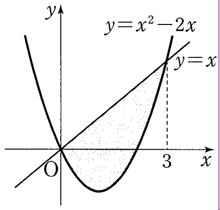
또, 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 $y=2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$B=\int_{0}^{2}2ydy=\left[y^2\right]_0^2=4$$
$$\therefore B-A=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

18. 답 ④

[해설] 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



$x^2-2x=x$, $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{3}\{x-(x^2-2x)\}dx=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

19. 답 ④

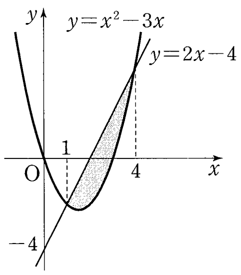
[해설] 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=2x-4$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=2x-4$, $x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

이때, 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=2x-4$로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{1}^{4}\{(2x-4)-(x^2-3x)\}dx=\int_{1}^{4}(-x^2+5x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4=\frac{9}{2}$$

20. 답 ②

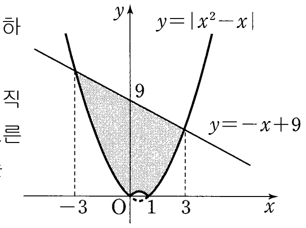
[해설] 함수 $y=|x^2-x|=\begin{cases}x^2-x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ -x^2+x & (0<x<1)\end{cases}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+9$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-x=-x+9$에서 $x^2=9$이므로 $x=-3$ 또는 $x=3$

$-x^2+x=-x+9$에서

$x^2-2x+9=0$이므로 x의 값은 존재하지 않는다.

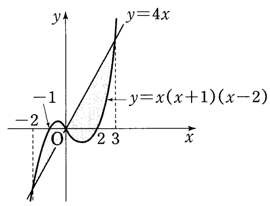
따라서 함수 $y=|x^2-x|$의 그래프와 직선 $y=-x+9$로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-3}^{3}\{(-x+9)-(x^2-x)\}dx-2\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}(-x^2+9)dx-2\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx$$
$$=2\int_{0}^{3}(-x^2+9)dx-2\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+9x\right]_0^3-2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=2(-9+27)-2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=36-\frac{1}{3}=\frac{107}{3}$$

21. 답 253

[해설] $x(x+1)(x-2)=4x$에서



$x(x^2-x-6)=0$

$x(x+2)(x-3)=0$

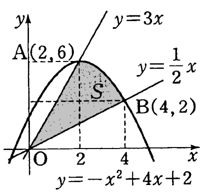
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 오른쪽그림에서

$$S=\int_{-2}^{0}\{x(x+1)(x-2)-4x\}dx+\int_{0}^{3}\{4x-x(x+1)(x-2)\}$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3-x^2-6x)dx+\int_{0}^{3}(-x^3+x^2+6x)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^3$$
$$=\left(-4-\frac{8}{3}+12\right)+\left(-\frac{81}{4}+9+27\right)$$
$$=\frac{253}{12}$$
$$\therefore 12S=253$$

22. 답 34

[해설] 주어진 세 부등식을 동시에 만족하는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다.



곡선 $y=-x^2+4x+2$와

직선 $y=3x$의 교점을 A라 하면

$-x^2+4x+2=3x$에서

$x^2-x-2=0$, $(x-2)(x+1)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=-1$

$\therefore$ $A(2,\ 6)$

곡선 $y=-x^2+4x+2$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점을 B라 하면

$-x^2+4x+2=\frac{1}{2}x$에서 $2x^2-7x-4=0$

$(2x+1)(x-4)=0$ $\therefore\ x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$

$\therefore\ B(4,\ 2)$

즉, $S=\int_0^2 3xdx+\int_2^4(-x^2+4x+2)dx-\int_0^4\frac{1}{2}xdx$

$=\left[\frac{3}{2x^2}\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+2x\right]_2^4-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^4$

$=6+\left(-\frac{56}{3}+24+4\right)-4=\frac{34}{3}$

$\therefore\ 3S=34$

***23.* 답 ①**

[해설] 원의 중심을 원점으로, 직선 OF를 x축으로 하는 좌표평면을 생각한다. 직선 OA의 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이고, 포물선 C_1의 방정식을 $y=ax^2+b$로 놓으면 곡선 $y=ax^2+b$가 점 $A(1,\ \sqrt{3})$에서 직선 OA에 접한다.

이 때, $y'=2ax$이므로

$\sqrt{3}=a+b,\ \sqrt{3}=2a$

즉, $a=b=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서, 구하는 넓이를 S라 하면

$S=12\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}x\right)dx$

$=12\left[\frac{\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right]_0^1$

$=2\sqrt{3}$

***24.* 답 ④**

[해설] 직선 PQ의 방정식은

$y-p^2=\frac{q^2-p^2}{q-p}(x-p)$, 즉 $y=(p+q)x-pq$

이므로 선분 PQ와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$S(p)=\int_p^q\{(p+q)x-pq-x^2\}dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{p+q}{2}x^2-pqx\right]_p^q$

$=-\frac{q^3-p^3}{3}+\frac{p+q}{2}(q^2-p^2)-pq(q-p)$

$=(q-p)\left(-\frac{p^2+pq+q^2}{3}+\frac{p^2+2pq+q^2}{2}-pq\right)$

$=(q-p)\times\frac{p^2-2pq+q^2}{6}=\frac{(q-p)^3}{6}$

$\overline{PQ}=1$이므로 $(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=1$

$(q-p)^2\{1+(q+p)^2\}=1$, $(q-p)^2=\frac{1}{1+(q+p)^2}$

$q>p$이므로 $q-p=\frac{1}{\sqrt{1+(q+p)^2}}$

$\therefore\ p^3S(p)=\frac{p^3}{6}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+(q+p)^2}}\right\}^3$

$=\frac{1}{6}\left\{\frac{p}{\sqrt{1+(q+p)^2}}\right\}^3$

$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+\left(\frac{q}{p}+1\right)^2}}\right\}^3$

$p<q<p+1$이므로 $1<\frac{q}{p}<1+\frac{1}{p}$ $\therefore\ \lim_{p\to\infty}\frac{q}{p}=1$

$\therefore\ \lim_{p\to\infty}p^3S(p)=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{48}$

25.* 답 *143

[해설]

$\frac{1}{2^{n-1}}x^n=x$에서 $\frac{1}{2^{n-1}}x(x^{n-1}-2^{n-1})=0$

$\therefore x=0$또는 $x=2$ ($\because n$은 짝수)

곡선 $y=\frac{1}{2^{n-1}}x^n$과 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n은

$S_n=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2^{n-1}}x^n\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^2$

$=2-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{2^{n+1}}{n+1}$

$2-\frac{4}{n+1}$

$=\frac{2(n-1)}{n+1}$

$\therefore S_2\times S_4\times S_6\times\cdots\times S_{14}$

$=\frac{2\cdot 1}{3}\times\frac{2\cdot 3}{5}\times\frac{2\cdot 5}{7}\times\cdots\times\frac{2\cdot 13}{15}$

$=2^7\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\cdots\times\frac{13}{15}\right)$

$=\frac{128}{15}$

$\therefore p+q=15+128=143$

26. 답 24

[해설]

함수 $f(x)=|x(x-a)(x-b)(x-c)|$ 의 그래프를 y축의 항으로 4만큼

평행이동하면 $g(x)=|x(x-a)(x-b)(x-c)|+4$

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=-2,\ x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_{-2}^4\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{-2}^4 4dx=[4x]_{-2}^4=24$

***27.* 답 ②**

[해설] x^2의 계수가 1이면서 최솟값이 $\frac{1}{2}$인 이차함수를

$y=(x-a)^2+\frac{1}{2}=x^2-2ax+a^2+\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ㉠

라고 하면 곡선 $y=-x^2+1$에 접하므로

$x^2-2ax+a^2+\frac{1}{2}=-x^2+1$

$2x^2-2ax+a^2-\frac{1}{2}=0$

$\frac{D}{4}=(-a)^2-2(a^2-\frac{1}{2})=-a^2+1=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 두 이차함수는

$y=x^2+2x+\frac{3}{2}$, $y=x^2-2x+\frac{3}{2}$

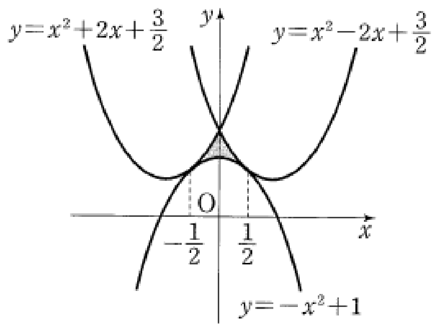
또한, 접점 중 한 점의 x좌표는

$-x^2+1=x^2+2x+\frac{3}{2}$에서

$4x^2+4x+1=0$, $(2x+1)^2=0$ $\quad \therefore x=-\frac{1}{2}$

두 이차함수와 $y=-x^2+1$곡선 은 모두 y축에 대하여 대칭이므로 또 다른 접점의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이다.

이때, 구하는 부분은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이 S는

$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(x^2-2x+\frac{3}{2}\right)-(-x^2+1)\right\}dx$

$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx$

$=2\left[\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{1}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}$

***28.*답 ③**

[해설] 포물선 P : $y=ax^2-2x-4a$ 를 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=a(-x)^2-2(-x)-4a$

P' : $y=-ax^2-2x+4a$

따라서 두 포물선 P, P' 의 교점의 x좌표는

$ax^2-2x-4a=-ax^2-2x+4a$

$2ax^2-8a=0$, $2a(x-2)(x+2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=2$

$a>0$ 이고 두 곡선 P, P' 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 64이므로

$\int_{-2}^{2}\{(-ax^2-2x+4a)-(ax^2-2x-4a)\}dx$

$=\int_{-2}^{2}(-2ax^2+8a)dx$

$=2\int_0^2(-2ax^2+8a)dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}ax^3+8ax\right]_0^2=\frac{64}{3}a=64$

$\therefore$ $a=3$

***29.* 답 ⑤**

[해설]

두 곡선 $f_1(x)=-x^3+a^2$, $f_2(x)=x^2-a^2x$ 가 만나는 교점의 x좌표는

$-x^3+a^2=x^2-a^2x$

$x^3+x^2-a^2x-a^2=0$

$(x+1)(x+a)(x-a)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=-a$ 또는 $x=a$

ㄱ. $a>1$ 이면 $-a<-1$ 이므로 $x_2=-1$ (참)

ㄴ. $S_1(2)=\int_{-2}^{-1}|(x+1)(x+2)(x-2)|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x+1)(x+2)(x-2)dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^3+x^2-4x-4)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x\right]_{-2}^{-1}$

$=\frac{7}{12}$ (참)

ㄷ. $0<a<1$ 이면 $-1<-a<0$ 이므로

$x_1=-1$, $x_2=-a$, $x_3=a$

$S_1(a)=S_2(a)$ 에서

$\int_{-1}^{a}(x^3+x^2-a^2x-a^2)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{a^2}{2}x^2-a^2x\right]_{-1}^{a}$

$=-\frac{1}{4}a^4-\frac{2}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{12}=0$

$3a^4+8a^3+6a^2-1=0$

$(a+1)^3(3a-1)=0$

$\therefore$ $a=\frac{1}{3}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

***30.* 답 ⑤**

[해설] ㄱ. $f(x)=x^3-ax^2+bx$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+b$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 해가 한 개 존재하려면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3b=a^2-3b=0$ $\quad \therefore a^2=3b$ (참)

ㄴ. $f(x)\ge x^3 \Leftrightarrow x^3-ax^2+\frac{a^2}{3}x\ge x^3$

$\Leftrightarrow ax(3x-a)\le 0$

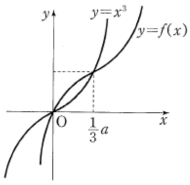
$\therefore 0\le x\le \frac{1}{3}a$ (참)

ㄷ. 두 곡선 으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다. 따라서 구하는 넓이 S는

$S=\int_0^{\frac{1}{3}a}\left\{\left(x^3-ax^2+\frac{1}{3}a^2x\right)-x^3\right\}dx$

$=\int_0^{\frac{1}{3}a}\left(-ax^2+\frac{1}{3}a^2x\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{6}a^2x^2\right]_0^{\frac{1}{3}a}=\frac{1}{162}a^4$ (참)



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31. 답 ①

[해설] 두 곡선 $y=x^n$, $y=x^{n+2}$의 교점의 x좌표는

$x^n=x^{n+2}$에서 $x^n(x^2-1)=x^n(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

두 함수 $y=x^n$, $y=x^{n+2}$의 그래프로 둘러싸인 부분은 y축에 대하여 대칭이거나 원점에 대하여 대칭이므로

$S_n=2\int_0^1(x^n-x^{n+2})dx$

$=2\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+3}x^{n+3}\right]_0^1$

$=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

$\therefore$ $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_7$

$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{56}{45}$

32. 답 ⑤

[해설] ㄱ. $y\leqq -x^2+px+q$에서 영역 B를 나타내는 부등식은

$-y\leqq-(-x)^2+p(-x)+q$, $-y\leqq -x^2-px+q$

$\therefore$ $y\geqq x^2+px-q$

영역 $A\cap B$의 경계선의 교점의 x좌표는

$-x^2+px+q=x^2+px-q$에서 $2x^2=2q$

$\therefore$ $x=\pm\sqrt{q}$

따라서, $A\cap B$의 원소 중 x좌표의 최댓값은 $\sqrt{q}$이다. (참)

ㄴ. $A\cap B$가 나타내는 영역의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-\sqrt{q}}^{\sqrt{q}}\{(-x^2+px+q)-(x^2+px-q)\}dx$

$=\int_{-\sqrt{q}}^{\sqrt{q}}(2q-2x^2)dx=4\int_0^{\sqrt{q}}(q-x^2)dx$

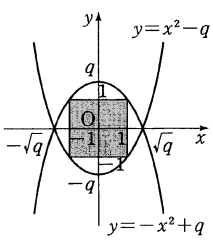
$=3\left[qx-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{q}}=\frac{8}{3}q\sqrt{q}$ (참)

ㄷ. $A\cap B$가 나타내는 영역의 넓이는 p의 값에 관계없이 q에 의하여 결정되므로 $p=0$이라 하면 $C\subset(A\cap B)$일 때는 다음 그림과 같다.

오른쪽 그림에서 $A\cap B$가 나타내는 영역의 넓이가 최소일 때는 $y=-x^2+q$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지날 때이므로

$1=-1^2+q$에서 $q=2$

이때, 넓이는

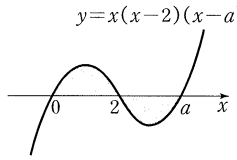


$\frac{8}{3}q\sqrt{q}=\frac{16}{3}\sqrt{2}$이므로 넓이의 최솟값은 $\frac{16}{2}\sqrt{2}$이다. (참)

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

33. 답 $a=4$

[해설] 곡선 $y=x(x-2)(x-a)$에서 $a>2$이므로 x축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



$\therefore$ $\int_0^a x(x-2)(x-a)dx=\int_0^a\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^a=0$

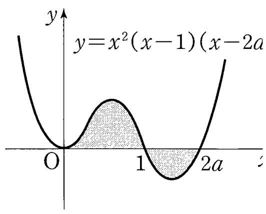
$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^4-\frac{2}{3}a^3+a^3=0$

$a^4-4a^3=0$, $a^3(a-4)=0$

$\therefore a=4(\because a>2)$

34. 답 ④

[해설] 곡선 $y=x^2(x-1)(x-2a)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분은 오른쪽 그림과 같다. 이때, 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$\int_0^{2a}x^2(x-1)(x-2a)\,dx$

$=\int_0^{2a}\{x^4-(2a+1)x^3+2ax^2\}dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{(2a+1)}{4}x^4+\frac{2a}{3}x^3\right]_0^{2a}$

$=\frac{32}{5}a^5-4(2a+1)a^4+\frac{16}{3}a^4=0$

$\frac{32}{5}a-4(2a+1)+\frac{16}{3}=0$

$\frac{8}{5}a=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore a=\frac{5}{6}$

35. 답 ⑤

[해설] 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 A, B의 넓이가 같으므로

$\int_0^b\{x^4-(a+b)x^3+abx^2\}dx=0$

$\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{a+b}{4}x^4+\frac{ab}{3}x^3\right]_0^b=0$

$\frac{1}{5}b^5-\frac{1}{4}(a+b)b^4+\frac{1}{3}ab^4=0$

$\frac{1}{60}b^4\{12b-15(a+b)+20a\}=0$

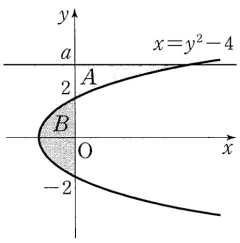
$b^4(5a-3b)=0$

$b \neq 0$이므로 $5a - 3b = 0$

$\therefore \dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{3}$

36. 답 4

[해설] 주어진 조건을 그림으로 나타내면 다음과 같이 A, B부분의 넓이가 같게 된다.



따라서 A, B부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{-2}^{a}(y^2-4)dy = \left[\frac{1}{3}y^3 - 4y\right]_{-2}^{a} = \frac{1}{3}a^3 - 4a - \frac{16}{3} = 0$$

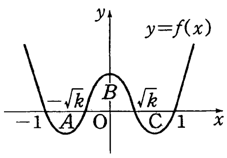
$a^3 - 12a - 16 = 0$, $(a-4)(a+2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 4\ (\because a > 2)$

37. 답 ②

[해설] $f(x) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{k})(x+\sqrt{k})$

$0 < \sqrt{k} < 1$이므로 $y = f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)$는 우함수이므로 $A = C$

$A + C = B$이므로 $A = C = \dfrac{1}{2}B$

즉, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2-1)(x^2-k)dx = 0$이므로

$$\int_0^1 \{x^4 - (1+k)x^2 + k\}dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1+k}{3}x^3 + kx\right]_0^1 = 0$$

$\dfrac{1}{5} - \dfrac{1+k}{3} + k = 0 \qquad \therefore\ k = \dfrac{1}{5}$

38. 답 ②

[해설]

세 점 A, B, C의 x좌표는

$x^3 - 2x^2 + x + a = b^2x + a$에서

$x^3 - 2x^2 + (1-b^2)x = 0$

$x\{x-(1-b)\}\{x-(1+b)\} = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 1-b$또는 $x = 1+b$

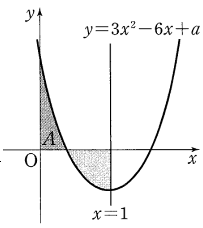
곡선 $y = x^3 - 2x^2 + x + a$와 세 선분 OA, OD, CD로 둘러싸인 부분의 넓이가 사각형 $OACD$의 넓이가 같으므로 곡선과 직선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같다.

$$\therefore \int_0^{1+b}\{(x^3 - 2x^2 + x + a) - (b^2x + a)\}dx = 0$$

$$\int_0^{1+b}\{x^3 - 2x^2 + (1-b^2)x\}dx = 0$$

39. 답 ②

[해설] $y = 3x^2 - 6x + a = 3(x-1)^2 + a - 3$ 이므로 곡선 $y = 3x^2 - 6x + a$는 직선 $x = 1$에 대하여 대칭이다.



따라서 두 부분 A, B의 넓이의 비가 1 : 2 이므로 A의 넓이와 곡선과 x축 및 직선 $x = 1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_0^1 (3x^2 - 6x + a)dx = \left[x^3 - 3x^2 + ax\right]_0^1$$

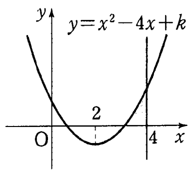
$$= 1 - 3 + a = 0$$

$\therefore a = 2$

40. 답 ③

[해설] 곡선 $y = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4$는 직선 $x = 2$에 대하여 대칭이고 A : B = 2 : 1이므로

오른쪽그림에서 어두운 두 부분의 넓이는 같다.



즉, $\displaystyle\int_2^4 (x^2 - 4x + k)dx = 0$이므로

$$\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + kx\right]_2^4 = 0$$

$$\left(\frac{64}{3} - 32 + 4k\right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 2k\right) = 0$$

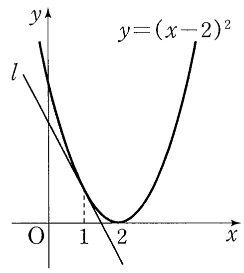
$2k - \dfrac{16}{3} = 0 \qquad \therefore k = \dfrac{8}{3}$

41. 답 ④

[해설] $y = x^2 - 4x + 4$에서 $y' = 2x - 4$

곡선 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 -2이므로 접선 l의 방정식은 $y - 1 = -2(x-1)$ $\quad \therefore y = -2x + 3$

이 때, 곡선 $y = x^2 - 4x + 4$와 접선 l로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이 S는

$$S = \int_0^1 \{(x^2 - 4x + 4) - (-2x + 3)\}dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

42. 답 ⑤

[해설] $y = -x^2 + 3x$에서 $y' = -2x + 3$이므로 $x = 2$에서의 접선의 기울기는 -1이다.

점 P(2, 2)에서의 접선의 방정식은

$y - 2 = -(x-2)$, 즉 $y = -x + 4$

따라서, 이 접선은 두 점 $(0,\ 4)$, $(4,\ 0)$을 지난다.

그러므로 접선과 x축, y축이 이루는 삼각형의 넓이를 T라 하면

$\mathrm{T}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4=8$

한편, 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$\mathrm{S}=\displaystyle\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2\right]_0^3=\dfrac{9}{2}$

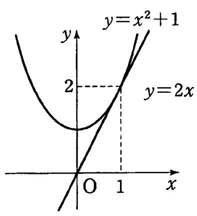
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{T}-\mathrm{S}=8-\dfrac{9}{2}=\dfrac{7}{2}$

43. 답 ①

[해설] $y'=2x$이므로 점 $(1,\ 2)$에서 접선의 방정식은

$y-2=2(x-1)$, 즉 $y=2x$

따라서, 구하는 넓이는



$\mathrm{S}=\displaystyle\int_0^1(x^2+1)dx-\int_0^1 2x\,dx$

$=\displaystyle\int_0^1(x^2-2x+1)dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{3}-1+1=\dfrac{1}{3}$

44. 답 ②

[해설]

$f(x)=x^3-6x^2+32$ 에서 $f'(x)=3x^2-12x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 27)$ 에서의 접선 l의 기울기는

$f'(1)=3-12=-9$

이므로 접선 l의 방정식은 $y-27=-9(x-1)$

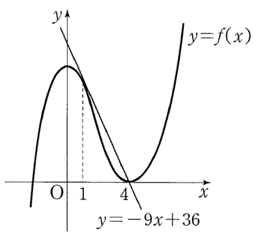
$\therefore\ \ y=-9x+36$

따라서 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+32$ 의 그래프와 접선 l의 교점의 x좌표는 $x^3-6x^2+32=-9x+36$

$x^3-6x^2+9x-4=0$

$(x-1)^2(x-4)=0$

$\therefore\ \ x=1$ 또는 $x=4$



이때, 곡선 $y=f(x)$와 접선 l로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이 S는

$S=\displaystyle\int_1^4\{-9x+36-(x^3-6x^2+32)\}dx$

$=\displaystyle\int_1^4(-x^3+6x^2-9x+4)dx$

$=\left[-\dfrac{1}{4}x^4+2x^3-\dfrac{9}{2}x^2+4x\right]_1^4$

$=\dfrac{27}{4}$

45. 답 173

[해설]

$y=x^2$에서 $y'=2x$

곡선 $y=x^2$위의 점 $P(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $2\times 1=2$이므로 점 $P(1,\ 1)$에서의 법선의 방정식은

$y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$의 교점의 x좌표는

$x^2=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

$2x^2+x-3=0$

$(2x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^1\left\{\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\right)-x^2\right\}dx$

$=\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^1\left(-x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{6}\left\{1-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right\}^3$

$=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^3$

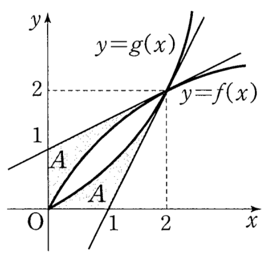
$=\dfrac{125}{48}$

$\therefore p+q=48+125=173$

46. 답 ②

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 접선 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $y=2x-2$ 는 역함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선이므로 다음 그림과 같이 어두운 두 부분의 넓이는 A로 같다.



$\therefore\ \ \displaystyle\int_0^2 g(x)dx\ =A+\dfrac{1}{2}\times(2-1)\times 2\ =A+1$

47. 답 ②

[해설] $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는
직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.
또한, $f(0)=3$, $f(2)=11$에서
$g(3)=0$, $g(11)=2$이므로 두 함수의
그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore \int_{g(3)}^{g(11)} f(x)dx+\int_{f(0)}^{f(2)} g(0)dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_3^{11} g(x)dx$$

이때, 정적분 $\int_3^{11} g(x)dx$의 값은 $y=f(x)$의 그래프와 y축 및
직선 $y=11$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$$\therefore 2\int_{g(3)}^{g(11)} f(x)dx+\int_{f(0)}^{f(2)} g(x)dx$$
$$=2\int_0^2 f(x)dx+\int_3^{11} g(x)dx$$
$$=\left(\int_0^2 f(x)dx+\int_3^{11} g(x)dx\right)+\int_0^2 f(x)dx$$
$$=2\times 11+\int_0^2 (x^3+3)dx=2\times 11+\left[\frac{1}{4}x^4+3x\right]_0^2$$
$$=22+10=32$$

48. 답 ③

[해설] 구하는 부피 V는 $V=\int_1^3 (x+1)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^3=6$

49. 답 ②

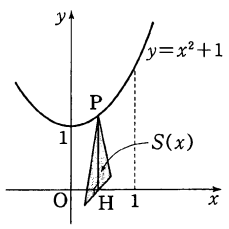
[해설] 물의 깊이가 x일 때, 수면의 넓이는 $\mathrm{S}(x)$라고 하면
$\mathrm{S}(x)$는 반지름의 길이가 $\sqrt{x+1}$인 원의 넓이이므로
$\mathrm{S}(x)=\pi(\sqrt{x+1})^2=\pi(x+1)$
따라서, 물의 깊이가 8일 때의 물의 부피를 V라 하면

$$\mathrm{V}=\int_0^8 \mathrm{S}(x)dx=\pi\int_0^8 (x+1)dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^8=\pi(32+8)=40\pi$$

$\therefore k=40$

50. 답 ③

[해설] 곡선 $y=x^2+1$위의 점 P에서
x축에 내린 수선의 발이 H이므로
$\overline{\mathrm{PH}}=y=x^2+1$
입체의 단면은 높이가 x^2+1인 정삼
각형이므로 이 정삼각형의 한 변의
길이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}(x^2+1)$
정삼각형의 넓이를 $\mathrm{S}(x)$라 하면



$$\mathrm{S}(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}(x^2+1)\times(x^2+1)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^4+2x^2+1)$$

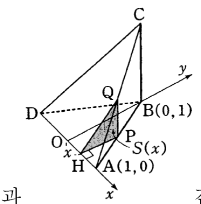
따라서, 구하는 입체의 부피는

$$\int_0^1 \mathrm{S}(x)dx=\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{3}(x^4+2x^2+1)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=\frac{28\sqrt{3}}{45}$$

$\therefore k=28$

51. 답 ④

[해설]

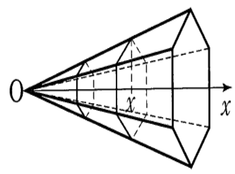


위의 그림과 같이 $\overline{OH}=x$, $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$이므로
직선 AB의 방정식은 $y=-x+1$이다.
$\angle PHQ=45^\circ$이므로 단면의 넓이 $S(x)$는 직각이등변삼각형이고,
$\overline{PH}=\overline{PQ}=y=-x+1$이다.
즉, $S(x)=\frac{1}{2}(-x+1)^2$이므로 $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$

$$\therefore\ V=2\int_0^2 \frac{1}{2}(-x+1)^2dx=\int_0^1 (x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

52. 답 ⑤

[해설] 오른쪽 그림과 같이 O를
원점으로 하고 두 밑면의 중심을
지나는 직선을 x축으로 한다.
점 O에서 작은 밑면까지의 거리를
a라 하면



점 O에서 큰 밑면까지의 거리는 $a+6$이므로
$a\ :\ a+6=2\ :\ 4$ 에서
$2a=a+6$ $\therefore\ a=6$
좌표가 x인 점에서 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자르면
단면은 정육각형이고 그 넓이를 $S(x)$라 하면
밑면의 넓이는 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=6\sqrt{3}$이므로
$6\sqrt{3}\ :\ S(x)=6^2\ :\ x^2$

$$\therefore\ S(x)=\frac{6\sqrt{3}}{36}x^2=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$$

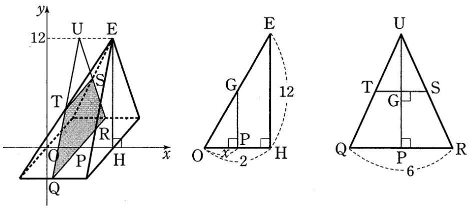
따라서, 입체의 부피는

$$V=\int_6^{12}\frac{\sqrt{3}}{6}x^2dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{18}x^3\right]_6^{12}=84\sqrt{3}$$

$\therefore\ k=84$

53. 답 ⑤

[해설]



위의 그림에서 $\triangle OHE \backsim \triangle OPG$이므로

$x : \overline{PG} = 2 : 12 \qquad \therefore \overline{PG} = 6x$

또한, $\triangle UQR \backsim \triangle UTS$이므로

$\overline{UP} : \overline{QR} = \overline{UG} : \overline{TS}$

$12 : 6 = (12-6x) : \overline{TS}$

$\therefore \overline{TS} = 6-3x$

따라서 $0<x<2$일 때, 단면인 등변사다리꼴 $TQRS$의 넓이는

$$S(x) = \frac{1}{2}\{(6-3x)+6\}\times 6x$$
$$= \boxed{9(4x-x^2)}$$

$2 \le x < 10$일 때, 단면의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 12 = 36$으로 일정하므로

$$S(x) = \boxed{36}$$

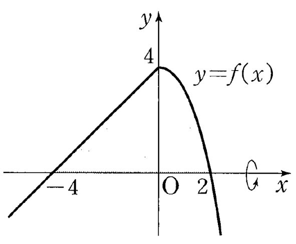
또한 $10 \le x < 12$일 때의 부피는 $0<x<2$일 때의 부피와 같으므로 오면체 $ABCDEF$의 부피 V는

$$V = 2\int_0^2 \boxed{9(4x-x^2)}dx + \int_2^{10}\boxed{36}dx$$
$$= 18\left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 + 35[x]_2^{10}$$
$$= 96+288$$
$$= \boxed{384}$$

$\therefore$ (가) $9(4x-x^2)$, (나) 36, (다) 384

54. 답 ④

[해설] 함수 $f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & (x \ge 0) \\ x+4 & (x<0) \end{cases}$ 의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V = \pi\int_{-4}^0 (x+4)^2dx + \pi\int_0^2(-x^2+4)^2dx$$
$$= \pi\int_{-4}^0(x^2+8x+16)dx + \pi\int_0^2(x^4-8x^2+16)dx$$
$$= \pi\left[\frac{1}{3}x^3+4x^2+16x\right]_{-4}^0 + \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^2$$
$$= \frac{64}{3}\pi + \frac{256}{15}\pi = \frac{192}{5}\pi$$

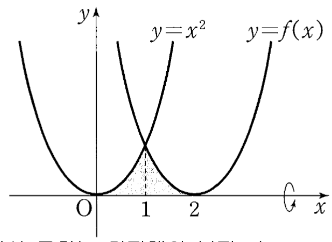
55. 답 ②

[해설]

포물선 $y=x^2$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$f(x) = (x-2)^2$

이므로 두 곡선$y=x^2$과$f(x)=(x-2)^2$ 으로 둘러싸인 부분 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V = 2\pi\int_0^1 x^4\,dt = 2\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{5}\pi$$

56. 답 ③

[해설]

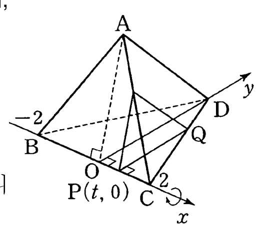
$\int_0^x \{f(t)\}^2dt = x^2$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\{f(x)\}^2 = 2x$

따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V = \int_1^2 \{f(x)\}^2dx = \int_1^2 2xdx = \pi[x^2]_1^2 = 3\pi$$

57. 답 ②

[해설] 오른쪽 그림에서 $0 \le t \le 2$일 때,



$\overline{OD} : \overline{PD} = 2 : (2-t)$

이고, $\overline{OD} = 2\sqrt{3}$ 이므로

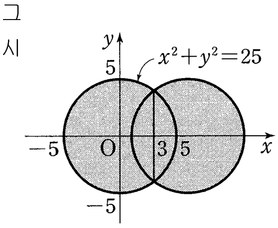
$\overline{PQ} = \sqrt{3}(2-t)$

한편, 변 BC를 회전축으로 하는 회전체에서 $x=t$ $(0 \le t \le 2)$인 점에서의 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{3}(2-t)$인 원이므로 구하는 회전체의 부피는

$$2\times\pi\int_0^2\{\sqrt{3}(2-t)\}^2dt = 6\pi\int_0^2(t^2-4t+4)dt$$
$$= 6\pi\left[\frac{t^2}{3} - 2t^2+4t\right]_0^2$$
$$= 16\pi$$

58. 답 ③

[해설] 구하는 입체도형의 부피는 오른쪽 그림에서 어두운 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피와 같다.



$$\therefore 2\pi\int_{-5}^3 y^2dx$$
$$= 2\pi\int_{-5}^3(25-x^2)dx$$
$$= 2\pi\left[25x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-5}^3$$

$= 2\pi \times \dfrac{448}{3}$

$= \dfrac{896}{3}\pi$

59. 답 ②

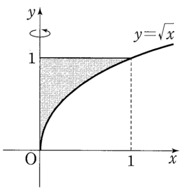
[해설] 구하는 부피 V는

$V = \pi\int_0^2(\sqrt{x})^2dx = \pi\int_0^2 xdx = \pi\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 2\pi$

60. 답 ④

[해설] 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 직선 $y = 1$ 및 y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같다. 이 때, $y = \sqrt{x}$ 에서 $x^2 = y^4$ 이므로 구하는 부피 V는 $V = \pi\int_0^1 x^2dy = \pi\int_0^1 y^4dy = \pi\left[\dfrac{1}{5}y^5\right]_0^1$

$= \dfrac{\pi}{5}$



61. 답 ②

[해설] $y = -2x^2 + k$에서

$x^2 = \dfrac{k}{2} - \dfrac{y}{2}$

따라서, 구하는 회전체의 부피는

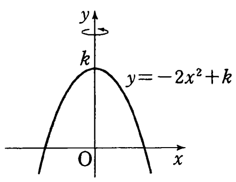
$\pi\int_0^k x^2dy = \pi\int_0^k\left(\dfrac{k}{2} - \dfrac{y}{2}\right)dy$

$= \pi\left[\dfrac{k}{2}y - \dfrac{1}{4}y^2\right]_0^k$

$= \dfrac{1}{4}k^2\pi$

$\dfrac{1}{4}k^2\pi = \dfrac{9}{4}\pi$이므로 $k^2 = 9$

$\therefore k = 3 \quad (\because k > 0)$



62. 답 ③

[해설]

점 $B(x,\ y)$의 좌표는

$x = 2\sqrt{3}\cos 30^\circ = 3,\quad y = 2\sqrt{3}\sin 30^\circ = \sqrt{3}$ 이므로

$0 \le x \le 3$일 때, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

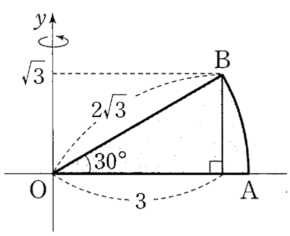
$3 \le x \le 2\sqrt{3}$일 때, $x^2 + y^2 = 12$

따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$V = \pi\int_0^{\sqrt{3}}\{(12 - y^2) - (\sqrt{3}y)^2\}dy$

$= \pi\int_0^{\sqrt{3}}\{(12 - 4y^2)\}dy$

$= \pi\left[12y - \dfrac{4}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}\pi$



63. 답 ⑤

[해설]

ㄱ. (가) 부분의 넓이는

$\int_0^b ax^2dx = \left[\dfrac{1}{3}ax^3\right]_0^b = \dfrac{1}{3}ab^3$

(나) 부분의 넓이는 직사각형 $OABC$의 넓이에서 (가) 부분의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$ab^3 - \dfrac{1}{3}ab^3 = \dfrac{2}{3}ab^3$

그러므로 (가), (나) 부분의 넓이의 비는 항상

$\dfrac{1}{3}ab^3 : \dfrac{2}{3}ab^3 = 1:2$이다. (참)

ㄴ. $V_x = \pi\int_0^b(ax^2)^2dx = a^2\pi\left[\dfrac{1}{5}x^5\right]_0^b = \dfrac{\pi}{5}a^2b^5$

$V_y = \pi\int_0^{ab^2}\left(\dfrac{1}{a}y\right)dy = \dfrac{\pi}{a}\left[\dfrac{1}{2}y^2\right]_0^{ab^2} = \dfrac{\pi}{2}ab^4$

이 때, $ab = 1$이면 $b = \dfrac{1}{a}$이므로

$V_x = \dfrac{\pi}{5}a^2 \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right)^2 = \dfrac{\pi}{5a^3}$

$V_y = \dfrac{\pi}{2}a \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right)^4 = \dfrac{\pi}{2a^3}$

$\therefore V_x : V_y = \dfrac{\pi}{5a^3} : \dfrac{\pi}{2a^3} = \dfrac{1}{5} : \dfrac{1}{2} = 2:5$ (참)

ㄷ. $V_x = V_y$이면 $\dfrac{\pi}{5}a^2b^5 = \dfrac{\pi}{2}ab^4$에서

$\dfrac{1}{5}ab = \dfrac{1}{2}$

$\therefore ab = \dfrac{5}{2}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

64. 답 20

[해설] 컵의 바닥으로부터의 물의 높이 $h = 1$일 때의 공명주파수는

$\dfrac{a}{4(5-1)} = \dfrac{a}{16} = k$

공명주파수가 $2k = \dfrac{a}{8}$일 때의 물의 높이를 h라 하면

$\dfrac{a}{4(5-h)} = \dfrac{a}{8}$에서 $h = 3$

따라서, 더 부어야 하는 물의 양 V는

$V = \pi\int_1^3 ydy = \pi\left[\dfrac{1}{2}y^2\right]_1^3 = \pi\left(\dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = 4\pi$

$\therefore \dfrac{5V}{\pi} = 20$

65. 답 ①

[해설] 회전체를 y $(0 \leq y \leq 3)$축에 수직이 되게 자른 단면의 모양은 부채꼴이므로 단면의 넓이 $S(y)$는 부채꼴의 넓이이다.

부채꼴의 반지름의 길이는 x이고, 중심각의 크기는 $\dfrac{2}{5}\pi$이므로

$S(y) = \dfrac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{1}{2} \cdot y \cdot \dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{\pi}{5}y$

$\therefore\ S(2) = \dfrac{2}{5}\pi$

따라서, 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^3 S(y)dy=\int_0^3 \frac{\pi}{5}y\,dy$$

$$=\frac{\pi}{5}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3=\frac{9}{10}\pi$$

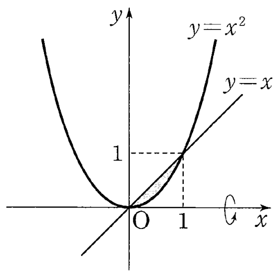
66. 답 ②

[해설] 포물선 $y=x^2$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 x좌표는

$x^2=x,\quad x(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\pi\int_0^1(x^2-x^4)dx \quad =\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{2}{15}\pi$$



67. 답 113

[해설] 포물선 $y=-x^2+4x$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x좌표는

$-x^2+4x=x,\ x^2-3x=0,\quad x(x-3)=0$

$\therefore\quad x=0$ 또는 $x=3$

따라서 포물선 $y=-x^2+4x$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 회전체의 부피 V는

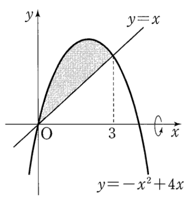
$$V=\pi\int_0^3\{(-x^2+4x)^2-x^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^3(x^4-8x^3+15x^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-2x^4+5x^3\right]_0^3$$

$$=\frac{108}{5}\pi$$

$\therefore\quad p+q=113$



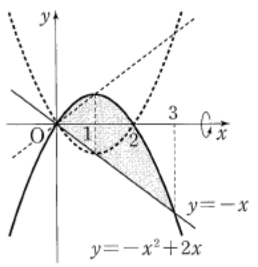
68. 답 23

[해설] 포물선 $y=-x^2+2x$와 $y=-x$의 교점은

$-x^2+2x=-x,\quad x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

이때, 포물선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=-x$로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^1(-x^2+2x)^2dx+\pi\int_1^3(-x)^2dx-\pi\int_2^3(-x^2+2x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1(x^4-4x^3+4x^2)^2dx+\pi\int_1^3 x^2dx-\pi\int_2^3(x^4-4x^3+4x^2)^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1+\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3-\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_2^3$$

$$=\frac{8}{15}\pi+\frac{26}{3}\pi-\frac{38}{15}\pi=\frac{20}{3}\pi$$

$\therefore p+q=23$

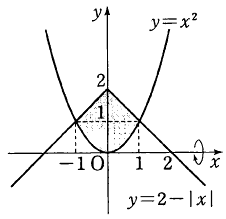
69. 답 ②

[해설] 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2-x\ (x\geq 0)$의 교점의 x좌표는

$x^2=2-x$에서 $x^2+x-2=0,\ (x+1)(x-1)=0$

$x\geq 0$이므로 $x=1$

따라서, 구하는 부피는



$$2\pi\int_0^1\{(2-x)^2-x^4\}dx$$

$$=2\pi\int_0^1(-x^4+x^2-4x+4)dx$$

$$=2\pi\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_0^1$$

$$=\frac{64}{15}\pi$$

$\therefore\ k=64$

70. 답 27

[해설] 포물선 $y^2=12x$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y=x+3$이므로 $a=3$

포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=x+3$의 접점의 x좌표를 구하면

$(x+3)^2=12x$에서

$x^2-6x+9=0,\ (x-3)^2=0$

$\therefore x=3$

따라서, 구하는 회전체의 부피는

$$\pi\int_0^3(x+3)^2dx-\pi\int_0^3 12x\,dx$$

$$=\pi\int_0^3(x^2-6x+9)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3=9\pi$$

$\therefore b=9$

$\therefore ab=3\cdot 9=27$

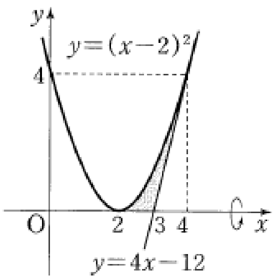
71. 답 ②

[해설]

포물선 $y=x^2-4x+4$에서 $y'=2x-4$ 이므로 이 포물선 위의 점$(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=(2\times 4-4)(x-4) \qquad \therefore y=4x-12$

이때, 포물선 $y=x^2-4x+4=(x-2)^2$과 직선 $y=4x-12$ 및 x축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$V=\pi\int_2^4(x^2-4x+4)^2dx-\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times1$

$=\pi\int_2^4(x^4-8x^3+24x^2-32x+16)dx-\frac{16}{3}\pi$

$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-2x^4+8x^3-16x^2+16x\right]_2^4-\frac{16}{3}\pi$

$=\frac{32}{5}\pi-\frac{16}{3}\pi=\frac{16}{15}\pi$

다른풀이

구하는 회전체의 부피는 포물선 $y=x^2-4x+4$ 와 접선 $y=4x-12$를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선 $y=x^2$ 과 직선 $y=4x-12$ 및 x축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피와 같으므로

$V=\pi\int_0^2x^4dx-\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times1$

$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2-\frac{16}{3}\pi$

$=\frac{32}{5}\pi-\frac{16}{3}\pi=\frac{16}{15}\pi$

72. 답 47

[해설]

원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2+1$에 접하는 직선을 $y=ax$라 하면 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2+1=ax$, 즉 $x^2-4ax+4=0$이 중근을 가지므로

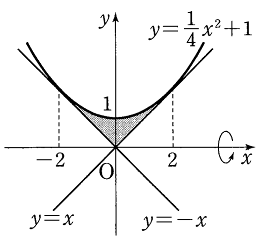
$\frac{D}{4}=4a^2-4=0 \qquad \therefore a=\pm1$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$

또한 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2+1$과 접선 $y=-x$, $y=x$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{4}x^2+1=-x$, 즉 $x^2+4x+4=0$에서 $x=-2$

$\frac{1}{4}x^2+1=x$, 즉 $x^2-4x+4=0$에서 $x=2$



따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$V=2\pi\int_0^2\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)^2-x^2\right\}dx$

$=2\pi\int_0^2\left(\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^2+1\right)dx$

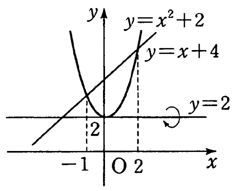
$=2\pi\left[\frac{1}{80}x^5-\frac{1}{6}x^3+x\right]_0^2$

$=\frac{32}{15}\pi$

$\therefore p+q=15+32=47$

73. 답 72

[해설] $x^2+2=x+4$에서



$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

구하는 회전체의 부피는 곡선과 직선을 각각 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x+2$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피와 같다.

따라서, 구하는 부피는

$V=\pi\int_{-1}^2\{(x+2)^2-(x^2)^2\}dx$

$=\pi\int_{-1}^2(-x^4+x^2+4x+4)dx$

$=\pi\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right]_{-1}^2$

$=\pi\left(\frac{184}{15}+\frac{32}{15}\right)=\frac{72}{5}\pi$

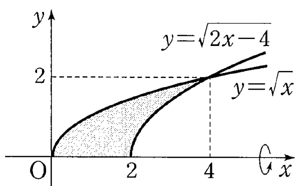
$\therefore \frac{5V}{\pi}=\frac{5}{\pi}\times\frac{27}{5}\pi=72$

74. 답 ④

[해설] 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2x-4}$ 의 교점의 x좌표는

$\sqrt{x}=\sqrt{2x-4}$, $\quad x=2x-4 \quad \therefore \quad x=4$

이때, 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2x-4}$ 와 x축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$V=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2dx-\pi\int_2^4(\sqrt{2x-4})^2dx$

$=\pi\int_0^4xdx-\pi\int_2^4(2x-4)dx$

$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4-\pi\left[x^2-4x\right]_2^4$

$=8\pi-4\pi=4\pi$

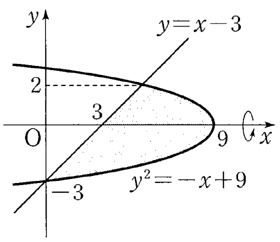
75. 답 ③

[해설] 포물선 $y^2=-x+9$와 직선 $y=x-3$의 교점의 y좌표는

$y^2=(-y-3)+9,\quad y^2+y-6=0,\quad (y+3)(y-2)=0$

$\therefore\ y=-3$ 또는 $y=2$

이 때, 포물선 $y^2=-x+9$와 직선 $y=x-3$으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^3\{(-x+9))-(x-3)^2\}dx+\pi\int_3^9(-x+9)dx$$

$$=\pi\int_0^3(-x^2+5x)dx+\pi\int_3^9(-x+9)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_0^3+\pi\left[-\frac{1}{2}x^2+9x\right]_3^9$$

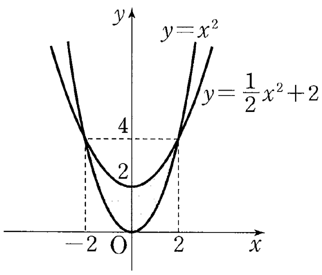
$$=\frac{27}{2}\pi+18\pi\ =\frac{63}{2}\pi$$

76. 답 ④

[해설] 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2+2$의 교점의 x좌표는

$x^2=\frac{1}{2}x^2+2,\quad x^2=4\quad \therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

이때, 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2+2$로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_{-2}^2\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)^2-x^4\right\}dx$$

$$=\pi\int_{-2}^2\left(-\frac{3}{4}x^4+2x^2+4\right)dx$$

$$=2\pi\int_0^2\left(-\frac{3}{4}x^4+2x^2+4\right)dx$$

$$=2\pi\left[-\frac{3}{20}x^5+\frac{2}{3}x^3+4x\right]_0^2$$

$$=\frac{256}{15}\pi$$

77. 답 ⑤

[해설] $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로 $\int_1^2 f(x)dx=1$

따라서, 구하는 회전체의 부피를 V_x라 하면

$$V_x=\pi\int_1^2\{2f(x)+3\}^2dx-\pi\int_1^2\{2f(x)\}^2dx$$

$$=\pi\int_1^2[4\{f(x)\}^2+12f(x)+9-4\{f(x)\}^2]dx$$

$$=\pi\int_1^2\{12f(x)+9\}dx=\pi\left\{12\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 9dx\right\}$$

$$=\pi(12+9)$$

$$=21\pi$$

78. 답 ④

[해설]

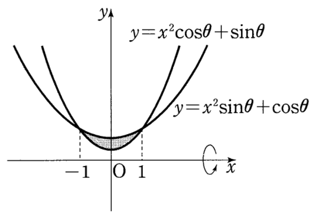
$0<\theta<\frac{\pi}{4}$이면 $0<\sin\theta<\cos\theta$이고,

$x^2\sin\theta+\cos\theta=x^2\cos\theta+\sin\theta$에서

$(\sin\theta-\cos\theta)x^2=\sin\theta-\cos\theta$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ ($\because \sin\theta-\cos\theta\neq 0$)

따라서 두 곡선은 다음과 같다.



두 곡선으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_{-1}^1\{(x^2\sin\theta+\cos\theta)^2-(x^2\cos\theta+\sin\theta)^2\}dx$$

$$=\pi\int_{-1}^1\{(\sin^2\theta-\cos^2\theta)x^4+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\}dx$$

$$=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\pi\int_{-1}^1(x^4-1)dx$$

$$=2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\pi\int_0^1(x^4-1)dx$$

$$=2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x\right]_0^1$$

$$=-\frac{8}{5}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\pi$$

$-\frac{8}{5}\pi(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=\frac{2}{5}\pi$에서

$-8(2\sin^2\theta-1)=2$ ($\because \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$)

$\therefore \sin^2\theta=\frac{3}{8}$

79. 답 ③

[해설]

$x^n=x^{n+1}$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로

$V_n = \pi\int_0^1 \{(x^n)^2 - (x^{n+1})^2\}\,dx = \pi\int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+2})\,dx$

$= \pi\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} - \frac{1}{2n+3}x^{2n+3}\right]_0^1$

$= \pi\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{10}{33}\pi$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} = \frac{10}{33}$, $\quad \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{33}$

$2n+3 = 33$, $\ 2n = 30 \quad \therefore n = 15$

80. 답 ⑤

[해설]

조건 (가)에 의하여

$y = \frac{f(a)+g(a)}{2} = \frac{1}{2}(3a+2)$

$\therefore f(a)+g(a) = 3a+2 \cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에 의하여

$\pi\int_1^a [\{f(a)\}^2 - \{g(a)\}^2]\,dx = \pi(a^3+a^2)$

이므로 양변을 a에 대하여 미분하면

$\pi[\{f(a)\}^2 - \{g(a)\}^2] = \pi(3a^2+2a)$

$\{f(a)\}^2 - \{g(a)\}^2 = 3a^2+2a = a(3a+2)$

$\{f(a)-g(a)\}\times\{f(a)+g(a)\} = a(3a+2)$

$\therefore f(a)-g(a) = a \quad (\because$ ㉠ $)$

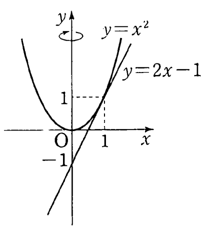
따라서 구하는 넓이 S는

$S = \int_2^3 f(x)-g(x)dx = \int_2^3 x\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^3 = \frac{5}{2}$

81. 답 ①

[해설] $y' = 2x$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 $y-1 = 2(x-1)$, 즉 $y = 2x-1$ 오른쪽 그림에서 구하는 회전체의 부피는



$\pi\int_{-1}^1 \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 dy - \pi\int_0^1 y\,dy$

$= \frac{\pi}{4}\int_{-1}^1 (y^2+2y+1)dy - \pi\int_0^1 y\,dy$

$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{y^3}{3}+y^2+y\right]_{-1}^1 - \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1$

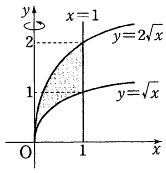
$= \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2}$

$= \frac{\pi}{6}$

82. 답 ②

[해설] $y = \sqrt{x}$에서 $x = y^2$

$y = 2\sqrt{x}$에서 $\sqrt{x} = \frac{1}{2}y$



$\therefore x = \frac{1}{4}y^2$

따라서, 구하는 회전체의 부피는

$\pi\int_0^1 \left\{(y^2)^2 - \left(\frac{1}{4}y^2\right)^2\right\}dy + \pi\int_1^2 \left\{1^2 - \left(\frac{1}{4}y^2\right)^2\right\}dy$

$= \pi\int_0^1 \frac{15}{16}y^4\,dy + \pi\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{16}y^4\right)dy$

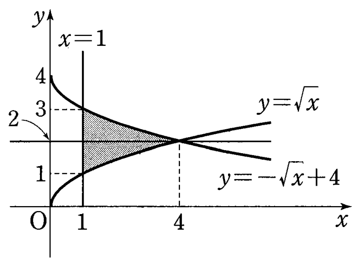
$= \pi\left[\frac{3}{63}y^5\right]_0^1 + \pi\left[y - \frac{1}{80}y^5\right]_1^2$

$= \frac{3}{16}\pi + \frac{49}{80}\pi$

$= \frac{4}{5}\pi$

83. 답 ④

[해설]



$\sqrt{x} = -\sqrt{x}+4$에서 $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$이므로 두 곡선의 교점의 좌표는 $(4,\ 2)$이다.

또한 $y = -\sqrt{x}+4$의 그래프는 $y = \sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 다음, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선은 직선 $y = 2$에 대하여 대칭이다.

따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$V = 2\left\{\pi\int_1^2 x^2 dy - \pi\int_1^2 1dy\right\}$

$= 2\pi\left\{\int_1^2 y^4 dy - \int_1^2 1dy\right\}$

$= \pi\left\{\frac{1}{5}(2^5-1^5) - (2-1)\right\}$

$= \frac{52}{5}\pi$

84. 답 ①

[해설] 원 $x^2+y^2 = 4$와 직선

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, 즉 $x = \sqrt{3}\,y$의 교점의

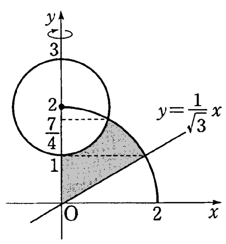
y좌표는 $3y^2+y^2 = 4$에서

$y = 1 \ (\because\ y > 0)$

두 원의 교점의 y좌표는

$y^2 - (y-2)^2 = 3$에서 $4y-4 = 3$

$\therefore\ y = \frac{7}{4}$



따라서, 구하는 회전체의 부피를 V_y 라 하면

$$V_y=\pi\int_0^1(\sqrt{3}\,y)^2dy+\pi\int_1^{\frac{7}{4}}(4-y^2)dy-\pi\int_1^{\frac{7}{4}}\{1-(y-2)\}^2dy$$

$$=3\pi\int_0^1 y^2dy+\pi\int_1^{\frac{4}{7}}(-4y+7)dy$$

$$=3\pi\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1+\pi\left[-2y^2+7y\right]_1^{\frac{7}{4}}$$

$$=\pi+\frac{9}{8}\pi=\frac{17}{8}\pi$$

85. 답 ⑤

[해설] 두 점 A, B의 t초 후의 위치가 각각

$-3+\int_0^t(2t-2)dt$, $4+\int_0^t 4dt$이므로

$-3+\int_0^t(2t-2)dt=4+\int_0^t 4dt$

$-3+\left[t^2-2t\right]_0^t=4+\left[4t\right]_0^t$

$-3+t^2-2t=4+4t$

$t^2-6t-7=0$, $(t+1)(t-7)=0$

$\therefore t=7$ ($\because t>0$)

따라서, 두 점은 7초 후에 만난다.

86. 답 ②

[해설] 6초 동안 점 P가 움직인 거리는

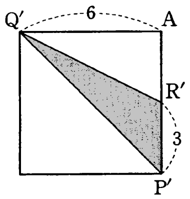
$\int_0^6(2t+1)dt=\left[t^2+t\right]_0^6=42$

6초 동안 점 Q가 움직인 거리는

$\int_0^6 5dt=\left[5t\right]_0^6=30$

6초 동안 점 R가 움직인 거리는

$\int_0^6\left(t+\frac{1}{2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t\right]_0^6=21$



이므로 점 P', Q', R'의 위치는 각각

$42=6\times7$, $30=6\times5$, $21=6\times3+3$

으로 오른쪽 그림과 같다.

$\overline{P'R'}=3$, $\overline{AQ'}=6$이므로 $\triangle P'QR'$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times6=9$

87. 답 ③

[해설]

t초 동안 두 점 A, B의 위치 x_A, x_B는 각각

$x_A=\int_0^t(6t^2-8t+14)\,dt=\left[2t^3-4t^2+14t\right]_0^t$

$=2t^3-4t^2+14t$

$x_B=3+\int_0^t(3t^2+4t+5)\,dt=3+\left[t^3+2t^2+5t\right]_0^t$

$=t^3+2t^2+5t+3$

방정식 $x_A=x_B$를 만족하는 t의 값의 개수와 두 점 A, B가 만나는 횟수가 같으므로

$2t^3-4t^2+14t=t^3+2t^2+5t+3$ 에서

$t^3-6t^2+9t-3=0$

$f(t)=t^3-6t^2+9t-3$이라 하면

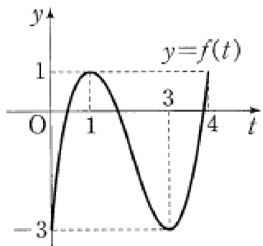
$f(t)'=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

$f(t)'=0$에서 $t=1$또는 $t=3$

$t=1$에서 극댓값은 $f(1)=1$,

$t=3$에서 극댓값은 $f(3)=-3$이고

$f(0)=-3$, $f(4)=1$ 이므로 $0\le t\le 4$에서 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $f(t)=0$ 을 만족하는 t의 값은 모두 3개이므로 두 점 A, B는 3번 만난다.

88. 답 ⑤

[해설] 출발한 지 t초 후 두 점 A, B의 위치를 각각 $s_A(t)$, $s_B(t)$라고 하면

$s_A(t)=\int_0^t t(a-t)(2a-t)dt$

$=\int_0^t(t^3-3at^2+2a^2t)dt$

$=\frac{t^4}{4}-at^3+a^2t^2$

$s_B(t)=\int_0^t(b-2t)dt=-t^2+bt$

$s_A(t)=s_B(t)$에서 $\frac{t^4}{4}-at^3+a^3t^2=-t^2+bt$

$\frac{t^4}{4}-at^3+(a^2+1)t^2=bt$

출발 후 A, B가 만나는 횟수는

$t>0$일 때, 방정식 $\frac{t^3}{4}-at^2+(a^2+1)t=b$ $\cdots$ $(*)$의 실근의 개수와 같으며 함수 $f(t)=\frac{t^3}{4}-at^2+(a^2+1)t$의 그래프와 직선 $y=b$의 교점의 개수와 같다.

ㄱ. $a=1$이면 $f(t)=\frac{t^3}{4}-t^2+2t$이고,

$f'(t)=\frac{3}{4}t^2-2t+2=\frac{3}{4}\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$

이므로 $f(t)$는 증가함수이다.

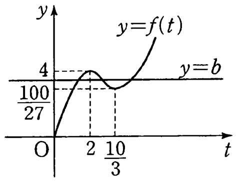
$y=f(t)$의 그래프는 원점을 지나므로 직선 $y=b$ $(b>0)$와 오직 한 점에서 만난다. (참)

ㄴ. $a=2$이면 $f(t)=\frac{t^3}{4}-2t^2+5t$이고,

$f'(t)=\frac{3}{4}t^2-4t+5=\frac{1}{4}(t-2)(3t-10)=0$

$\therefore\ t=2$ 또는 $t=\dfrac{10}{3}$

$f(2)=4$, $f\left(\dfrac{10}{3}\right)=\dfrac{100}{27}$ 이므로
함수 $y=f(t)$의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(t)$의 그래프와
직선 $y=b$가 서로 다른
세 점에서 만나기 위한 b의 값의 범위는
$\dfrac{100}{27}<b<4$ (참)

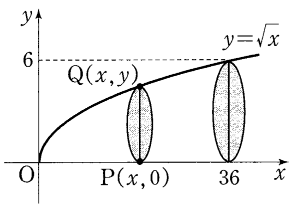
ㄷ. $a=2$, $b=4$일 때, $(*)$에서 방정식 $\dfrac{t^3}{4}-2t^2+5t=4$의 해를 구하면
$t^3-8t^2+20t-16=0$, $(t-2)^2(t-4)=0$
$\therefore\ t=2$ 또는 $t=4$
$s_A(2)=s_B(2)=4$, $s_A(4)=s_B(4)=0$이므로
두 점 A, B는 $t=4$일 때, 원점에서 마지막으로 만난다. (참)
따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

89. 답 162

[해설]
속도 $v(t)=\dfrac{1}{9}(t^2+2t)\geq 0$이고,

$$\int_0^9 v(t)dt=\frac{1}{9}\int_0^9(t^2+2t)dt$$
$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^9$$
$$=36$$

이므로 원점을 출발한 점 P는 9초 동안 x축의 양의 방향으로 36만큼 이동한다.



한편, 단면은 선분 PQ를 지름으로 하는 원이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\pi\left(\frac{\overline{PQ}}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}x$$

따라서 구하는 입체의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{36}S(x)dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{36}x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{36}$$
$$=162\pi$$
$$\therefore k=162$$

90. 답 ②

[해설] 열차가 브레이크를 건 후 정지할 때까지 걸린 시간은
$v(t)=20-at=0 \quad \therefore\ t=\dfrac{20}{a}$
이때, 움직인 거리가 $300\,\mathrm{m}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{20}{a}}(20-at)dt=\left[20t-\frac{a}{2}t^2\right]_0^{\frac{20}{a}}=\frac{200}{a}=300$$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

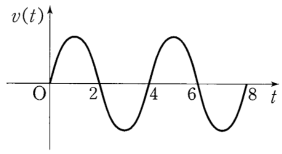
91. 답 ③

[해설] 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^5|t-3|dt=\int_0^3(-t+3)dt+\int_3^5(t-3)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^2+3t\right]_0^3+\left[\frac{1}{2}t^2-3t\right]_3^5=\frac{9}{2}+2=\frac{13}{2}$$

92. 답 ④

[해설] 주어진 조건에 의하여
$y=v(t)$ 의 그래프를 그리면
오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $v(t)=0$ 인 t의 좌우에서
$v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 오른쪽 그래프에서 점 P는 $t=2,\ 4,\ 6$ 일 때, 즉 3번 운동 방향이 바뀐다. (거짓)

ㄴ. $\displaystyle\int_0^4 t(t-2)dx=\int_0 4(t^3-6t^2+8t)dt$

$$=4\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2\right]_0^2=16 \quad \text{(참)}$$

ㄷ. ㄴ에서 $y=v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 모두 같으므로

$$\int_0^8|t(t-2)(t-4)|dt=4\int_0^2 t(t-2)(t-4)dt$$
$$=4\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2\right]_0^2=16 \quad \text{(참)}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

93. 답 ④

[해설]
$x(t)=\dfrac{1}{3}t^3-5t^2+16t$를 미분하면
$f(t)'=v(t)=t^2-10t+16=(t-5)^2-9$
따라서 $2\leq t\leq 9$일 때, $-9\leq v(t)\leq 7$이므로 점 P의 속력이 최고일 때는 $t=5$일 때, $|v(t)|=9$ 이다.
따라서 $t=5$일 때까지 점 P가 움직인 거리 d는

$$d=\int_0^5|v(t)|\,dt=\int_0^5|t^2-10t+16|\,dt$$
$$=\int_0^5|(t-2)(t-8)|\,dt$$
$$=\int_0^2(t^2-10t+16)\,dt+\int_2^5(-t^2+10t-16)\,dt$$

$= \left[\frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 16t\right]_0^2 + \left[-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 - 16t\right]_2^5$

$= \frac{44}{3} + \frac{54}{3} = \frac{98}{3}$

94. 답 ②

[해설]

t초후의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_P, x_Q 라 하면

$$x_P = 5 + \int_0^t (6t+4)dt = 3t^2 + 4t + 5$$

$$x_Q = 45 + \int_0^t (2t+20)dt = t^2 + 20t + 45$$

두점 P, Q가 만나는 순간으 $x_P = x_Q$일 때이므로

$$3t^2 + 4t + 5 = t^2 + 20t + 45$$
$$2t^2 - 16t - 40 = 0$$
$$2(t+2)(t-10) = 0$$
$$\therefore t = 10 \ (\because t > 0)$$

따라서 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{10} |6t+4|dt = \int_0^{10} (6t+4)dt$$
$$= [3t^2 + 4t]_0^{10} = 340$$

95. 답 ②

[해설] 출발 후 $t = 5$일 때의 점 P의 위치가 $\frac{11}{2}$이므로

$\frac{1}{2}(4+1)\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot (-k) = \frac{11}{2}$

$\frac{15}{2} + \frac{k}{2} = \frac{11}{2}$ $\qquad \therefore k = -4$

96. 답 48

[해설]

$v(t) = at(t-2)$로 놓으면 점 P가 $t = 2$일 때 처음으로 운동방향을 바꾸므로 $\int_0^2 v(t)dt = 8$

이때, $a\int_0^2 (t^2 - 2t)dt = a\left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3}a$이므로

$$-\frac{4}{3}a = 8 \quad \therefore a = -6$$

따라서 4초 동안 점 P가 실제로 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^4 |-6t(t-2)|dt$$
$$= \int_0^2 (-6t^2 + 12t)dt + \int_2^4 (6t^2 - 12t)dt$$
$$= [-2t^3 + 6t^2]_0^2 + [2t^3 - 6t^2]_2^4$$
$$= 8 + 40$$
$$= 48`$$

97. 답 ⑤

[해설] 세 자동차 A, B, C의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$라 하자.

ㄱ. '가'지점에서 '나'지점까지의 거리를 l이라 하면

(A의 평균속도)$= \frac{l}{40-0} = \frac{l}{40}$

(C의 평균속도)$= \frac{l}{40-0} = \frac{l}{40}$

이므로 A와 C의 평균속도는 같다. (참)

ㄴ. B의 가속도는 $g'(t) = 0$인 $g(t)$의 극댓값이 존재하므로 $g'(t) = 0$인 t의 값이 존재한다.

C의 가속도는 $h'(t)$이고 $h(t)$의 극댓값, 극솟값이 존재하므로 $h'(t) = 0$인 t의 값이 존재한다. (참)

ㄷ. A, B, C의 속도 그래프와 t축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 각각

$\int_0^{40} f(t)dt$, $\int_0^{30} g(t)dt$, $\int_0^{40} h(t)dt$

이고 이는 각각 세 자동차 A, B, C가 '가'지점에서 '나'지점까지 실제로 움직인 거리이므로 세 값은 모두 같다. (참)

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

98. 답 ④

[해설] ㄱ. $\int_0^a |v(t)|dt = \text{A}$, $\int_a^c |v(t)|dt = \text{B}$, $\int_c^d |v(t)|dt = \text{C}$ 라고 하자.

$\int_0^a |v(t)|dt = \int_a^d |v(t)|dt$이므로 $\text{A} = \text{B} + \text{C}$

점 P는 $0 \le t \le a$일 때, 수직선의 양의 방향으로 A만큼 움직였다가 $a \le t \le c$일 때, 음의 방향으로 B만큼 움직이고, $c \le t \le d$일 때, 양의 방향으로 C만큼 움직인다.

그런데 $\text{A} > \text{B}$이므로 점 P는 $0 < t \le d$일 때 원점을 지나지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\int_0^a |v(t)|dt = \int_a^d |v(t)|dt$에서

$$\int_0^a v(t)dt = -\int_a^c v(t)dt + \int_c^d v(t)dt$$

$$\int_0^a v(t)dt + \int_a^c v(t)dt = \int_c^d v(t)dt$$

$$\therefore \int_0^c v(t)dt = \int_c^d v(t)dt \quad (\text{참})$$

ㄷ.

$$\begin{aligned}\int_b^d |v(t)|dt &= -\int_b^c v(t)dt + \int_c^d v(t)dt \\ &= -\int_b^c v(t)dt + \int_0^c v(t)dt \quad (\because \text{ㄴ}) \\ &= \int_0^c v(t)dt + \int_c^b v(t)dt \\ &= \int_0^b v(t)dt \quad (\text{참})\end{aligned}$$

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

99. 답 ③

[해설] ㄱ. 출발한 후에 세 번째 멈추었을 때는 6초 후이므로 점 P의 위치는

$\int_0^6 v(t)dt = 1\times 2 + \frac{1}{2}\times 1 \times 2 - 2\times\frac{1}{2}\times 2\times 1 = 1$ (참)

ㄴ. 속도 v의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $t = 6$일 때 두 번째로 방향을 바꾼다.

그러므로 점 P가 실제로 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)|dt = 1\times 2 + \frac{1}{2}\times 1\times 2 + 2\times \frac{1}{2}\times 2\times 1$$
$$= 5 \text{ (참)}$$

ㄷ. 2초 후의 점 P의 위치는 3
4초 후의 점 P의 위치는 $3-1=2$
6초 후의 점 P의 위치는 $2-1=1$
8초 후의 점 P의 위치는 $1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$
이므로 출발 한 후에 점 P는 수직선 위의 좌표 $\frac{7}{2}$을 통과한 적이 없다. (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

100. 답 ⑤

[해설]

ㄱ. $t=1,\ 1+3,\ 1+3+3,\ \cdots$ 일 때, $v(t)=0$이고, 속도가 양에서 음으로 변하므로 점 P는 방향을 바꾼다. 또한 $t=3,\ 3+3,\ 3+3+3$, $\cdots$ 일 때, $v(t)=0$이고, 속도가 음에서 양으로 변하므로 점 P는 방향을 바꾼다. 따라서 점 P는 출발후 8초 동안 방향을 5번 바꾼다. (참)

ㄴ. 출발후 t초 동안 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$$x(3) = 0 + \int_0^3 v(t)dt$$
$$= \int_0^1 v(t)dt + \int_1^3 v(t)dt$$
$$= \int_0^1 v(t)dt + \int_1^3 (t^2-4t+3)dt$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t\right]_1^3$$
$$= 1 + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$
$$x(6) = x(3) + \int_3^6 v(t)dt = -\frac{1}{3} + \int_0^3 v(t)dt = -\frac{2}{3}$$
$$\vdots$$
$$\therefore x(3n) = -\frac{n}{3} \qquad (\text{단, } n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

따라서 $t=100$일 때 점 P의 위치는

$$x(100) = x(3\times 33+1)$$
$$= x(3\times 33) + \int_{99}^{100} v(t)dt$$
$$= x(3\times 33) + \int_0^1 v(t)dt$$
$$= -\frac{33}{3} + 1$$
$$= -10 \text{ (참)}$$

ㄷ. 점 P는 오른쪽 방향으로 1만큼 움직인 다음, 방향을 바꿔 왼쪽방향으로 $\frac{4}{3}$만큼 움직인다. 따라서 $0<t\le 3$일 때 원점을 1번, $3<t\le 6$이때 원점을 2번, $6<t\le 9$일 때 원점을 2번, $9<t\le 12$일 때 원점에서 1번 방향을 바꾸고, $t>12$일 때는 원점을 지나지 않는다.
따라서 점 P는 출발 후 원점을 지나거나 원점에서 방향을 바꾸는 횟수는 최대 6번이다. (참)

그러므로 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1. 정답 ⑤ 2. 정답: ③ 3. 정답 22
4. 정답 ② 5. 정답 (1) $-\frac{1}{2x^2}+C$ (2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
6. 정답 (1) $\frac{1}{6}(x+2)^6+C$
7. 정답 (1) $-\cos x-\sin x+C$ (2) $\tan x-x+C$ (3) $-\cot x+C$
8. 정답 ① 9. 정답 ② 10. 정답 ①
11. 정답 ①
12. 정답 (1)$2e^x-x+C$ (2) $-\frac{1}{e^x}+C$ (3) $\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$
13. 정답 ②
14. (1) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$
15. 정답 ② 16. 정답 ① 17. 정답 ③
18. 정답 (1) $\ln(x^2+x+2)+C$
19. 정답(1) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$ (2) $\frac{1}{3(e^x}+1)^3+C$ (3) $\frac{1}{2}sin^2x+C$
20. 정답 ③ 21. 정답 ④ 22. 정답 ⑤
23. 정답 ① 24. 정답 ⑤ 25. 정답 ⑤
26. 정답 ① 27. 정답 ②
28. 정답 (1) $x\sin x+\cos x+C$ (2) xe^x-e^x+C (3)
29. 정답 ③ 30. 정답 ⑤ 31. 정답 ⑤
32. 정답 ④ 33. 정답 ① 34. 정답 ④
35. 정답 ② 36. 정답 (1) $\frac{38}{3}$ (2) 1 (3) 1
37. 정답 (1) 4 (2) $2\left(e-\frac{1}{e}\right)$
38. 정답 (1) $\ln\frac{8}{5}$, (2)$\frac{\pi}{2}$
39. 정답 ① 40. 정답 ① 41. 정답 ④
42. 정답 ① 43. 정답 (1) 0 (2) 2
44. 정답 ② 45. 정답 ④ 46. 정답 ④
47. 정답 ④ 48. 정답 ② 49. 정답 ④
50. 정답 ② 51. 정답 ② 52. 정답 ②
53. [정답] ① 54. 정답 ② 55. [정답] ④
56. 정답 (1) 0 (2) $\ln 2$ 57. [정답] 112
58. 정답 ① 59. 정답 ② 60. 정답 $\frac{\pi}{4}$
60. 정답 $\frac{\pi}{4}$ 62. 정답 ④ 62. 정답 ④
64. 정답 ① 65. 정답 ② 66. 정답 (1) 1 (2) π
67. 정답 ⑤ 68. 정답 ② 69. 정답 ①
70. 정답 ① 71. 정답 ② 71. 정답 ②
73. 정답 ④ 74. 정답 ⑤ 75. 정답 ②
75. 정답 ② 77. 정답 ⑤ 78. 정답 ②
78. 정답 ② 80. 정답 ③ 81. 정답 ①
82. 정답 ① 83. 정답 ① 84. 정답 ①
85. 정답 ③ 86. 정답 ③ 87. [정답] ②
88. 정답 ① 88. 정답 ① 90. 정답 ②
91. 정답 ① 92. 정답 ① 93. 정답 ③
94. [정답] ② 95. 정답 ③ 96. 정답 -1
97. 정답 ② 98. 정답 ③ 99. 정답 ②
100. 정답 ⑤ 101. 정답 $f(x)=\cos\frac{\pi}{4}x-\frac{4}{\pi}$
102. 정답 ④ 103. 정답 ② 104. 정답 ④
105. 정답 ④ 106. [정답] ④ 107. 정답 ④
108. 정답 $\frac{2}{\pi}$ 109. e^2-e 109. e^2-e
109. e^2-e 112. 정답 ④ 112. 정답 ④
114. 정답 $e-1$ 115. 정답 ② 116. 정답 ①
117. 정답 ③ 118. 정답 ① 119. 정답 ①
120. 정답 ② 121. 정답 ④ 122. 정답 ②
123. [정답] ③ 124. 정답 ② 125. [정답] ④
126. 정답 $2\sqrt{2}$ 127. 정답 ⑤ 128. $\frac{1}{2}(e^2-1)$
129. 정답 ⑤ 130. 정답 ⑤ 131. 정답 ①
132. 정답 ③ 133. 정답 ⑤ 134. [정답] ①
135. [정답] ① 136. [정답] ① 137. 정답 $\frac{\pi^2}{2}$
138. 정답 $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$ 139. 정답 $\frac{3}{2}\pi^2$
140. 정답 $\frac{\pi}{4}(e^4+8-e^{-4})$
141. 정답 $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 142. 정답 120
143. 정답 ① 144. 정답 ② 145. 정답 ③
146. 정답 1 147. 정답 2π 148. 정답 25
149. 정답 ⑤ 150. 정답 ② 151. 정답 ④
152. 정답 ④ 153. [정답] ⑤ 154. 정답 $\sqrt{2}$
155. 정답 $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$ 156. 정답 78
157. 정답 ② 158. 정답 ⑤ 159. 정답 ②
160. [정답] ⑤

1. 정답 ⑤

[해설]

$f(x)=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx=\int\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$

$\therefore f(2)-f(1)=\left(\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}+C\right)-\left(\frac{1}{3}+2-1+C\right)=\frac{29}{6}$

2. 정답: ③

$F'(x)=f(x)$ 이므로 $F(x)=xf(x)-\sqrt{x}$ 의 양변을 x 에 관하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 에서 $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{2x\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx$

$=-\frac{1}{\sqrt{x}}+C$

이 때, $F(1)=f(1)-1=0$ 에서 $f(1)=1$ 이므로

$f(1)=-1+C=1$ 에서 $C=2$

따라서, $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}+2$이므로 $f(4)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

3. 정답 22

[해설]

$x=1$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$ 이므로

$f'(1)=a=1$ $\therefore f'(x)=\frac{1}{x^3}$

$\therefore f(x)=\int\frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{2x^2}+C$

이 때, $f(1)=1$ 이므로

$f(1)=-\frac{1}{2}+C=1$ 에서 $C=\frac{3}{2}$

따라서, $f(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}$ 이므로 $f(3)=-\frac{1}{18}+\frac{3}{2}=\frac{13}{9}$

$\therefore m+n=9+13=22$

4. 정답 ②

[해설]

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}(x-1)}{x+\sqrt{x}}$

$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=\sqrt{x}-1$

이므로

$h(x)=\int h'(x)dx=\int(\sqrt{x}-1)dx$

$=\int(x^{\frac{1}{2}}-1)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+C$

이고 $h(0)=f(0)-g(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서, $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x$ 이므로

$f(1)-g(1)=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$

5. 정답 (1) $-\frac{1}{2x^2}+C$ **(2)** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

[해설]

(1) $\int\frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx$

$=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C$

$=-\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$

(2) $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

6. 정답 (1) $\frac{1}{6}(x+2)^6+C$

[해설]

(1) $x+2=t$ 라 하면 $\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$\int(x+2)^5dx=\int t^5dt=\frac{1}{6}t^6+C=\frac{1}{6}(x+2)^6+C$

7. 정답 (1) $-\cos x-\sin x+C$ **(2)** $\tan x-x+C$ **(3)** $-\cot x+C$

[해설]

(1) $\int(\sin x-\cos x)dx=-\cos x-\sin x+C$

(2) $\int\tan^2x\,dx=\int(\sec^2x-1)dx=\tan x-x+C$

(3) $\int\frac{1}{\sin^2x}dx=\int\mathrm{cosec}^2x\,dx=-\cot x+C$

8. 정답 ①

[해설]

$f(x)=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}sin2x+C$에서

$f(0)=0+C=0$이므로 $C=0$

따라서, $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ 이므로 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$

9. 정답 ②

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $\tan^2 x$이므로

$f'(x)=\tan^2 x$이다. 따라서,

$f(x)=\int f'(x)dx=\int \tan^2 x dx$

$=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C$ 이고,

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$f(0)=\tan 0-0+C=0$에서 $C=0$

$\therefore f(x)=\tan x-x$

$\therefore a=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$

10. 정답 ①

[해설]

$f'(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=1+2\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}=1+\sin x$

이므로

$f(x)=\int(1+\sin x)dx=x-\cos x+C$

이고, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$f(0)=0-1+C=-1$에서 $C=0$

따라서, $f(x)=x-\cos x$이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

11. 정답 ①

[해설]

곡선 $y=f(x)$위의 임의의 점 (x,y)에서의 접선의 기울기가

$\sin 2x\cos 3x$이므로 $f'(x)=\sin 2x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)dx=-\frac{1}{10}cos5x+\frac{1}{2}cosx+C$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$f(0)=-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}+C=0$에서 $C=-\frac{2}{5}$

따라서, $f(x)=-\frac{1}{10}cos5x+\frac{1}{2}cosx-\frac{2}{5}$이므로

$f(\pi)=\frac{1}{10}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=-\frac{4}{5}$

12. 정답 (1)$2e^x-x+C$ **(2)** $-\frac{1}{e^x}+C$ **(3)** $\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

[해설]

(1) $\int(2e^x-1)dx=2e^x-x+C$

(2) $\int\frac{1}{e^x}dx=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C=-\frac{1}{e^x}+C$

(3) $\int(3^x-2^x)dx=\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

13. 정답 ②

[해설]

$f'(x)=\frac{8^x-1}{2^x-1}=4^x+2^x+1$이므로

$f(x)=\int(4^x+2^x+1)dx=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

이 때, $f(0)=\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 2}+C=0$에서

$C=-\frac{3}{\ln 4}$이므로

$f(x)=\frac{4^x}{\ln}4+\frac{2^x}{\ln 2}+x-\frac{3}{\ln 4}$

$\therefore\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{h}=2F'(1)=2f(1)=\frac{10}{\ln 4}+2$

14. (1) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

(1) $\int\frac{1}{x^2-1}dx=\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx$

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

15. 정답 ②

[해설]

$F(x)=x\{f(x)-1\}$의 양변을 x에 관하여 미분하면

$f(x)=f(x)-1+xf'(x)$에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

또, $F(1)=f(1)-1=0$에서 $f(1)=1$이므로 $C=1$

따라서, $f(x)=\ln|x|+1$이므로 $f(e)=2$

16. 정답 ①

[해설]

$f(xy)=f(x)+f(y)$에서 $x=y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)$에서 $f(1)=0$이다. 구간 $(0,\ \infty)$에 속하는

임의의 x와 $|h|<x$인 실수 h에 대하여 $y=1+\frac{h}{x}$로 놓으면

$xy=x\left(1+\frac{h}{x}\right)=x+h,\ f(1)=0\cdots$(가)

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(xy)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(y)}{y}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}\times\frac{1}{x}$

$=\frac{f'(1)}{x}=\frac{e}{x}$

따라서, $f(x)=\int \frac{e}{x}dx=e\ln|x|+C=e\ln x+C \quad (\because x>0)$

이고 $f(1)=C=0$ 이므로 $f(x)=\boxed{e\ln x}$ 이다.

17. 정답 ③

[해설]

$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$

$=\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx=\int \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx$

$=\ln|x-2|-\ln|x-1|+C=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$

$f(0)=\ln 2+C=\ln 2$ 에서 $C=0$ 이므로 $f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$

$\therefore f(3)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

18. 정답 (1) $\ln(x^2+x+2)+C$

(2) $\frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5+\frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3+C$

[해설]

(1) $x^2+x+2=t$ 라 하면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$ 이므로

$\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln|x^2+x+2|+C$

$=\ln(x^2+x+2)+C$

$\left(\because x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\right)$

(2) $\sqrt{x-1}=t$ 라 하면 $x=t^2+1$ 이고 $\frac{dx}{dt}=2t$ 이므로

$\int x\sqrt{x-1}\,dx=\int (t^2+1)t\cdot 2t\,dt=\int (2t^4+2t^2)dt$

$=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C$

$=\frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5+\frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3+C$

19. 정답(1) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$ **(2)** $\frac{1}{3(e^x}+1)^3+C$ **(3)** $\frac{1}{2}sin^2x+C$

[해설]

(1) $\ln x=t$ 라 하면 $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$\int \frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

(2) $e^x+1=t$ 라 하면 $e^x\frac{dy}{dt}=1$ 이므로

$\int (e^x+1)^2e^x\,dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}(e^x+1)^3+C$

(3) $\sin x=t$ 라 하면 $\cos x\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$\int \sin x\cos x\,dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}sin^2x+C$

20. 정답 ③

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{x}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=2f'(x)$

이므로 $2f'(x)=\frac{2}{x(\ln x)^3}$ 에서 $f'(x)=\frac{1}{x(\ln x)^3}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x(\ln x)^3}dx$

이 때, $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$f(x)=\int \frac{1}{x(\ln x)^3}dx=\int \frac{1}{t^3}dt=-\frac{1}{2t^2}+C$

$=-\frac{1}{2(\ln x)^2}+C$

$\therefore f(e^2)-f(e)=\left(-\frac{1}{2\cdot 2^2}+C\right)-\left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}+C\right)$

$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

21. 정답 ④

[해설]

$\cos x=t$ 라 하면 $-\sin x\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$f(x)=\int \sin^5x\,dx=\int \sin^4x\sin x\,dx$

$=\int (1-\cos^2x)^2\sin x\,dx=-\int (1-t^2)^2dt=\int (-t^4+2t^2-1)dt$

$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3-t+C=-\frac{1}{5}cos^5x+\frac{2}{3}cos^3x-\cos x+C$

이 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0+0+0+C=0$ 이므로 $C=0$

따라서, $f(x)=-\frac{1}{5}\cos^5x+\frac{2}{3}\cos^3x-\cos x$ 이므로

$f(0)=-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1=-\frac{8}{15}$

22. 정답 ⑤

[해설]

$f(x)=\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx-\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$

$=\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1}dx=\int \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)}dx$

$=\int \frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln|e^x+1|+C=\ln(e^x+1)+C$

또, $f(0)=\ln 2+C=0$에서 $C=-\ln 2$이므로

$f(x)=\ln(e^x+1)-\ln 2=\ln\dfrac{e^x+1}{2}$

$\therefore f(1)=\ln\dfrac{e+1}{2}$

23. 정답 ①

[해설]

$f(x)=\int \cos x\ln(\sin x)dx$에서 $\sin x=t$라 하면 $\cos x\dfrac{dx}{dt}=1$이므로 $f(x)=\int \ln t dt=t\ln t-t+C=\sin x\{\ln(\sin x)-1\}+C$

이 때, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1+C=-1$에서 $C=0$

$\therefore f(x)=\sin x\{\ln(\sin x)-1\}$

구간 $(0,\ \pi)$에서 $0<\sin x\leqq 1$이므로

$\ln(\sin x)-1=\ln(\sin x)-\ln e<0$

따라서, 구간 $(0,\ \pi)$에서 $f(x)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 0이다.

24. 정답 ⑤

[해설]

$f(x)=\int \dfrac{x}{x^2+1}dt=\dfrac{1}{2}ln(x^2+1)+C$

이고 $f(0)=C=0$이므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}ln(x^2+1)$

방정식 $f(x)=1$, 즉 $\dfrac{1}{2}ln(x^2+1)=1$에서 $\ln(x^2+1)=\ln e^2$이므로

$x^2+1=e^2,\ x^2+1-e^2=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $1-e^3$이다.

25. 정답 ⑤

[해설]

$f'(x)=e^x\sqrt{e^x+3}>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

또, $f(x)=\int e^x\sqrt{e^x+3}\,dx$에서 $e^x+3=t$로 놓으면 $e^x\dfrac{dx}{dt}=1$이므로 $f(x)=\int \sqrt{t}\,dt=\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{2}{3}(e^x+3)^{\frac{3}{2}}+C$

따라서, $M=f(\ln 13)=\dfrac{2}{3}(13+3)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{128}{3}+C$

$m=f(0)=\dfrac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{16}{3}+C$

$M-m=\left(\dfrac{128}{3}+C\right)-\left(\dfrac{16}{3}+C\right)=\dfrac{112}{3}$

26. 정답 ①

[해설]

$\dfrac{d}{dx}\{xf(x)\}=f(x)+xf'(x)=\sin\sqrt{x}$이므로

$xf(x)=\int \sin\sqrt{x}\,dx$

이 때, $\sqrt{x}=t$로 놓으면 $x=t^2$이므로 $\dfrac{dx}{dt}=2t$

따라서,

$xf(x)=2\int t\sin t dt=-2t\cos t+2\sin t+C$

$=-2\sqrt{x}\,cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$

이고 $\dfrac{\pi^2}{4}f\left(\dfrac{\pi^2}{4}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{8}{\pi^2}=2+C$이므로

$xf(x)=-2\sqrt{x}\,cos x+2\sin\sqrt{x}$

따라서, $\pi^2 f(\pi^2)=2\pi$에서 $f(\pi^2)=\dfrac{2}{\pi}$

27. 정답 ②

[해설]

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$

$\therefore f(x)=\int \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$

이 때, $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x\dfrac{dx}{dt}=1$이므로

$f(x)=\int \dfrac{1}{t^2-1}dt=\int \dfrac{1}{(t-1)(t+1)}dt=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}\right)dt$

$=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|+C=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$

또, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}-1}{\cos\frac{\pi}{2}+1}\right|+C=C=0$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cos\frac{\pi}{3}-1}{\cos\frac{\pi}{3}+1}\right|=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}=-\dfrac{\ln 3}{2}$

28. 정답 (1) $x\sin x+\cos x+C$ **(2)** xe^x-e^x+C **(3)** $\dfrac{1}{2}x^2\ln-\dfrac{1}{4}x^2+C$

[해설]

(1) $\int x\cos x dx=\int x(\sin x)dx=x sin x-\int \sin x dx$

$=x\sin x+\cos x+C$

(2) $\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

(3) $\int x\ln x dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{2}\int x^2\times\dfrac{1}{x}dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

29. 정답 ③

[해설]

$f'(x)=\frac{1}{x}$ 이므로 $f(x)=\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C_1$이고

$f(1)=0+C_1=0$이므로 $C_1=0$

따라서, $f(x)=\ln x$이므로 구하는 정답은

$\int f(x)dx=\int \ln xdx=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C$

30. 정답 ⑤

[해설]

$\int \ln x^2dx=2\int \ln|x|dx=2x\ln x-2\int x\cdot\frac{1}{x}dx$ $(\because\ x>0)$

$=2x\ln x-2x+C$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=3$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1}\int \ln x^2dx=\lim_{x\to 1}(2x\ln x-2x+C)=-2+C=3$에서 $C=5$

따라서, $x\neq 1$일 때, $f(x)=2x\ln x-2x+5$이므로 $f(2)=4\ln 2+1$

31. 정답 ⑤

$x>0$이므로 $\cos 2x=0$일 때, $f'(x)=0$이다. 즉, $f'(x)=0$에서

$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

따라서, 아래쪽 증감표에서 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 극솟값은 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)$이다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$f(x)=\int x\cos 2xdx=\int x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'$

$=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2xdx$

$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

이 때, $f(x)$의 극댓값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}+C=\pi$에서 $C=\frac{7}{8}\pi$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{7}{8}\pi$

따라서, $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{3}{8}\pi+\frac{7}{8}\pi=\frac{\pi}{2}$

32. 정답 ④

[해설]

$f'(0)=0$이고 $x>0$일 때, $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 $0\leq x\leq 2$에서 증가함수이다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$f(x)=\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C$

함수 $f(x)$의 최솟값 $f(0)=-1+C=2$이므로 $C=3$

따라서, $f(x)=xe^x-e^x+3$이므로 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=e^2+3$

33. 정답 ①

[해설]

$f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}=0$에서 $x=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

$f(x)=\int \frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}+\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

함수 $f(x)$의 극솟값 $f(1)=-1+C=-1$이므로 $C=0$

따라서, $(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$이므로 $f(e)=-\frac{2}{e}$

34. 정답 ④

[해설]

$h''(x)=\frac{d}{dx}h'(x)=\frac{d}{dx}g(x)=g'(x)=f(x)$이므로

$\int xf(x)dx=\int xg'(x)dx=xg(x)-\int g(x)dx=xg(x)-h(x)+C$

35. 정답 ②

[해설]

ㄱ. $I_1(x)=\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C$ (참)

ㄴ. $I_n(x)=\int x^ne^xdx=x^ne^x-n\int x^{n-1}e^xdx=x^ne^x-nI_{n-1}(x)$

$\therefore I_n(x)+nI_{n-1}(x)=x^ne^x$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ (참)

ㄷ. $I_{n-1}(x)=\int x^{n-1}e^xdx=x^{n-1}e^x-(n-1)\int x^{n-2}e^xdx$

$=x^{n-1}e^x-(n-1)I_{n-2}(x)$

$\therefore I_{n-1}(x)+(n-1)I_{n-2}(x)=x^{n-1}e^x=\frac{d}{dx}I_{n-1}(x)$ (거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

36. 정답 (1) $\frac{38}{3}$ **(2)** 1 **(3)** 1

[해설] (1) $\int_4^9 \sqrt{x}\ dx$

$=\int_4^9 x^{\frac{1}{2}}\ dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9=\frac{2}{3}(27-8)=\frac{38}{3}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

(3) $\int_1^e \frac{1}{x}\ dx=\left[\ln|x|\right]_1^e=\ln e=1$

37. 정답 (1) 4 (2) $2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

[해설]

(1) $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx-\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2dx$

$=\int_1^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]dx$

$=\int_1^2 4\,dx=[4x]_1^2=4$

(2) $\int_{-1}^0(e^x+e^{-x})\,dx+\int_0^1(e^x+e^{-x})\,dx$

$=\int_{-1}^1(e^x+e^{-x})\,dx$

$=[e^x-e^{-x}]_{-1}^1$

$=(e-e^{-1})-(e^{-1}-e)=2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

38. 정답 (1) $\ln\frac{8}{5}$, (2) $\frac{\pi}{2}$

[해설]

(1) $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$이므로

$\int_1^4\frac{1}{x(x+1)}\,dx=\int_1^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=[\ln|x|-\ln|x+1|]_1^4=\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^4$

$=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{8}{5}$

(2) $\int_0^\pi\sin^2x\,dx=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$

39. 정답 ①

[해설]

$\int_1^2(2y+e^{-y})\,dy=\int_1^2(2x+e^{-x})\,dx$이므로

$\int_0^1(2x+e^{-x})\,dx+\int_1^2(2y+e^{-y})\,dy$

$=\int_0^1(2x+e^{-x})\,dx+\int_1^2(2x+e^{-x})\,dx$

$=\int_0^2(2x+e^{-x})\,dx$

$=[x^2-e^{-x}]_0^2$

$=(4-e^{-2})-(-1)=5-\frac{1}{e^2}$

40. 정답 ①

[해설]

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x-1}{x^{n+1}+1}$에서

(i) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x-1}{x^{n+1}+1}=2x-1$

(ii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x-1}{x^{n+1}+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^n}-\frac{1}{x^{n+1}}}{1+\frac{1}{x^{n+1}}}=\frac{1}{x}$

$\therefore\int_0^{e^2}f(x)\,dx=\int_0^1f(x)\,dx+\int_1^{e^2}f(x)\,dx$

$=\int_0^1(2x-1)\,dx+\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\,dx$

$=[x^2-x]_0^1+[\ln|x|]_1^{e^2}$

$=0+(\ln e^2-\ln 1)=2$

41. 정답 ④

[해설]

$a\sin x+b\cos x$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ $\left(\text{단, }\tan\alpha=\frac{b}{a}\right)$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2+b^2}\operatorname{cosec}^2(x+a)\,dx$

$=\frac{1}{a^2+b^2}[-\cot(x+\alpha)]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{a^2+b^2}\left\{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cot\alpha\right\}$

$=\frac{1}{a^2+b^2}(\tan\alpha+\cot\alpha)$

$=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{ab}$

42. 정답 ①

[해설]

$f(-x)=-f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(-x)\cdot(-1)=-f'(x)$

$\therefore f'(-x)=f'(x)$

$g(-x)=g(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(-x)\cdot(-1)=g'(x)$

$\therefore g'(-x)=-g'(x)$

기함수를 미분하면 우함수가 되고, 우함수를 미분하면 기함수가 되므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi} g'(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{\pi} f'(x)dx$$
$$=2\left[f(x)\right]_0^{\pi}$$
$$=2\{f(\pi)-f(0)\}$$

$f(-x)=-f(x)$에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-f(0)$, $2f(0)=0$

$\therefore\ f(0)=0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi} g'(x)dx=2a$$

43. 정답 (1) 0 **(2)** 2

[해설]

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx=[x\sin x]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$

$$=[\cos x]_{-\pi}^{\pi}=-1-(-1)=0$$

<별해>

$x\cos x$는 기함수이므로 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx=0$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,dx=[-\cos x+\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$=1-(-1)=2$$

<별해>

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

44. 정답 ②

[해설]

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$, $x\,dx=\dfrac{1}{2}dt$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\sqrt{3}$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}}3x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{3}{2}\int_1^4\sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=8-1=7$$

45. 정답 ④

[해설]

$\sqrt{x}=t$로 놓으면 $x=t^2$이므로 $dx=2t\,dt$

$x=0$일 때, $t=0$, $x=4$일 때 $t=2$이므로

$$\therefore\ \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^2 e^t\cdot 2t\,dt$$
$$=\left[e^t\cdot 2t\right]_0^2-\int_0^2 2e^t\,dt$$
$$=4e^2-\left[2e^t\right]_0^2$$
$$=4e^2-(2e^2-2)$$
$$=2e^2+2=2(e^2+1)$$

46. 정답 ④

[해설]

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$$

$1+\cos x=t$로 놓으면

$-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$에서 $\sin x\,dx=-dt$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx=2\int_2^1\left(-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$2\int_1^2\frac{1}{t}\,dt=2\left[\ln|t|\right]_1^2=2(\ln 2-0)=2\ln 2$$

47. 정답 ④

[해설]

$2x+1=t$ 로 놓으면

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$

$2dx=dt$, $dx=\dfrac{1}{2}dt$

$$\int_0^1 f(2x+1)\,dx=\int_1^3 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^2 f(t)\,dt+\int_2^3 f(t)\,dt\right)=\frac{1}{2}\left(\int_1^2(2t-1)\,dt+\int_2^3 3\,dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left[t^2-t\right]_1^2+[3t]_2^3\right)=\frac{1}{2}(2+3)=\frac{5}{2}$$

48. 정답 ②

[해설]

$$f(a)=\int_1^a\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$$

$\sqrt{\ln x}=t$라 하면 $\ln x=t^2$

$x=1\to t=0$ $\quad x=a\to t=\sqrt{\ln a}$

$\dfrac{1}{x}dx=2t\,dt$

$$f(a)=\int_0^{\sqrt{\ln a}}2t^2\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{\ln a}}=\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore f(a^4)=\frac{2}{3}(\ln a^4)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}(\ln a)^{\frac{3}{2}}=8f(a)$$

49. 정답 ④

[해설]

$f(x)=t$로 치환하면 $f'(x)dx=dt$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)f'(x)dx$$
$$=\int_{f(a)}^{f(b)} tdt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{f(a)}^{f(b)}$$
$$=\frac{1}{2}\{f(b)\}^2-\frac{1}{2}\{f(a)\}^2$$
$$=\frac{25-9}{2}=\frac{16}{2}=8$$

50. 정답 ②

[해설]

$$\int_a^{a+P} f(x)dx=\int_a^P f(x)dx+\int_P^{(a+P)} f(x)dx$$

$x-P=t$로 놓으면 $1=\dfrac{dt}{dx}$이고 $x=P$일 때, $t=0$이고,

$x=\boxed{a+P}$일 때, $t=a$

그런데 $\displaystyle\int_P^{(a+P)} f(x)dx=\int_0^a f(t+P)dt=\int_0^a f(t)dt$

($\because f(t)=f(t+P)$)이므로 다음이 성립한다.

$$\int_a^{a+P} f(x)dx=\int_0^P f(x)dx$$

한편

$2\sin x+\cos x=\sqrt{5}\sin(x+a)$ $\left(\text{단, } \tan\alpha=\dfrac{1}{2},\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

이므로

$$\int_0^{3\pi}|2\sin x+\cos x|dx=\int_0^{3\pi}|\sqrt{5}\sin(x+\alpha)|dx$$
$$=\int_\alpha^{3\pi+\alpha}|\sqrt{5}\sin t|dt$$
$$=\int_\alpha^{3\pi}\sqrt{5}|\sin x|dx$$
$$=3\sqrt{5}\int_0^\pi \sin x dx$$
$$=3\sqrt{5}[-\cos x]_0^\pi$$
$$=6\sqrt{5}$$

51. 정답 ②

[해설]

$\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}=1$ 의 양변을 0부터 $\dfrac{\pi}{2}$까지 정적분을 취한다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx \text{—㉠}$$

$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ 로 치환하면 위㉠ 은

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{4}$$

52. 정답 ②

[해설]

$4-x=t$로 놓으면 $x=1-t$, $dx=-dt$이고,

$x=0$일 때 $t=4$, $x=4$일 때 $t=0$

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_4^0 f(4-t)(-dt)=\int_0^4 f(4-t)dt$$

$$2\int_0^4 f(x)dx=\int_4^0\{f(x)+f(4-x)\}dx=\int_0^1 2dx=[2x]_0^4=8$$

$$\therefore \int_0^4 f(x)dx=4$$

53. [정답] ①

해설

$t\sqrt{x}=y$ 라 하면 $\sqrt{x}=\dfrac{y}{t}$ 이므로 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=\dfrac{1}{t}dy$

$x=0$ 일 때, $y=0$, $x=1$ 일 때, $y=t$ 이므로

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}f(t\sqrt{x})dx=\int_0^t\frac{y}{t}f(y)\cdot\frac{2y}{t^2}dy=e^t$ 에서

$$\frac{2}{t^3}\int_0^t y^2f(y)dy=e^t$$

$$\therefore \int_0^t y^2f(y)dy=e^t\cdot\frac{t^3}{2} \quad \text{---} ㉠$$

㉠의 양변을 y에 대입하여 미분하면

$$t^2f(t)=e^t\cdot\frac{t^3}{2}+e^t\cdot\frac{3}{2}t^2=e^t\cdot\frac{1}{2}t^2(t+3)$$

$$f(t)=\frac{1}{2}(t+3)e^t$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x+3)e^x$$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 좌표는 $(-3,0)$이다.

54. 정답 ②

[해설]

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^0 f(x)dx+\int_0^\pi f(x)dx$$

$x=-t$로 놓으면 $dx=-dt$이므로

$$\int_{-\pi}^0 f(x)dx=\int_\pi^0 f(-t)(-dt)+\int_0^\pi f(-t)dt$$

$$=\int_0^{\pi} f(-x)dx$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi} f(-x)dx+\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\{f(-x)+f(x)\}dx$$

$$=\int_0^{\pi}(2\cos x-1)\,dx=[2\sin x-x]_0^{\pi}=-\pi$$

55. [정답] ④

해설 $\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$에서 $a-x=t$라 하면

$\frac{dt}{dx}=-1$이고 $x=\frac{a}{2}$일 때 $t=\frac{a}{2}$, $x=a$일 때 $t=0$

따라서, $I=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$라 하면

$$I=\int_{\frac{a}{2}}^{0}\frac{f(a-t)}{f(a-t)+f(t)}(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(a-t)}{f(a-t)+f(t)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)}dx$$

$$I+b=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(a-x)+f(x)}{f(a-x)+f(x)}dx=\int_0^{\frac{a}{2}}dx=\frac{a}{2}$$

$$\therefore\ I=\frac{a}{2}-b$$

56. 정답 (1) 0 **(2)** $\ln 2$

[해설]

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\tan x dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=[\ln|\cos x|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=0$$

(2) $\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_2^5\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

$$=[\ln|x^2+1|]_0^1=\ln 2$$

57. [정답] 112

해설

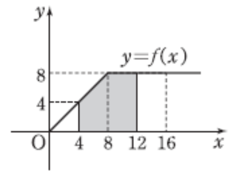
$\frac{x+8}{2}=t$로 치환하고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}\quad\therefore\ dx=2dt$

또, $x=0$일 때 $t=\frac{8}{2}=4$이고, $x=16$일 때 $t=\frac{16+8}{2}=12$이므로

$$\int_0^{16}f\left(\frac{x+8}{2}\right)dx=\int_4^{12}f(t)\cdot 2\,dt=2\int_4^{12}f(t)dt$$

이때, 오른쪽 그림에서 $\int_4^{12}f(t)dt$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=4$, $x=12$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$$\int_4^{12}f(t)dt=\frac{1}{2}\cdot(4+8)\cdot(8-4)+8\cdot(12-8)$$

$$=24+32=56$$

$$\therefore\ \int_0^{16}f\left(\frac{x+8}{2}\right)dx=2\int_4^{12}f(t)dt=2\cdot 56=112$$

58. 정답 ①

[해설]

$x=\tan\theta\ d\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때, $\theta=\frac{\pi}{4}$

$dx=\sec^2\theta\ d\theta$이고

$x^2+1=\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta\ d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

59. 정답 ②

[해설]

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이고

$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\tan^2\theta+1}=\sqrt{\sec^2\theta}=\sec\theta$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec\theta}\cdot\sec^2\theta\ d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\ d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sec\theta+\tan\theta)'}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta=[\ln(\sec\theta+\tan\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

다른 풀이 $x+\sqrt{x^2+1}=t$로 놓으면

$1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{dt}{dx}$,

$\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{t}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{dt}{dx}$, $\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{dt}{t}$

또, $x=0$일 때, $t=1$, $x=1$일 때, $t=1+\sqrt{2}$ 이므로

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_1^{1+\sqrt{2}} = \ln(1+\sqrt{2})$$

60. 정답 $\frac{\pi}{4}$

[해설]

$x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

***61.* 정답 ③**

[해설] $\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\, dx = [-e^{-x}\sin x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\, dx$

$$= \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\, dx$$

$$= [-e^{x}\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\, dx$$

$$2\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\, dx = [-e^{x}\cos x]_0^{\pi} = e^{-\pi}+1$$

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\, dx = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$$

<별해>

$(e^{-x}\sin x)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$ …… ㉠

$(e^{-x}\cos x)' = -e^{-x}\cos x + e^{-x}(-\sin x)$ …… ㉡

㉠+㉡에서

$(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x)' = -2e^{-x}\sin x$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\, dx = \left[-\frac{1}{2}(e^{x}\sin x + e^{x}\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}(-e^{-\pi}-1) = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$$

62. 정답 ④

[해설]

$$\int_1^e (x+\ln x)^2\, dx + \int_1^e (x-\ln x)^2\, dx = \int_1^e 4x\ln x\, dx$$

$f'(x)=4x$, $g(x)=\ln x$로 놓으면

$f(x)=2x^2$, $g'(x)=\frac{1}{x}$

$$\therefore \int_1^e 4x\ln x = [2x^2\ln x]_1^e - \int_1^e 2x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= 2e^2 - \int_1^e 2x\, dx = 2e^2 - [x^2]_1^e$$

$$= 2e^2 - (e^2+1) = e^2+1$$

***63.* 정답 ②**

[해설] $\int_2^4 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

$$= \int_2^4 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx$$

$$= \int_1^4 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx$$

$$= \int_1^3 f(x)dx$$

$$= \int_1^3 x e^3\, dx = [xe^x]_1^3 - \int_1^3 e^x\, dx$$

$$= [(x-1)e^x]_1^3 = 2e^3$$

64. 정답 ①

[해설]

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos x dx = [e^x\cos x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x(-\sin x)dx$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^x(\cos x - \sin x)dx = [e^x\cos x]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -e^{\pi} + e^{-\pi} = \frac{1}{e^{\pi}} - e^{\pi}$$

65. 정답 ②

[해설]

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^{n-1} x\, dx$$

$$= [\sin x\cos^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot (n-1)\cos^{n-1}x(-\sin x)\, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x \cdot \cos^{n-2}x)dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x)dx$$

$$= (n-1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx\right\}$$

$$= (n-1)a_{n-2} - (n-1)a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-2}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

따라서 $f(n) = \frac{n-1}{n}$ 이므로

$$f(10) = \frac{9}{10}$$

66. 정답 (1) 1 (2) π

[해설]

(1) $\int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x]_1^e - \int_0^e \frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$= e - [x]_1^e = e-(e-1) = 1$

(2) $\int_0^\pi x\sin x\,dx = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)dx$

$= [-x\cos x + \sin x]_0^\pi = \pi$

67. 정답 ⑤

[해설]

$(x-2)\sqrt{x-1} = (x-1-1)\sqrt{x-1}$

$= (x-1)\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1}$

$= (x-1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{1}{2}}$

$\int_1^3 |x-2|\sqrt{x-1}\,dx$

$= \int_1^2 |x-2|\sqrt{x-1}\,dx + \int_2^3 |x-2|\sqrt{x-1}\,dx$

$= -\int_1^2 (x-2)\sqrt{x-1}\,dx + \int_2^3 (x-2)\sqrt{x-1}\,dx$

$= -\left[\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$

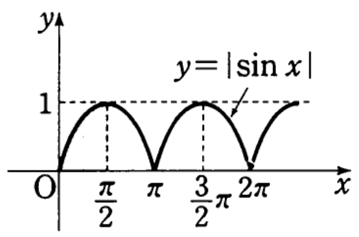
$+ \left[\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3$

$= -\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} - \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}\right) - \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{8+4\sqrt{2}}{15}$

68. 정답 ②

[해설]



$\int_0^{\frac{n}{2}\pi} |\sin x|dx = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = n[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = n(0+1) = n$

69. 정답 ①

[해설]

$\sin^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^2 x - \frac{1}{2}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\cos 2x}{2}\right| dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$

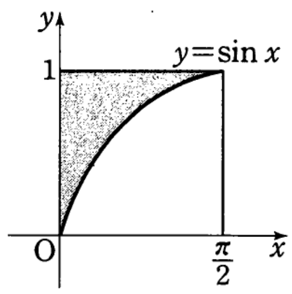
$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{4}(1-0-0+1) = \frac{1}{2}$

70. 정답 ①

[해설]

I는 어두운 부분의 넓이이므로



$I = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$= \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

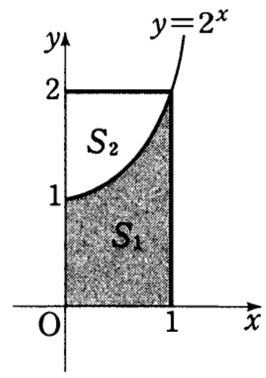
$= \frac{\pi}{2} - 1$

71. 정답 ②

[해설]

$\int_0^1 2^x\,dx + \int_1^2 \log_2 x\,dx$에서

$y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 서로 역함수이므로 오른쪽 그림에서



$\int_0^1 2^x\,dx = S_1$, $\int_1^2 \log_2 x\,dx = S_2$

$\therefore \int_0^1 2^x\,dx + \int_1^2 \log_2 x\,dx$

$= S_1 + S_2 = 1\cdot 2 = 2$

72. 정답 ②

[해설] $\int_0^x f(t)dt = e^x - \cos x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = e^x + \sin x$

$\therefore f(0) = e^0 + \sin 0 = 1+0 = 1$

73. 정답 ④

$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t\,dt$에서

$f'(x) = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\therefore f'(1) = \ln 2$

74. 정답 ⑤

$xf(x)=\int_0^x f(t)dt+e^x-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=f(x)+e^x$

$\therefore\ f'(x)=\frac{e^x}{x}\quad\therefore\ f'(1)=e$

75. **정답** ②

$f(x)=\int_0^x(1-t)e^t dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(1-x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 변하므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이자 최대이다. 따라서 최댓값은

$f(1)=\int_0^1(1-t)e^t dt=[(1-t)e^t]_0^1+\int_0^1 e^t dt$

$=[(1-t)e^t+e^t]_0^1=[(2-t)e^t]_0^1=e-2$

76. **정답** ③

[해설] $\int_0^x f(t)dt=e^x+2x-a$에 $x=0$을 대입하면

$\int_0^0 f(t)dt=e^0+2\cdot0-a=1-a=0\ \therefore\ a=1$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x+2$

$f(1)=e+2\qquad\therefore\ a+f(a)=1+(e+2)=e+3$

77. **정답** ⑤

$f(x)=\int_{\frac{x}{2}}^x \sin t\,dt=[-\cos t]_{\frac{x}{2}}^x$

$=-\cos x+\cos\frac{x}{2}=-\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)+\cos\frac{x}{2}$

$=-2\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

따라서 $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $\frac{9}{8}$를 갖고,

$\cos\frac{x}{2}=-1$일 때 최솟값-2를 갖는다.

$\therefore M+m=\frac{9}{8}-2=-\frac{7}{8}$

[참고]

$f(x)=\int_{\frac{x}{2}}^x \sin t\,dt$의 양변을$x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sin x-\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$f'(x)=0$에서

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\left(4\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$

$\sin\frac{x}{2}=0$ 또는 $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$일 때 극댓값을 가짐을 알 수 있다.

78. **정답** ②

$\int_0^x(x-t)f(t)dt=\sin x+ax+b$에 $x=0$을 대입하면$b=0$

$\int_0^x(x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

$=\sin x+ax+b$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\cos x+a$

$\therefore\ \int_0^x f(t)dt=\cos x+a\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=0$을 대입하면 $0=1+a\qquad\therefore\ a=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=-\sin x$

$\therefore\ f(\pi)=-\sin\pi=0$

$\therefore\ a+b+f(\pi)=-1+0+0=-1$

79. **정답** ③

[해설] $F(x)=\int_2^x(e^x+\sin x)dx=\int_2^x(e^t+\sin t)dt$

$\therefore\ F(-x)=\int_2^{-x}(e^t+\sin t)dt$

$=\int_2^{-x}(e^x+\sin x)dx$

80. **정답** ③

$\int_1^{x^2} f(t)dt=\frac{1}{2}x^2-\ln x-\frac{1}{2}$에서 양변을$x$에 대하여 미분하면

$2xf(x^2)=x-\frac{1}{x}$

$f(x^2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}$

$\therefore\ f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2t}$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}-\frac{t}{2}$

$\therefore\ \int_1^e\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)dt=\int_1^e\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)dt$

$=\left[\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}t\right]_1^e=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(2-e)$

81. 정답 ①

$g(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+1$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$

다시 양변을 x에 대하여 미분하면 $g''(x)=f(x)$

이 때, $g(x)=\cos 2x$이므로 $g'(x)=-2\sin 2x$

$g''(x)=-4\cos 2x$ $\therefore f(x)=-4\cos 2x$

82. 정답 ①

$f(x)=ax+b,\ g(x)=e^x$ 에서

$f(g(x))=f(e^x)=ae^x+b$

$ae^x+b=\int_0^x f(t)g(t)dt-xe^x+3$

양변을x에 대하여 미분하면

$ae^x=f(x)g(x)-e^x-xe^x$

$=(ax+b)e^x-e^x-xe^x$

$=(a-1)xe^x+(b-1)e^x$

$a-1=0,\ b-1=a$에서 $\therefore a=1,\ b=2$

$\therefore f(x)=x+2$ $\therefore f(2)=4$

83. 정답 ①

$xf(x)=x^2\sin x+\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt$ …… ㉠

$x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면 $\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x\sin x+x^2\cos x+f(x)$

$\therefore f'(x)=2\sin x+x\cos x$

$\therefore f(x)=\int(2\sin x+x\cos x)dx$

$=-2\cos x+x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=-2\cos x+x\sin x+\cos x+C$

$=-\cos x+x\sin x+C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)$에서 $C=0$

$\therefore f(x)=-\cos x+x\sin x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pi-3}{6}$

84. 정답 ①

$\{f(x)\}^2-4=\int_2^x\frac{f(t)}{t}dt$ …… ㉠

㉠에 $x=2$를 대입하면 $\{f(x)\}^2-4=0$이고

$f(x)>0$이므로 $f(2)=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)f'(x)=\frac{f(x)}{x}$ $\therefore f'(x)=\frac{1}{2x}$

$\therefore f(x)=\int\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\ln|x|+C$

$f(2)=2$에서 $C=2-\frac{1}{2}\ln 2$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\ln|x|+\left(2-\frac{1}{2}\ln 2\right)$

$f(4)=\ln 2+\left(2-\frac{1}{2}\ln 2\right)=2+\frac{1}{2}\ln 2$이므로

$f(4)-f(2)=\frac{1}{2}\ln 2$

85. 정답 ③

$2xf(x)-x=\int_1^x\{f(t)-1\}dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)-1=0$ $\therefore f(1)=\frac{1}{2}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)+2xf'(x)-1=f(x)-1$

$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{2x}$

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\left(-\frac{1}{2x}\right)dx$에서

$\ln|f(x)|=-\frac{1}{2}\ln x+C$ ($\because x>0$) …… ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\ln|f(1)|=C$에서 $C=\ln\frac{1}{2}$

즉, $\ln f(x)=-\frac{1}{2}\ln x+\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로

$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\therefore f\left(\frac{1}{4}\right)=1$

86. 정답 ③

$f(x)-2\int_0^x e^t f(t)dt=1$ …… ㉠

에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-2e^x f(x)=0$에서 $f'(x)=2e^x f(x)$

$f''(x)=2e^x\{f(x)+f'(x)\}=2e^x\{f(x)+2e^x f(x)\}$

$\therefore f''(0)=2\{f(0)+2f(0)\}=6$

87. [정답] ②

해설 $\int_0^x(f(t)-a\sin t)dt=\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin x-\cos x$의 양변을 x에

대하여 미분하면 $f(x)-a\sin x=\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x$

$f(x)=a\sin x+\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x$

$\therefore f'(x)=(a-1)\cos x+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin x$

$f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$ 에서 극값을 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(a-1)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

$\therefore a=1$

$\therefore f'(x)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin x,\ f(x)=\sin x+\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\pi$ $(\because 0\leqq x\leqq\pi)$

아래 증감표에서

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		↘	극소	↗	

$f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 극소이면서 최소이다.

따라서 $f(x)$의 최솟값은

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 정답②

88. 정답 ①

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^{x+1}t^2e^t dt=1\cdot e^1=e$

89. 정답 ①

[해설] $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(x-1)}\int_1^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{2}\cdot f(1)$

$f(1)=e(\sin\pi+\cos\pi)=-e$이므로

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{2}\cdot(-e)=-\frac{1}{2}e$

90. 정답 ②

$f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_e^{e+2h}f(t)dt=\lim_{h\to0}\frac{F(e+2h)-F(e)}{h}$

$=2\lim_{h\to0}\frac{F(e+2h)-F(e)}{2h}$

$=2F'(e)=2f(e)=2(e\ln e)=2e$

91. 정답 ①

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(\sin^2x+\cos x)dx=\sin^2 0+\cos 0=1$

92. 정답 ①

$F'(t)=f(t)$라 하면 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{\pi-x}^{\pi+x}f(t)dt$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}[F(t)]_{\pi-x}^{\pi+x}=\lim_{x\to0}\frac{F(\pi+x)-F(\pi-x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\{F(\pi+x)-F(\pi)\}-\{F(\pi-x)-F(\pi)\}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{F(\pi+x)-F(\pi)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{F(\pi-x)-F(\pi)}{-x}$

$=F'(\pi)+F'(\pi)=2F'(\pi)=2f(\pi)$

$=2(2\sin\pi+3\cos\pi)=2\cdot(-3)=-6$

93. 정답 ③

$f(t)=e^t+\cos\pi t-\sin\frac{\pi}{2}t$의 부정적분 중 하나를

$F(t)$라고 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}\left(e^t+\cos\pi t-\sin\frac{\pi}{2}t\right)dt$

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$

$=2F'(1)=2f(1)=2(e-2)$

94. [정답] ②

해설

$F'(t)=f(t)$ 로 놓으면 $\int f(t)dt=F(t)+C$

$\ln x=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(x-h)-F(x)}{-h}$

$=2F'(x)=2f(x)$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\ln x$

$\therefore \int_1^{e^2}f(x)dx=\therefore \int_1^{e^2}\frac{1}{2}\ln x dx$

$=\frac{1}{2}[x\ln x-x]_1^{e^2}=\frac{1}{2}(e^2+1)$

95. 정답 ③

$f(x)=\int_0^x(\sin^2 t-\sin t)dt$

$=\int_0^x\left(\frac{1-\cos 2t}{2}-\sin t\right)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+\cos t\right]_0^x$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\cos x-1$

$\therefore \frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}-\frac{\sin 2x}{4x}+\frac{\cos x-1}{x}$

$=\frac{1}{2}-\frac{\sin 2x}{4x}-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}$

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1\cdot 0=0$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}$ (거짓)

ㄷ. $|\sin x|\le 1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{4x}=0,$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

96. 정답 -1

$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_\pi^x \cos t\,dt=\cos\pi=-1$

97. 정답 ②

$\int_1^2 f(t)dt=c$ …… ㉠으로 놓으면

$f(x)=3x^2+\cos\frac{\pi}{2}x+3c$

㉠에 다시 대입하면 $\int_1^2\left(3x^2+\cos\frac{\pi}{2}x+3c\right)dx=c$에서

$\left[x^3+\frac{2}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2}x+3cx\right]_1^2=c,$

$(8+0+6c)-\left(1+\frac{2}{\pi}+3c\right)=c$

$\therefore c=\frac{1}{\pi}-\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)=3x^2+\cos\frac{\pi}{2}x+3\left(\frac{1}{\pi}-\frac{7}{2}\right)$이므로

$f(0)=1+3\left(\frac{1}{\pi}-\frac{7}{2}\right)=\frac{3}{\pi}-\frac{19}{2}$

98. 정답 ③

$\int_1^e\frac{f(t)}{t}dt=c$ …… ㉠으로 놓으면

$f(x)=x-c$ 이것을 다시 ㉠에 대입하면

$c=\int_1^e\frac{t-c}{t}dt=\int_1^e\left(1-c\cdot\frac{1}{t}\right)dt=[t-c\ln t]_1^e=e-c-1$

$\therefore c=\frac{e-1}{2}$ $\quad\therefore f(x)=x-\frac{e-1}{2}$

$\therefore f(e)=e-\frac{e-1}{2}=\frac{e+1}{2}$

99. 정답 ②

$\int_0^1 f(t)dt=c$ …… ㉠으로 놓으면 $f(x)=e^x+2c$

이것을 다시 ㉠에 대입하면

$c=\int_0^1(e^t+2c)dt=[e^t+2ct]_0^1=e+2c-1$

$\therefore c=1-e$ $\quad\therefore f(x)=e^x+2(1-e)$

$f(x)=2$에서 $e^x+2-2e=2$ $\quad e^x=2e$

$\therefore x=\ln 2e=1+\ln 2$

100. 정답 ⑤

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(t)\sin t\,dt=k$ …… ㉠이라 하면

$f(x)=\cos x+k$ 이것을 다시 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+k)\sin t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+k\sin t\right)dt$

$=\left[-\frac{\cos 2t}{4}-k\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\frac{1}{8}-\frac{k}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}-k\right)$

$\therefore k=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore f(x)=\cos x+\frac{3}{4}$

$\therefore f(0)=\cos 0+\frac{3}{4}=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

101. 정답 $f(x)=\cos\frac{\pi}{4}x-\frac{4}{\pi}$

$f(x)=\cos\frac{\pi}{4}x+\int_0^2 f(t)dt$에서

$\int_0^2 f(t)dt = c$로 놓으면 $f(x) = \cos\frac{\pi}{4}x + c$

$c = \int_0^2 \left(\cos\frac{\pi}{4}t + c\right)dt = \left[\frac{4}{\pi}sin\frac{\pi}{4}t + ct\right]_0^2$

$= \frac{4}{\pi} + 2c \;\therefore\; c = -\frac{4}{\pi} \;\;\therefore\; f(x) = \cos\frac{\pi}{4}x - \frac{4}{\pi}$

102. **정답** ④

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

$= [\ln|x+1|]_0^1 = \ln 2$

103. **정답** ②

$\triangle AOP_k$와 $\triangle BOP_k$의 넓이는 같고, $\angle BOP_k = \frac{k\pi}{n}$이므로

$S_k = 2\cdot\triangle BOP_k = r^2\sin\frac{k\pi}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k = r^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$

$= r^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\;\;(\because\; \sin\pi = 0)$

$= r^2\int_0^1 \sin\pi x\,dx = r^2\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 = \frac{2r^2}{\pi}$

104. **정답** ④

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

$= \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}}$

$\therefore$ (주어진 식)$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \boxed{\frac{1}{1+x}}dx$

$= [\ln|1+x|]_0^1 = \boxed{\ln 2}$

105. **정답** ④

$\angle BOP_k = \frac{k\pi}{n}$이므로 제이코사인법칙에서

$\overline{BP_k}^2 = r^2 + r^2 - 2\cdot r\cdot r\cdot\cos\frac{k\pi}{n} = 2r^2\left(1 - \cos\frac{k}{n}\pi\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{BP_k}$

$= r\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2 - 2\cos\frac{k\pi}{n}} = r\int_0^1 \sqrt{2 - 2\cos\pi x}\,dx$

106. [정답] ④

$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left|\sin\frac{xk}{n}\right|\right)\frac{x}{n} = \int_0^x \ln|\sin x|dx$ 이므로

$f'(x) = \ln|\sin x|$

$f''(x) = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \tan x$

107. **정답** ④

$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{{}_{2n}P_n}}{n}\right)$에서

${}_{2n}P_n = 2n(2n-1)\cdot\cdots\cdot(n+1)$이므로

$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}(\ln\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} - \ln n)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\ln(n+1)(n+2)\cdots(n+n) - n\ln n\}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+n}{n}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x)dx$

$= [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

$= [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= [(x+1)\ln(x+1) - x]_0^1 = 2\ln 2 - 1$

108. **정답** $\frac{2}{\pi}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \int_0^1 \sin\pi x\,dx$

$= \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$

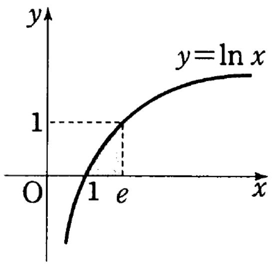
109. $e^2 - e$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1 e^{1+x}dx$$

$$=\left[e^{1+x}\right]_0^1=e^2-e$$

110. **정답** ①

[해설] $y=\ln x$에서 $x=1$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_1^e \ln x\,dx=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=e-[x]_1^e=e-(e-1)=1$$

111. **정답** ③

[해설] $S=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|\frac{1}{x}-x\right|dx$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-x\right)dx-\int_1^2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx$$

$$=\left[\ln x-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\left[\ln x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\ln 2+\frac{1}{8}\right)-\left(\ln 2-2+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{8}$$

112. **정답** ④

$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$에서 $\dfrac{y^2}{4}=1-x^2$, $y^2=4(1-x^2)$

$\therefore\ y=2\sqrt{1-x^2}\quad(\because\ y\geq 0)$

이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

한편 $y=\sqrt{1-x^2}$ 의 양변을 제곱하면 $x^2+y^2=1$이므로 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$는 반지름의 길이가1인 반원의 넓이와 같다. 따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$

113. **정답** 4

[해설] $0\leq x\leq\pi$일 때, $\sin x\geq 0$

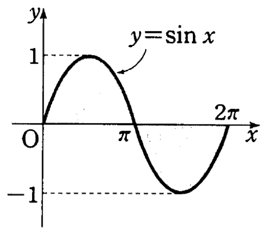
$\pi\leq x\leq 2\pi$일 때, $\sin x\leq 0$이므로, 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx$$

$$=[-\cos x]_0^{\pi}+[\cos x]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=(1+1)+(1+1)=4$$

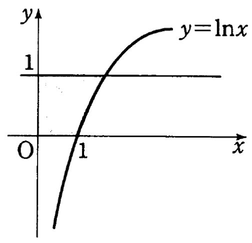


114. **정답** $e-1$

$y=\ln x$에서$x=e^y$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1 e^y dy=[e^y]_0^1=e-1$$



115. **정답** ②

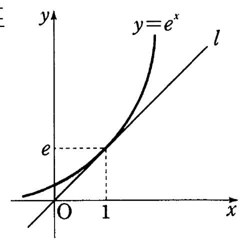
$y'=e^x$이고 곡선 $y=e^x$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(a,\ e^a)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-e^a=e^a(x-a)$

이 직선이 원점을 지나므로 $a=1$

그러므로 접선의 방정식은 $y=ex$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^1(e^x-ex)dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\left(e-\frac{e}{2}\right)-1$$

$$=\frac{e}{2}-1$$

116. **정답** ①

$\cos x=\sqrt{3}\ \sin x$에서 $\sqrt{3}\ \sin x-\cos x=0$

$\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\qquad\therefore\ x=\dfrac{\pi}{6}$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sqrt{3}\ \sin x)dx$$

$$=[\sin x+\sqrt{3}\ \cos x]_0^{\frac{\pi}{6}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$$

117. **정답** ③

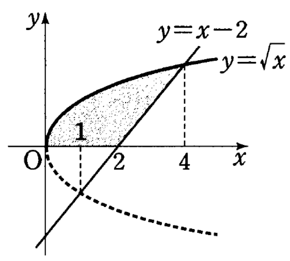
$\sqrt{x}=x-2$에서 $x=x^2-4x+4$

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=4$ ($\because\ x=1$은 무연근)

그러므로 구하는 영역의 넓이는



$$\int_0^2\sqrt{x}\,dx+\int_2^4(\sqrt{x}-x+2)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^4$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}-0+\left(\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}-8+8\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}-2+4\right)=\frac{10}{3}$$

다른풀이

어두운 부분의 넓이는

$$\int_0^2 \{(y+2)-y^2\}dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^2=\left(2+4-\frac{8}{3}\right)-0=\frac{10}{3}$$

118. **정답** ①

$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}x$에서 $x=-1,\ 0,\ 1$

$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$가 원점에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}x\right|dx=2\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{4}x^2\right]_0^1=2\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}$$

119. **정답** ①

두 부분의 넓이가 같으므로 $\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x-k\right)dx=0$

$$\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-kx\right]_0^1=(0-k)+\frac{2}{\pi}=0$$

$$\therefore k=\frac{2}{\pi}$$

120. **정답** ②

두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$의 교점의 x좌표는

$\sin 2x=\sin x$, $2\sin x\cos x=\sin x$

$\sin x(2\cos x-1)=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$0\le x\le \pi$에서 $x=0,\ \frac{\pi}{3},\pi$

구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$에서는 $\sin 2x\ge \sin x$

구간 $\left[\frac{\pi}{3},\ \pi\right]$에서는 $\sin x\ge \sin 2x$

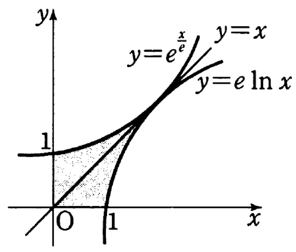
따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^{\pi}|\sin 2x-\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin 2x-\sin x)dx$$

$$=\left[-\frac{\cos 2x}{2}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[-\frac{\cos 2x}{2}+\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{5}{2}$$

121. **정답** ④



$y=e^{ax}$의 역함수는 $y=\frac{1}{a}\ln x\,(x>0)$

두 곡선이 $x=e$에서 접할 조건은

$f(e)=g(e),\ e^{ae}=\frac{1}{a}$ …… ㉠

$f'(e)=g'(e),\ \ ae^{ae}=\frac{1}{ae}$ …… ㉡

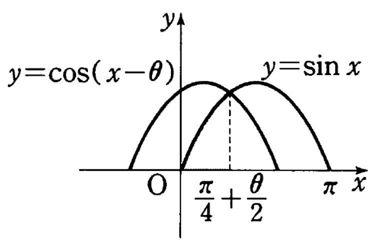
㉠, ㉡으로부터 $a=\frac{1}{e}$

따라서 두 곡선은 $y=e^{\frac{x}{e}}$, $y=e\ln x$이다.

두 곡선이 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_0^e\left(e^{\frac{x}{e}}-x\right)dx=2\left[e\cdot e^{\frac{x}{e}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^e=e^2-2e$$

122. **정답** ②



$$\int_0^{\pi}\sin x dx=[-\cos x]_0^{\pi}=2$$

방정식 $\sin x=\cos(x-\theta)$의 해를 α라 하면 $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$이므로

$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ …… ㉠

곡선 $y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=\cos(x-\theta)$에 의하여 이등분되므로 위의 그림에서 어두운 부분의 $\frac{1}{2}$ 이 되어야 한다.

$$\int_0^{\alpha}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\alpha}=-\cos\alpha+1=\frac{1}{2}$$

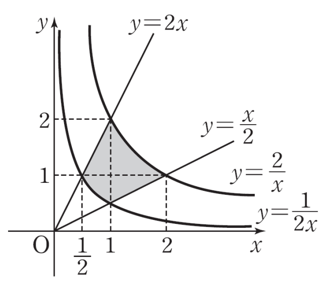
$\cos\alpha=\frac{1}{2}$ $\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

123. [정답] ③

해설



두 곡선 $xy=2$, $2xy=1$ 과 두 직선 $y=2x$, $2y=x$ 를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2x-\frac{1}{2x}\right)dx+\int_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\left[x^2-\frac{1}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[2\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$=\left(1-0-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)+\left(2\ln 2-1-0+\frac{1}{4}\right)$

$=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)+\left(2\ln 2-\frac{3}{4}\right)$

$=\frac{3}{2}\ln 2$

124. 정답 ②

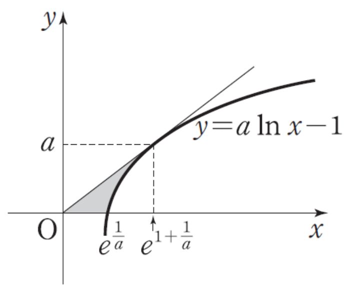
[해설]

$y=a\ln x-1\ (a>0)$ ⋯⋯ ㉠

$y'=\frac{a}{x}$

곡선 ㉠위의 접점을 $(t,\ a\ln t-1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$y=\frac{a}{t}(x-t)+a\ln t-1$ ⋯⋯ ㉡



㉡이 원점을 지나므로

$0=\frac{a}{t}(0-t)+a\ln t-1$에서

$t=e^{1+\frac{1}{a}}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{a}{e^{1+\frac{1}{a}}}x$

이므로 오른쪽 그래프에서

$S=\frac{1}{2}e^{1+\frac{1}{a}}\cdot a-\int_{e^{\frac{1}{a}}}^{e^{1+\frac{1}{a}}}(a\ln x-1)dx$

$=\frac{1}{2}e^{1+\frac{1}{a}}\cdot a-\left[ax\ln x-(a+10)x\right]_{e^{\frac{1}{e}}}^{e^{1+\frac{1}{e}}}$

$=\frac{e-2}{2}a\cdot e^{\frac{1}{a}}$

이 때, $\frac{dS}{da}=\frac{e-2}{2}\cdot\frac{a-1}{a}e^{\frac{1}{a}}$ 이므로

$\frac{dS}{da}=0$에서 $a=1$

증감을 조사하면 $a=1$ 일 때 극소이며 최소가 된다.

따라서 구하는 접선의 기울기는 $\frac{1}{e^{1+\frac{1}{1}}}=\frac{1}{e^2}$

125. [정답] ④

해설

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 에서 $\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}\geq 0$이므로 $0\leq x\leq a$

마찬가지로 $0\leq y\leq a$이다.

$\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$ 를 음함수의 미분법에 의하여 미분하면

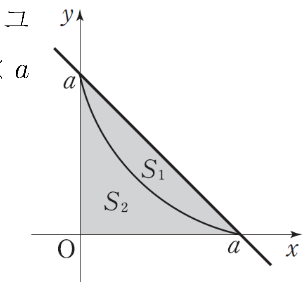
$\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 에서 $y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}<0$

이때 $y''=-\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$ 이므로

$y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ 를 대입하여 정리하면

$y''=\frac{1}{2x}+\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}}>0$ ($\because \sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$)

따라서 곡선 $\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$ 는 오른쪽 그림과 같이 x절편, y절편은 a이고 $0<x<a$ 에서 아래로 볼록하면서 감소한다.



$\therefore\ S_2=\int_0^a y\,dx$

$=\int_0^a(x+a-2\sqrt{a}\sqrt{x})dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+ax-2\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

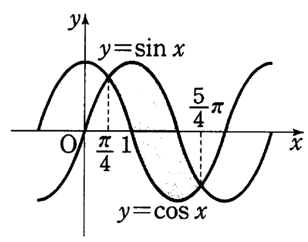
$=\frac{1}{6}a^2$

$S_1+S_2=\frac{1}{2}a^2$에서 $S_1=\frac{1}{3}a^2$

$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{3}a^2}{\frac{1}{6}a^2}=2$

126. **정답** $2\sqrt{2}$

$\sin x=\cos x$에서 $x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$



$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx$

$=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$

$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$

127. **정답** ⑤

한 변의 길이가 $2\sqrt{\sin x}$ 인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{\sin x})^2=\sqrt{3}\sin x$

따라서 구하는 부피는 V는

$V=\int_0^{\pi}\sqrt{3}\sin x\,dx=\sqrt{3}\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2\sqrt{3}$

128. $\frac{1}{2}(e^2-1)$

단면의 넓이가 $S(x)=e^{2x}$이므로 구간 $[0,\ 1]$에서 입체의 부피는

$\int_0^1 e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)$

129. **정답** ⑤

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left\{\sin^2x-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}dx$$

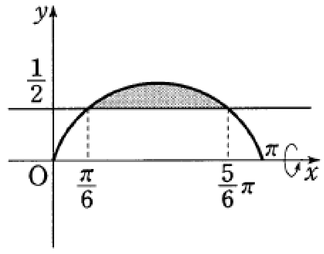
$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1-\cos2x}{2}-\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos2x\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$=\pi\left(\frac{5}{24}\pi+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\pi\left(\frac{1}{24}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

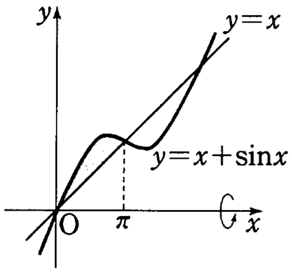
$$=\frac{1}{6}\pi^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$



130. 정답 ⑤

$0\leq x\leq\pi$에서 $x+\sin x=x$에서 $x=0,\ \pi$

그러므로 구하는 부피 V는



$$V=\pi\int_0^{\pi}\{(x+\sin x)^2-x^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}(2x\sin x+\sin^2x)dx$$

$$=\pi[-2x\cos x]_0^{\pi}+\pi\int_0^{\pi}2\cos x\,dx$$

$$+\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos2x}{2}dx$$

$$=\pi[-2x\cos x]_0^{\pi}+\pi[2\sin x]_0^{\pi}+\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin2x\right]_0^{\pi}$$

$$=2\pi^2+\frac{\pi^2}{2}=\frac{5}{2}\pi^2$$

131. 정답 ①

$$V=\pi\int_0^1(\sqrt{x}-1)^2dx=\pi\int_0^1(x-2\sqrt{x}+1)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right]_0^1=\frac{\pi}{6}$$

132. 정답 ③

$$V_x=\pi\int_{-4}^{4}y^2dx=\pi\int_{-4}^{4}9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)dx$$

$$=18\pi\int_0^4\left(1-\frac{x^2}{16}\right)dx=18\pi\left[x-\frac{x^3}{48}\right]_0^4=48\pi$$

$$V_y=\pi\int_{-3}^{3}x^2dy=\pi\int_{-3}^{3}16\left(1-\frac{y^2}{9}\right)dy$$

$$=32\pi\int_0^3\left(1-\frac{y^2}{9}\right)dy=32\pi\left[y-\frac{y^3}{27}\right]_0^3=64\pi$$

$V_x:\ V_y=3:4$

133. 정답 ⑤

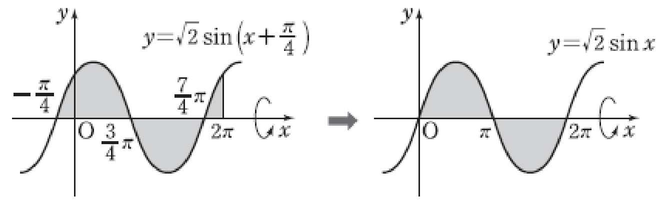
$$V=\pi\int_0^1(e^x-e^{-x})^2dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-2+e^{-2x})dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\left(e^2-4-\frac{1}{e^2}\right)$$

134. [정답] ①

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

이므로 곡선 $y=\sin x+\cos x$와 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=2\pi$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는 곡선 $y=\sqrt{2}\sin x\,(0\leq x\leq 2\pi)$를 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피와 같다.



따라서 구하는 부피V는

$$V=\pi\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}\sin x)^2dx=2\pi\int_0^{\pi}2\sin^2x\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos2x)dx$$

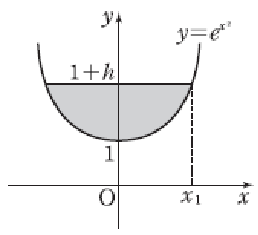
$$=2\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin2x\right]_0^{\pi}$$

$$=2\pi\left\{\left(\pi-\frac{1}{2}\sin2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin0\right)\right\}$$

$$=2\pi^2$$

135. [정답] ①

해설



$y=e^{x^2}$에서 $x^2=\ln y$이고 오른쪽 그림에서 물의 높이가 h일 때, 수면의 넓이 S는

$S=\pi{x_1}^2=\pi\ln(1+h)$

S를 시각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{\pi}{1+h}\cdot\frac{dh}{dt}$$

또한, 물의 부피 V는

$$V=\pi\int_1^{1+h}x^2dy=\pi\int_1^{1+h}\ln y\,dy$$

V를 시각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi\ln(1+h)\cdot\frac{dh}{dt}\quad\cdots㉠$$

한편, $V=\pi$일 때,

$$V=\pi\int_1^{1+h}\ln y\,dy=\pi[y\ln y-y]_1^{1+h}$$

$$=\pi\{(1+h)\ln(1+h)-h\}=\pi$$

에서 $(1+h)\ln(1+h)=1+h$

$h>0$이므로 $\ln(1+h)=1$

$\therefore h+1=e$, 즉 $h=e-1$

$\frac{dV}{dt}=2$이고 $h=e-1$이므로 ㉠에서

$2=\pi\frac{dh}{dt}$ $\therefore$ $\frac{dh}{dt}=\frac{2}{\pi}$

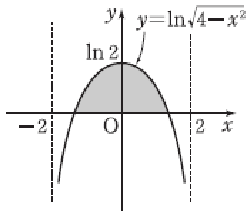
따라서 $V=\pi$, 즉 $h=e-1$인 순간 수면의 넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{1+h}\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{\pi}{e}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{e}$

136. [정답] ①

해설

곡선 $y=\ln\sqrt{4-x^2}$은 오른쪽 그림과 같다.



$\sqrt{4-x^2}=e^y$에서 $x^2=4-e^{2y}$

따라서 구하는 회전체의 부피는

$$\int_0^{\ln 2}\pi x^2dy=\pi\int_0^{\ln 2}(4-e^{2y})dy$$

$$=\pi\left[4y-\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\pi\left\{4\ln 2-\frac{1}{2}(4-1)\right\}$$

$$=\pi\left(4\ln 2-\frac{3}{2}\right)$$

137. **정답** $\frac{\pi^2}{2}$

$y=\sin x$를 x축의 둘레로 회전시켜 만든 입체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^{\pi}y^2dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

138. **정답** $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$

$y=\ln x$에서 $x=e^y$이므로 구하는 부피 V는

$$V=\pi\int_0^1x^2dy=\pi\int_0^1e^{2y}dy$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[e^{2y}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

139. **정답** $\frac{3}{2}\pi^2$

구하는 회전체의 부피를 V라 하면

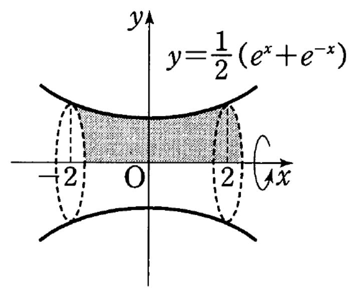
$$V=\pi\int_0^{\pi}\{(2\sin x)^2-(\sin x)^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\{4\sin^2x-\sin^2x\}dx$$

$$=3\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{3}{2}\pi\left[x-\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi^2$$

140. **정답** $\frac{\pi}{4}(e^4+8-e^{-4})$

구하는 부피를 V라 하면



$$V=\pi\int_{-2}^{2}y^2dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2dx$$

$$=2\pi\int_0^2\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{4}(e^4+8-e^{-4})$$

141. **정답** $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$v(t)=\cos t$에 대하여 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$일 때, $\cos t\ge 0$이고 $\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{2}{3}\pi$일 때,

$\cos t\le 0$이므로

$t=0$에서 $t=\frac{2}{3}\pi$일 때까지 점P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}|\cos t|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\cos t\,dt$$

$$=\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

142. **정답** 120

물을 넣기 시작한 지 t초 후의 수면의 높이를 $h(t)$라 하면

$$h(t)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{1+t}}dt=\left[2\sqrt{1+t}\right]_0^t=2\sqrt{1+t}-2$$

$h(t)=20$에서 $2\sqrt{1+t}=22$, $\sqrt{1+t}=11$

$1+t=121$ $\therefore$ $t=120$(초)

143. **정답** ①

$\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$, $\frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$이므로 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리 l은

$$l=\int_0^1e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{2}\,e^tdt=\left[\sqrt{2}\,e^t\right]_0^1=\sqrt{2}\,(e-1)$$

144. **정답** ②

$x=\cos t+1$, $y=1-\sin t$에서

$\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-\cos t$이므로

$t=0$에서 $t=\pi$까지 움직인 거리 l은

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(-\cos t)^2}\,dt=\int_0^{\pi}1dt=[t]_0^{\pi}=\pi$$

145. **정답** ③

$x=\frac{\pi}{2}\cos t(1+\cos t),\ y=\frac{\pi}{2}\sin t(1+\cos t)$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}\{-\sin t(1+\cos t)-\cos t\sin t\}$$

$$=-\frac{\pi}{2}(\sin t+\sin 2t)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{2}\{\cos t(1+\cos t)-\sin^2 t\}=\frac{\pi}{2}(\cos t+\cos 2t)$$

$$\therefore \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$=\frac{\pi^2}{2}(1+\sin t\sin 2t+\cos t\cos 2t)$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\{1+\cos(2t-t)\}=\pi^2\cos^2\frac{t}{2}$$

따라서 점P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2\cos^2\frac{t}{2}}\,dt=\pi\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt=\pi\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=2\pi$$

146. **정답** 1

점 P의 위치가 $x=\cos t,\ y=\sin t$이므로 $\vec{v}=(-\sin t,\ \cos t)$

$$\therefore\ |\vec{v}|=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}=1$$

따라서 속력이 항상 1로 일정하므로 $t=\frac{3}{4}\pi$일 때 속력도 1이 된다.

147. **정답** 2π

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{3}\cos t-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=-\sqrt{3}\sin t-\cos t$$

$0\le t\le\pi$에서 점P가 움직이는 거리 s는

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{(\sqrt{3}\cos t-\sin t)^2+(-\sqrt{3}\sin t-\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{4}\,dt=[2t]_0^{\pi}=2\pi$$

148. **정답** 25

$x=3t+4,\ y=4t+3$에서 $\frac{dx}{dt}=3,\ \frac{dy}{dt}=4$

속력 $|\vec{v}|$는 $|\vec{v}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 움직인 거리 l는

$$l=\int_0^5|\vec{v}|dt=\int_0^5 5dt=[5t]_0^5=25$$

149. **정답** ⑤

$$\frac{dx}{dt}=1-\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\sin t$$

따라서 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8$$

150. **정답** ②

$x=3t^2,\ y=3t-t^3$에서

$\frac{dx}{dt}=6t,\ \frac{dy}{dt}=3-3t^2$이므로 구하는 곡선의 길이$l$은

$$l=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{(6t)^2+(3-3t^2)^2}\,dt$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{9(t^2+1)^2}\,dt=3\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(t^2+1)dt$$

$$=6\int_0^{\sqrt{3}}(t^2+1)dt=6\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^{\sqrt{3}}=12\sqrt{3}$$

151. **정답** ④

$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$에서 $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로

$$1+\{f'(x)\}^2=1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

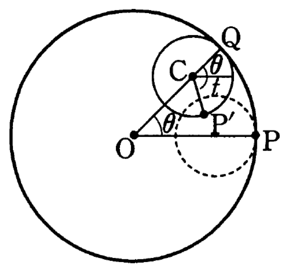
$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

곡선의 길이l은 $l=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이므로

$$l=\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{1}{2}[e^x-e^{-x}]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$$

152. **정답** ④

내부의 원 위의 한 점P가 굴러서 점P′에 있다고 하자.



(호의 길이)=(반지름의 길이)×(중심각의 크기)이고 (호PQ의 길이)=(호P′Q의 길이)이므로 두 원의 반지름의 길이의 비가 $1:\frac{1}{4}$이면

$\angle QCP'=4\angle QOP$

$t+\theta=4\theta\ \therefore\ t=3\theta$

점 O를 원점, 직선 OP를 x축 위에 놓으면

$\mathrm{C}\left(\frac{3}{4}\cos\theta,\ \frac{3}{4}\sin\theta\right)$

$\mathrm{P}'\left(\frac{3}{4}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos3\theta,\ \frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin3\theta\right)$

$x=\frac{3}{4}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos3\theta=\cos^3\theta$

$y=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin3\theta=\sin^3\theta$

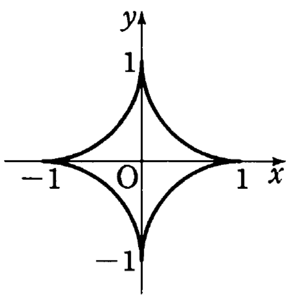
이므로 $\mathrm{P}'(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$

$\frac{dx}{d\theta}=-3\cos^2\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=3\sin^2\cos\theta$이므로

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$일 때, $\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$

$=\sqrt{9\cos^4\theta\sin^2\theta+9\sin^4\theta\cos^2\theta}$

$=3\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{2}\sin2\theta$



따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$l=4\times\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta d\theta$

$=4\times\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\times\frac{3}{2}=6$

153. [정답] ⑤

해설

t초 후의 점 P의 x좌표를 $\left(k,\ \frac{e^k+e^{-k}}{2}\right)$이라 하자.

한편, t초 동안 점 P가 움직인 거리는 t이므로

$t=\int_0^k\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_0^k\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx$

$=\int_0^k\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{e^k-e^{-k}}{2}$

$(e^k)^2-2te^k-1=0$에서 $e^k=t+\sqrt{t^2+1}$ $(\because\ e^k>0)$

따라서 7초 후의 점 P의 x좌표는 $\ln(7+5\sqrt{2})$이다.

154. **정답** $\sqrt{2}$

곡선 $x=t^2+2,\ y=t^2$에서

$\frac{dx}{dt}=2t,\ \frac{dy}{dt}=2t$이므로

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2t)^2+(2t)^2}=2\sqrt{2}\,t$

따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$l=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^1 2\sqrt{2}\,t\,dt$

$=\left[\sqrt{2}\,t^2\right]_0^1=\sqrt{2}$

155. **정답** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$

$y=x\sqrt{x}$에서 $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

따라서 구하는 곡선의 길이l은

$l=\int_0^4\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dt=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$

$=\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$

156. **정답** 78

$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$이라 하면 구하는 길이는

$\int_0^6\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_0^6\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}2x\right\}^2}dx$

$=\int_0^6\sqrt{1+\{x^2(x^2+2)\}dx}=\int_0^6\sqrt{(x^2+1)^2}dx$

$=\int_0^6(x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^6=72+6=78$

157. **정답** ②

어느 순간A에서 담긴 물의 부피를 V_A, B에 담긴 물의 부피를 V_B라 하면

$V_A=\int_0^u\frac{1}{3}ydy=\pi\left[\frac{1}{6}y^2\right]_0^u=\frac{\pi}{6}u^2$

$V_B=\pi\int_0^v ydy-\pi\int_0^v\frac{1}{3}ydy$

$=\pi\int_0^v\frac{2}{3}ydy=\pi\left[\frac{1}{3}y^2\right]_0^v=\frac{\pi}{3}v^2$

V_A+V_B는 항상 일정하므로

$\frac{\pi}{6}u^2+\frac{\pi}{3}v^2=c$ (c는 상수)

이 식의 양변을 u에 대하여 미분하면

$\frac{\pi}{3}u+\frac{2\pi}{3}v\cdot\frac{dv}{du}=0$

$\therefore\ \frac{dv}{du}=-\frac{u}{2v}$

따라서$v=\frac{1}{2}u$일 때, $\frac{dv}{du}=-1$

158. **정답** ⑤

$f(x)=e^{-x},\ f'(x)=-e^{-x}$이므로 점$(x_n,\ f(x_n))$에서의 접선$l_n$의 방정식

은 $y=-e^{-x_n}(x-x_n)+e^{-x_n}$

$y=0$으로 놓으면 $x=x_n+1$ $\quad\therefore\ x_{n+1}=x_n+1$

따라서$\{x_n\}$은 $x_1=1$, 공차가 1인 등차수열이다.

$\therefore\ x_n=n,\quad x_{n+1}=n+1$

$\therefore\ a_n\int_n^{n+1} e^{-x}dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-n}$

$=\left[-e^{-x}\right]_n^{n+1}-\frac{1}{2}e^{-n}=e^{-n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 공비가 $\frac{1}{e}$, 첫째항이 $\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$인 무한등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)}{1-\frac{1}{e}}=\frac{e-2}{2e^2-2e}$$

159. **정답** ②

점 P에서 곡선 $y=\sin^2 x\ (0\le x\le \pi)$의 그래프에 그은 두 접선의 접점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta$

$(0\le\alpha\le\beta\le\pi)$라 하면 접선의 방정식은

$y-\sin^2\alpha=\sin 2\alpha(x-\alpha)$ …… ㉠

$y-\sin^2\beta=\sin 2\beta(x-\beta)$ …… ㉡

㉠, ㉡이 서로 직교하므로 $\sin 2\alpha\sin 2\beta=-1$

그런데 $|\sin 2\alpha|\le 1,\ |\sin 2\beta|\le 1$이고

$0\le 2\alpha\le 2\beta\le 2\pi$이므로 $\sin 2\alpha=1,\ \sin 2\beta=-1$

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{3}{4}\pi$

따라서 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=x-\frac{\pi}{4},\ y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$

두 식을 연립하여 풀면 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$

구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\sin^2 x\right)dx$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{\pi x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$

160. [정답] ⑤

해설

ㄱ. $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx=[x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi$

$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x}dx=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx$

$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+1)dx=2\left[\frac{1}{2}\sin 2x+x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi$

$\therefore\ I_2-I_1=\pi$(참)

ㄴ. $I_3-2I_2+I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 3x-2\sin^2 2x+\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$

이 때, $\sin^2 3x-2\sin^2 2x+\sin^2 x$

$=(\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x)^2-2\sin^2 2x$
$\quad+(\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x)^2$

$=2\sin^2 2x\cos^2 x+2\cos^2 2x\sin^2 x-2\sin^2 2x$

$=2\sin^2 2x(\cos^2 x-1)+2\cos^2 2x\sin^2 x$

$=2\sin^2 x(\cos^2 2x-\sin^2 2x)$

$=2\sin^2 x\cos 4x$

$$\therefore\ I_3-2I_2+I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 3x\cos 4x}{\sin^2 x}dx$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x dx$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x dx$$

$$=4\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0\ \text{(참)}$$

ㄷ. ㄴ에서의 방법으로 $n\ge 2$일 때 $I_{n+1}-2I_n+I_{n-1}=0$이 성립함을 증명할 수 있다. 따라서

$I_{n+1}-I_n=I_n-I_{n-1}=\cdots=I_2-I_1=\pi$이다.

$$\therefore\ \sum_{k=2}^{10}(I_k-I_{k-1})=(I_2-I_1)+(I_3-I_2)+\cdots+(I_{10}-I_9)$$

$$=I_{10}-I_1=9\pi$$

$\therefore\ I_{10}=9\pi+I_1=10\pi$(참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

참고

$n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $I_{n+1}-2I_n+I_{n-1}=0$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명해 보자.

(ⅰ) n=2일 때, $I_3-2I_2+I_1=0$($\because$ ㄴ)이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (n>2)$일 때 $I_{k+1}-2I_k+I_{k-1}=0$이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때 $I_{k+2}-2I_{k+1}+I_k=0$이 성립함을 증명하자.

$\sin^2(k+2)x-2\sin^2(k+1)x+\sin^2 kx$

$=\{\sin(k+1)x\cos x+\cos(k+1)x\sin x\}^2$
$\quad-2\sin^2(k+1)x+\{\sin(k+1)x\cos x-\cos(k+1)x\sin x\}^2$

$=2\sin^2(k+1)x\cos^2 x+2\cos^2(k+1)x\sin^2 x$
$\quad-2\sin^2(k+1)x$

$=2\sin^2(k+1)x(\cos^2 x-1)+2\cos^2(k+1)x\sin^2 x$

$=2\sin^2 x\{\cos^2(k+1)x-\sin^2(k+1)x\}$

$=2\sin^2 x\cos 2(k+1)x$

$$\therefore\ I_{k+2}-2I_{k+1}+I_k=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{f_{k+2}(x)-2f_{k+1}(x)+f_k(x)\}dx$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2(k+1)x dx$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2(k+1)x\,dx$$

$$= 4\left[\frac{1}{2(k+1)}\sin 2(k+1)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \text{ (참)}$$

따라서 $n \geqq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1} = 0$이 성립한다.

1. 정답 ④ 2. 정답 228 3. 정답 ④
4. 정답 699 5. 정답 ② 6. 정답 ④
7. 정답 ① 8. 정답 ① 9. 정답 ⑤
10. 정답 144 11. 정답 ⑤ 12. 정답 ②
13. 정답 ⑤ 14. 정답 90 15. 정답 ②
16. 정답 576 17. 정답 ④ 18. 정답 ④
19. 정답 24 20. 정답 24 21. 정답 30
22. 정답 ② 23. 정답 ② 24. 정답 315
25. 정답 186 26. 정답 ① 27. 정답 ⑤
28. 정답 ④ 29. 정답 ① 30. 정답 ②
31. 정답 980 32. 정답 ① 33. 정답 ②
34. 정답 ③ 35. 정답 ④ 36. 정답 ①
37. 정답 369 38. 정답 105 39. 정답 ③
40. 정답 ② 41. 정답 ③ 42. 정답 ②
43. 정답 ③ 44. 정답 ③ 45. 정답 ②
46. 정답 84가지 47. 정답 ③ 48. 정답 287
49. 정답 36 50. 정답 288 51. 정답 ③
52. 정답 13 53. 정답 ④ 54. 정답 ⑤
55. 정답 ① 56. 정답 ① 57. 정답 ④
58. 정답 ② 59. 정답 ⑤ 60. 정답 ⑤
61. 정답 ⑤ 62. 정답 ③ 63. 정답 ④
64. 정답 ⑤ 65. 정답 920 66. 정답 ⑤
67. 정답 ② 68. 정답 24 69. 정답 ③
70. 정답 ② 71. 정답 ③ 72. 정답 96
73. 정답 ③ 74. 정답 ④ 75. 정답 ④
76. 정답 ⑤ 77. 정답 240 78. 정답 ③
79. 정답 ① 80. 정답 ④ 81. 정답 48
82. 정답 64 83. 정답 ④ 84. 정답 ④
85. 정답 ③ 86. 정답 ① 87. 정답 ②
88. 정답 ④ 89. 정답 ① 90. 정답 $3^n-3\times2^n+3$
91. 정답 28 92. 정답 ③ 93. 정답 ②
94. 정답 ① 95. 정답 ③ 96. 정답 ③
97. 정답 ④ 98. 정답 ⑤ 99. 정답 ⑤
100. 정답 126 101. 정답 ④ 102. 정답 ⑤
103. 정답 ② 104. 정답 85 105. 정답 ④
106. 정답 ③ 107. 정답 ③ 108. 정답 ③
109. 정답 ② 110. 정답 ② 111. 정답 ③
112. 정답 ⑤ 113. 정답 ③ 114. 정답 ③
115. 정답 ② 116. 정답 135 117. 정답 ⑤
118. 정답 ④ 119. 정답 ⑤ 120. 정답 ⑤
121. 정답 ① 122. 정답 ④ 123. 정답 34
124. 정답 ⑤ 125. 정답 56 126. 정답 240
127. 정답 90 128. 정답 ④ 129. 정답 ④
130. 정답 ⑤ 131. 정답 ③ 132. 정답 127
133. 정답 81 134. 정답 ⑤ 135. 정답 ④
136. 정답 ① 137. 정답 ⑤ 138. 정답 ③
139. 정답 ④ 140. 정답 ⑤ 141. 정답 ①
142. 정답 ⑤ 143. 정답 ② 144. 정답 ⑤
145. 정답 ① 146. 정답 ⑤ 147. 정답 ④
148. 정답 210 149. 정답 ③ 150. 정답 ⑤
151. 정답 ① 152. 정답 ④ 153. 정답 ④
154. 정답 19 155. 정답 372 156. 정답 ④
157. 정답 ② 158. 정답 ① 159. 정답 ①
160. 정답 ⑤ 161. 정답 ④ 162. 정답 ⑤
163. 정답 ④ 164. 정답 ⑤ 165. 정답 210
166. 정답 ④ 167. 정답 10 168. 정답 165
169. 정답 ③ 170. 정답 ① 171. 정답 ③
172. 정답 ③ 173. 정답 42 174. 정답 ②
175. 정답 ② 176. 정답 ④ 177. 정답 ④
178. 정답 ⑤ 179. 정답 25 180. 정답 ②
181. 정답 ② 182. 정답 ②

1. 정답 ④

[해설]

두 다항식 A, B의 최대공약수를 G라 하면 서로소인 두 다항식 a, b에 대하여

$$A = aG,\ B = bG$$

이때, $AB = abG^2$이고 G가 6차의 다항식이므로 G^2은 12차의 다항식이고 완전제곱식이다.

그러므로 G^2에 따라 다음과 같이 2가지의 경우로 나눌 수 있다.

(i) $G^2 = (x+1)^4(x+2)^8$인 경우

$G = (x+1)^2(x+2)^4$이므로 A, B의 공약수의 개수는

$(2+1)(4+1) = 15$(개)

(ii) $G^2 = (x+1)^2(x+2)^{10}$인 경우

$G = (x+1)(x+2)^5$이므로 (i)과 중복되지 않는 경우는

$(x+2)^2$, $(x+1)(x+2)^5$으로 2개다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 공약수의 개수는

$15 + 2 = 17$(개)

2. 정답 228

[해설] 정수 N의 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이면 정수 N은 3의 배수이므로 세 자리 정수가 3의 배수가 되려면 세 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되어야 한다. 0에서 9까지의 수를 3으로 나누었을 때의 나머지를 기준으로 집합 A, B, C를

$A = \{0, 3, 6, 9\}$, $B = \{1, 4, 7\}$, $C = \{2, 5, 8\}$라고 하자.

이때, 세 개의 카드를 뽑아서 만든 세 자리 정수가 3의 배수가 되는 것은 다음 네 가지 경우이다.

(ⅰ) A에서 3개의 수를 뽑는 경우

$3 \times 3 \times 2 = 18$(가지)

(ⅱ) B에서 3개의 수를 뽑는 경우

$3! = 6$(가지)

(ⅲ) C 에서 3개의 수를 뽑는 경우

$3! = 6$(가지)

(ⅳ) A, B, C에서 한 개씩 뽑는 경우

A에서 0을 뽑았을 때의 방법의 수는

$3^2 \times 2 \times 2 = 36$(가지)

A에서 3, 6, 9 중 하나를 뽑았을 때의 방법의 수는

$3^3 \times 3! = 162$(가지)

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 방법의 수는

$18 + 6 + 6 + 36 + 162 = 228$(가지)

3. 정답 ④

영역 a는 5가지가 모두 가능하다. 이 때, 세 영역 b, c, d에 색을 칠할 수 있는 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) 두 영역 a, c에 같은 색을 칠할 때,

b는 a, c와 달라야 하므로 4가지

d도 a, c와 달라야 하므로 4가지

∴ $5 \times 4 \times 4 = 80$(가지)

(ⅱ) 두 영역 a, c에 다른 색을 칠할 때,

c는 a와 달라야 하므로 4가지

b는 a, c와 달라야 하므로 3가지

d도 a, c와 달라야 하므로 3가지

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는 $80 + 180 = 260$

4. 정답 ②

[해설]

(ⅰ) 3가지 색을 사용하는 경우

• A와 C에 같은 색, B와 E에 같은 색을 칠하고 D에 1가지 색을 칠하는 방법

• A와 C에 같은 색, B와 D에 같은 색을 칠하고 E에 1가지 색을 칠하는 방법

• A와 D에 같은 색, B와 E에 같은 색을 칠하고 C에 1가지 색을 칠하는 방법

위 각각의 경우의 수는 4가지 색에서 3가지 색을 뽑아 일렬로 배열하는 방법의 수와 같다.

$\therefore 3 \times {}_4\mathrm{P}_3 = 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$(가지)

(ⅱ) 4가지 색을 사용하는 경우

(A와 C) 또는 (A와 D) 또는 (B와 E) 또는 (B와 D)에 같은 색을 칠하고 나머지는 모두 다른 색을 칠하면 된다.

$\therefore 4 \times {}_4\mathrm{P}_4 = 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는 $72 + 96 = 168$(가지)

5. 정답 ④

[해설] 1부에서 독창, 중창, 합창 순으로 3팀이 공연하는 방법의 수는

$2 \times 2 \times 3 = 12$(가지)

2부에서 독창, 중창, 합창, 합창 순으로 4팀이 공연하는 방법의 수는

$1 \times 1 \times 2 \times 1 = 2$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$12 \times 2 = 24$(가지)

6. 정답 699

[해설]

4560보다 큰 네 자리 정수의 꼴은 다음과 같다.

456□, 457□, 46□□, 47□□, 5□□□, 6□□□, 7□□□

(ⅰ) 456□꼴 : □안에 들어갈 수는 1, 2, 3, 7의 4가지

(ⅱ) 457□꼴 : □안에 들어갈 수는 0, 1, 2, 3, 6의 5가지

(ⅲ) 46□□, 47□□꼴 : □안에 들어갈 수는 천의 자리와 백의 자리의 수를 제외한 6개의 수에서 두 개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$2 \times {}_6\mathrm{P}_2 = 60$

(ⅳ) 5□□□, 6□□□, 7□□□꼴

□ 안에 들어갈 수는 천의 자리의 수를 제외한 7개의 수에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$3 \times {}_7\mathrm{P}_3 = 630$

따라서 (ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 개수는

$4 + 5 + 60 + 630 = 699$

7. 정답 ①

[해설]

100원짜리 동전 1개를 지불하는 금액과 50원짜리 동전 2개를 지불하는 금액은 같으므로 100원짜리 동전 2개를 50원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각한다.

따라서 50원짜리 동전 7개와 10원짜리 동전 3개를 이용하여 지불할 수 있는 금액의 수는

$8\times4-1=31$(가지)

8. 정답 ①

[해설]

(ⅰ) $c=1$인 경우 $a+3b=20$

$(a,b)=(2,6)$, $(5,5)$⇨2(가지)

(ⅱ) $c=2$ 인 경우 $a+3d=15$

$(a,b)=(1,3)$, $(6,3)$⇨2(가지)

(ⅲ) $c=3$인 경우 $a+3d=10$

$(a,b)=(1,3)$, $(4,2)$⇨2(가지)

(ⅳ) $c=4$인 경우 $a+d=5$

$(a,b)=(2,1)$⇨1(가지)

따라서, 구하는 순서쌍 (a,b,c)의 개수는

$2+2+2+1=7$(가지)

9. 정답 ⑤

[해설]

조건식에서 $p=-a=b$, $q=-b+a$이고 점 $(p,\ q)$와 원점 사이의 거리가 4보다 큰 경우는

$\sqrt{p^2+q^2}>4$

$(-a-b)^2+(-b+a)^2>16$

$a^2+b^2>8$ ⋯ ㉠

이 때, $a^2+b^2\le8$을 만족하는 $(a+b)$의 순서쌍은

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)이므로 ㉠을 만족하는 경우의 수는

$36-4=32$(가지)

10. 정답 ⑤

[해설]

이차방정식 $ax^2-6x+b=0$의 판별식을 D라 할 때 이 방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=9-ab\ge0$이므로 $ab\le9$

(ⅰ) $a=1$일 때, $b\le9$이므로

$b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$의 6개

(ⅱ) $a=2$일 때, $b\le\frac{9}{2}$이므로

$b=1,\ 2,\ 3,\ 4$의 4개

(ⅲ) $a=3$일 때, $b\le3$이므로

$b=1,\ 2,\ 3$의 3개

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 순서쌍의 개수는

$6+4+3=13$(개)

11. 정답 ②

[해설] 삼각형의 세 변의 길이가 결정되면 삼각형이 하나로 결정된다.

삼각형의 각 변에 사용된 성냥개비의 개수를 각각 $x,y,z(x\le y\le z)$라고 할 때, 서로 다른 삼각형의 개수는

$x+y+z=15$, $x+y>z$를 만족하는 자연수의 순서쌍 (x,y,z)의 개수와 같다.

$3z\ge x+y+z=15$에서 $z\ge5$이고, $2z<x+y+z=15$에서

$z<\frac{15}{2}$이므로 z의 값은 5, 6, 7 중 하나이다.

(ⅰ) $z=5$일 때, $x+y=10$, $x\le y\le5$ 이므로 $x+y+z=15$의

해는 $(5,5,5)$⇨1가지

(ⅱ) $z=6$일 때, $x+y=9$, $x\le y\le6$이므로 $x+y+z=15$의 해는

$(3,6,6)$, $(4,5,6)$⇨2가지

(ⅲ) $z=7$일 때, $x+y=8$, $x\le y\le7$ 이므로 $x+y+z=15$의 해는

$(1,7,7)$, $(2,6,7)$, $(3,5,7)$, $(4,4,7)$⇨4가지

따라서, 구하는 삼각형의 개수는

$1+2+4=7$(개)

12. 정답 ⑤

[해설] 블록을 쌓은 모양을 앞에서 보았을 때, 왼쪽 줄부터 쌓여 있는 블록의 개수를 각각 x,y,z,w 라고 하면

$x+y+z+w=10$

(x,y,z,w는 가장 큰 수가 4인 자연수)를 만족한다.

순서를 무시하고 가장 큰 수가 4인 네 자연수의 합으로 10을 나타내는 방법은

$1+1+4+4$, $1+2+3+4$, $2+2+2+4$

각각의 경우에 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$(가지), $4!=24$(가지), $\frac{4!}{3!1!}=4$(가지)

따라서, 구하는 방법의 수는

$6+24+4=34$(가지)

13. 정답 144

[해설]

y축의 음의 방향으로 가는 경우는 없으므로 y축의 양의 방향으로 가는 경우가 1회, x축의 음의 방향으로 가는 경우가 2회이면 점 $(-1,\ 1)$의 위치에 도달하게 된다.

4번째에 처음으로 점 $(-1,\ 1)$의 위치에 도달하는 것을 화살표로 나타내면

→←←↑, ←→←↑, ←←→↑, →↑←←,

→←↑←, ←→↑←, ←←↑→, ↑→←←

의 8가지이다.

(여기에서 ←↑→←, ←↑←→, ↑←→←, ↑←←→ 인 경우는 점 $(-1,\ 1)$의 위치에 두 번째로 도달하는 경우이므로 제외된다.)

그 각각에 대하여 주사위의 눈이 나오는 경우의 수는

$2\times1\times3\times3=18$(가지)

이므로 구하고자 하는 모든 경우의 수는 $8\times18=144$(가지)이다.

14. 정답 ④

[해설] 4의 배수가 되기 위해서는 끝의 두 자리가 4의 배수가 되어야 하므로 다음과 같은 아홉 가지의 경우가 있다.

□12, □16, □24, □32, □36, □44, □52, □56, □64

□에는 1~6까지의 수가 들어갈 수 있으므로 구하는 4의 배수의 개수는

$9\times6=54$(개)

15. 정답 ④

[해설]

(i) A에 2, 4중 하나를 넣는 경우

A에 2를 넣은 경우에는 B에 1, 3중 하나가 와야 하므로 2가지, 이 각각에 대하여 C에는 B에 온 수 중 하나를 제외한 수가 와야 하므로 1가지, 이 각각에 대하여 D에는 C에 사용된 수를 제외한 수가 와야 하므로 1가지

이다.

$\therefore 2\times1\times1$(가지)

마찬가지로 A에 4를 넣는 경우의 수도 $2\times1\times1$이다.

그러므로 구하는 경우의 수는

$2\times1\times1\times2=4$(가지)

(ii) A에 1, 3중 하나를 넣는 경우

A에 1을 넣는 경우 다음과 같다.

B − C − D

2 − 3 < 2, 4

3 < 2 − 3, 4 − 3

4 − 3 < 2, 4

그러므로 6가지이다.

마찬가지로 A에 3을 넣는 경우의 수도 6가지이다.

그러므로 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$(가지)

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4+12=16$(가지)

16. 정답 ②

[해설] A□□□□□ : $5!=120$, B = □□□□□ : $5!=120$

C□□□□□ : $5!=120$, DA□□□□ : $4!=24$

DB□□□□ : $4!=24$, DC□□□□ : $4!=24$

DEA□□□ : $3!=6$, DEB = □□□ : $3!=6$

DEC□□□ : $3!=6$ 이므로 DECFBA는 450번째 나오는 문자이다.

17. 정답 ②

[해설] A, B, C, D, E의 영역의 넓이는 각각

$1^2\pi$, $(2^2-1^2)\pi$, $(3^2-2^2)\pi$, $(4^2-3^2)\pi$, $(5^2-4^2)\pi$

즉, $\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi$이고 물감1통으로 10π 이하의 넓이만 칠할 수 있으므로, E, D, C, B, A의 순서로 색을 칠한다고 하면

E에 칠할 수 있는 색은 3(가지)

D에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 2(가지)

C에 칠할 수 있는 색은 E, D에 칠한 색을 제외한 1(가지)

B에 칠할 수 있는 색은 E, C에 칠한 색을 제외한 1(가지)

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2(가지)

따라서, 서로 다르게 색칠된 문양의 개수는

$3\times2\times1\times1\times2=12$(개)

18. 정답 90

[해설] A에게 서로 다른 종류의 과일 2개를 주는 경우는

(사과, 배), (사과, 감), (사과, 귤), (배, 감), (배, 귤), (감, 귤)의 6가지가 있다.

A가 (사과, 배)를 받았다고 할 때, 다른 세 사람에게 남은 6개의 과일을 나누어 주는 경우를 다음과 같이 나누어 생각한다.

(ⅰ) B, C, D 중에 (사과, 배)를 받은 사람이 있는 경우

그 사람을 정하는 경우의 수는 3가지이고, 이때, 다른 두 사람은 모두(감, 귤)을 받게된다.

$\therefore 3\times1=3$(가지)

(ⅱ) B, C, D 중에 (사과, 배)를 받은 사람이 없는 경우

세 사람은 {(사과, 감), (배, 귤), (감, 귤)} 또는 {(사과, 귤), (배, 감), (감, 귤)}을 적당히 나누어 받게 된다.

$\therefore 2\times3!=12$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는

$6\times(3+12)=90$(가지)

19. 정답 ②

[해설] 붉은색, 푸른색, 노란색, 검정색 네 가지의 색을 가지고 있다고 하고, 붉은색으로 칠한 면을 바닥에 닿도록 정육면체를 놓으면 윗면에 붉은색을 칠하는 경우와 붉은색을 칠하지 않는 경우의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 윗면에 붉은색을 칠하는 경우

옆면에 칠하는 방법은 붉은색을 제외한 세 가지 색 중에서 한 자기 색을 두 번 칠해야 한다. 두 번 칠하는 색을 고르는 방법의 수는 3(가지)이다. 그런데 두 번 칠하는 색은 서로 이웃할 수 없으므로 칠하는 방법의 수는 1(가지)이다.

$\therefore 3\times1=3$(가지)

(ⅱ) 윗면에 붉은색을 칠하지 않는 경우

윗면에 칠할 색을 고르는 방법의 수가 3(가지)이다. 옆면에는 남은 두 가지 색을 두 번씩 번갈아가며 칠해야 하므로 칠하는 방법의 수는 1(가지)이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$3+3=6$(가지)

20. 정답 576

[해설] 맨 위 가로줄에 모자를 거는 방법의 수는 4!(가지) 이다.

맨 위에 ABCD의 순서로 배열 할 때 A의 아래에 B가 오는 경우는 다음과 같이 3가지 경우가 있다.

맨 위	A	B	C	D
가운데	B	A	D	C
	B	C	D	A
	B	D	A	C

위의 경우 중에서

맨 위	A	B	C	D
가운데	B	A	D	C

인 경우 맨 아래 줄에 배열하는 방법이 4가지이고, 나머지 경우는 각각 2가지씩 있으므로 구하는 방법의 수는

$4!\times3\times8=576$(가지)

21. 정답 24

[해설] 부등식 $2x^2-5ax+5b<0$의 해가 $x=4$를 포함하면 $32-20a+5b<0$이 성립한다.

$\therefore b<\dfrac{20a-32}{5}$ …㉠

$a=1$일 때, ㉠의 식을 만족하는 b는 없다.

$a=2$일 때, $b=1$

$a=3$일 때, $b=1,\ 2,\ 3, 4,\ 5$

$a=4$일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4\ 5,\ 6$

$a=5$일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a=6$일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$\therefore 1+5+6+6+6=24$

22. 정답 24

[해설] 꼭짓점의 위치에 있는 원에 들어가는 수를 각각a, b, c라 하면 각 변에 있는 세 수의 합이 모두 같으므로

$1+2+3+4+5+6+a+b+c$

의 값이 3의 배수가 되어야 한다. 즉, $a+b+c$의 값도 3의 배수가 되어야 하므로 이 중에서 가능한 집합$\{a, b, c\}$ 는

23. 정답 30

[해설] 맨 위와 맨 아래 사다리꼴에 서로 다른 3가지 색을 A, B, C라 할 때, 세 가지색 A, B, C를 칠하는 방법의 수는

$3\times2=6$(가지)

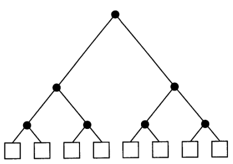
맨 위와 맨 아래 사다리꼴에 A와 B를 각각 칠한다면 가운데 세 사다리꼴에 칠하는 방법의 수는

ABACB , ABCAB , ACACB , ACBAB , ACBCB 의 5가지이므로 구하는 방법의 수는

$6\times5=30$(가지)

24. 정답 315

[해설]



위의 그림과 같이 8명의 선수가 하는 토너먼트 대회 대진표에서 8개의

□를 순서대로 채우는 경우의 수는8!(가지)

그런데 ●를 기준으로 ●와 연결된 아래 부분을 좌우대칭이동 해도 동일한 토너먼트 대회가 된다.

이러한 ●가 7개 이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{2^7}=315$(가지)

25. 정답 186

[해설]

7명을 일렬로 배열하는 방법의 수 (7!)에서 여학생 모두를 홀수 번호의 방에 배정하는 방법의 수를 빼면 구하는 방법의 수를 구할 수 있다.

홀수 시험장 4곳 중에서 3곳을 뽑아 여학생 3명에게 순서를 고려하여 배정하고, 나머지 4명의 남학생을 순서를 고려하여 배정하는 방법의 수는 ${}_4P_3\times4!$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$7!-{}_4P_3\times4!=4!(7\cdot6\cdot5-4\cdot3\cdot2)=186\times4!$

$\therefore n=186$

26. 정답 ①

[해설] ${}_nP_2+{}_{n+1}P_2={}_{n+3}P_2$에서

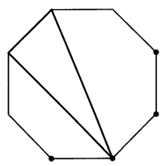
$n(n-1)+(n+1)n=(n+3)(n+2)$

$n^2-5n-6=0$, $(n+1)(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because n$은 자연수)

27. 정답 ⑤

[해설] 한 개의 변에 대하여 한 변만 공유하는 삼각형은 4개씩 만들 수 있으므로 구하는 삼각형의 개수는



$8\times4=32$(개)

28. 정답 ④

[해설] 인형A에 셔츠와 바지를 고르는 방법의 수는 $3\times3=9$이고, 인형B에 셔츠와 바지를 고르는 방법의 수는 $2\times2=4$이다.

이때, 셔츠와 바지에 색을 정하는 방법이 각각 2가지씩이므로 구하는

경우의 수는

$9\times4\times2^2=144$(가지)

29. 정답 ①

[해설] A, B는 서로 직접 연결되어 있지않고, C, D, E도 서로 직접 연결되어 있지 않으므로 도시를 여행하는 순서는 A, B와 C, D, E가 교대로 나타나야 한다.

(ⅰ) C, D, E를 일렬로 나열하는 경우의 수 :$3!=6$(가지)

(ⅱ) C, D, E사이에 A, B를 넣는 경우의 수 : ${}_2P_2=2$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$(가지)

30. 정답 ②

[해설]

8칸에서 세 칸에 칠하게 되므로 색을 칠하지 않는 칸은 5개다.

□ □ □ □ □

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

색을 칠하지 않는 칸 사이와 양 끝의 6개의 공간에 서로 다른 3가지 색을 배열하는 경우의 수와 같으므로

$_6\mathrm{P}_3 = 6\times5\times4 = 120$(가지)

31. 정답 ①

[해설]

전체 6팀을 나열하는 방법의 수에서 다음 방법의 수를 뺀다.

(i) 남학생으로 구성된 팀이 이웃하는 방법의 수는 $2\times5!$이다.

(ii) 남학생으로 구성된 팀 사이에 한 혼성팀이 들어가는 방법의 수는 $4\times4!\times2!$

따라서 구하는 방법의 수는

$$6!-2\times5!-4\times4!\times2! = (30-10-8)\times4! = 288$$

32. 정답 ②

[해설]

밑면에 칠하는 경우의 수는 7(가지)

이 각각에 대하여 나머지 6개의 색 중 삼각기둥의 옆면에 3개를 칠하는 경우의 수는 $\frac{_6P_3}{3}$(가지)

또, 이 각각에 대하여 나머지 3개의 색을 정사면체의 3개의 옆면에 칠하는 경우의 수는 $3!$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$$7\times\frac{_6P_3}{3}\times3! = 1680\text{(가지)}$$

33. 정답 980

[해설]

각 차수마다 카드를 한 장씩 택해야 한다. 이 때, 개수가 적은 이차식, 사차식, 삼차식의 카드 $(6-1)$장, 삼차식의 카드 $(9-2)$장, 일차식의 카드 $(10-3)$장에서 각각 1장씩 뽑는 방법의 수가 구하는 값과 같다.

$\therefore 4\times5\times7\times7 = 980$

34. 정답 ③

[해설] (i) 23○○○○이고 일의 자리의 수가 1 또는 3인 경우의 수는 $_3\Pi_3\times2 = 3^3\times2 = 54$

(ii) 3○○○○○이고 일의 자리의 수가 1 또는 3인 경우의 수는 $_3\Pi_4\times2 = 3^4\times2 = 162$

따라서 구하는 경우의 수는 $54+162 = 216$(가지)

35. 정답 ④

[해설] (i) 최고 자리의 수가 1인 경우 : $\frac{7!}{4!\times2!} = 105$

(ii) 최고 자리의 수가 2인 경우 : $\frac{7!}{3!\times2!\times2!} = 210$

(i), (ii)에서 구하는 정수의 개수는 $105+210 = 315$(개)

36. 정답 ①

[해설]

(i) 네 자리 자연수 중 홀수는 일의 자리 숫가가 1또는 3일 때 이므로

$x = 3\times4\times4\times2 = 96$(가지)

(ii) 세 자리 자연수 중 짝수는 일의 자리 숫자가 0, 2일 때 이므로

$y = 3\times4\times2 = 24$(가지)

(i), (ii)에 의하여

$x-y = 96-24 = 72$

37. 정답 ③

[해설]

(i) 남학생은 남자 고등학교와 남녀공학 고등학교인 3개 학교 중에서

배정되므로 남학생 2명이 고등학교에 배정 받는 경우의 수는

$_3\Pi_2 = 9$(가지)

(ii) 여학생은 여자 고등학교와 남녀공학 고등학교인 5개 학교 중에서

배정되므로 여학생 3명이 고등학교에 배정 받는 경우의 수는

$_5\Pi_3 = 125$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는

$9\times125 = 1125$(가지)

38. 정답 ②

[해설] 서로 다른 5개의 공을 3개의 상자 A, B, C에 넣는 방법의 수는

$_3\Pi_5 = 3^5 = 243$(가지)

한 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 13 이상이 되는 경우는 $\{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}$ 가 적힌 공이 한 상자에 들어간 경우이다.

(i) $\{1,3,4,5\}$가 적힌 공이 한 상자에 들어간 경우

$3\times2 = 6$(가지)

(ii) $\{2,3,4,5\}$가 적힌 공이 한 상자에 들어간 경우

$3\times2 = 6$(가지)

(iii) $\{1,2,3,4,5\}$가 적힌 공이 한 상자에 들어간 경우

3(가지)

따라서, 구하는 방법의 수는

$243-6-6-3 = 228$(가지)

39. 정답 ③

[해설] 두 수 x_1, x_2의 최댓값을 M이라 하고 두 수 x_3, x_4의 최솟값을 m이라 하면 $M>m$인 경우의 수는 다음과 같다.

$m=1$일 때, $M>1$인 경우 :

$({}_4\Pi_2 - {}_3\Pi_2)\times({}_4\Pi_2 - {}_1\Pi_2) = 7\times15 = 105$(가지)

$m=2$일 때, $M>2$인 경우 :

$({}_3\Pi_2 - {}_2\Pi_2)\times({}_4\Pi_2 - {}_2\Pi_2) = 5\times12 = 60$(가지)

$m=3$일 때, $M>3$인 경우 :

$({}_2\Pi_2 - {}_1\Pi_2)\times({}_4\Pi_2 - {}_3\Pi_2) = 3\times7 = 21$(가지)

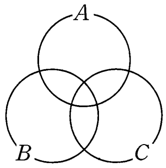
따라서 구하는 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는

$105+60+21=186$

40. 정답 ③

[해설]

국어, 영어, 수학을 신청하는 학생의 집합을 각 각 A, B, C라 하면 20명의 학생이 모두 적어도 2과목 이상 신청해야 하므로
$(A\cap B)-C$, $(B\cap C)-A$, $(C\cap A)-B$, $A\cap B\cap C$중 하나에 속해야 한다.
그러므로 구하는 경우의 수는 4^{20}(가지)



41. 정답 ②

[해설]

(ⅰ) 서로 다른 5개의 과일을 세 개의 바구니 A, B, C에 담는 경우의 수는 ${}_3\Pi_5=243$(가지)

(ⅱ) 5개의 과일을 두 개의 바구니 A와 B에 담는 경우의 수는 ${}_2\Pi_5=32$(가지)

(ⅲ) 5개의 과일을 두 개의 바구니 A와 C에 담는 경우의 수도 32가지이고, B와 C에 담는 경우의 수도 32가지이다.

(ⅳ) 5개의 과일을 모두 한 개의 바구니 A 또는 B 또는 C에 담는 경우의 수는 각각 1가지씩이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$243-32\cdot 3+1\cdot 3=150$가지

42. 정답 369

[해설] 전체 문자열의 개수는 ${}_5\Pi_4=5^4=625$(개)이고, a를 포함하지 않는 문자열의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$(개)이므로 a를 포함하는 문자열의 개수는

$625-256=369$(개)

43. 정답 105

[해설] 불이 켜진 전구가 있는 경우에는 전구 A, B, C 중에서 적어도 하나는 켜지고 전구 D, E, F, G중에서 적어도 하나가 켜져야 한다.

(ⅰ) 전구A, B, C중에서 적어도 하나가 켜지는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3-1=7$(가지)

(ⅱ) 전구 D, E, F, G 중에서 적어도 하나가 켜지는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4-1=15$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는

$7\times 15=105$(가지)

44. 정답 ③

[해설] MATH를 하나의 문자X로 보면 구하는 경우의 수는 6개의 문자 “I L O V E X”를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 문자열

MATH를 포함하는 경우의 수는 6!(가지)

45. 정답 ②

[해설] A에서 B로 가는 모든 최단 경로의 수는

$\dfrac{10!}{4!6!}=210$(가지)

A에서 C로 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{6!}{2!4!}=15$(가지)

C에서 B로 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$(가지)

이므로 A에서 C를 거쳐서 B로 가는 최단 경로의 수는

$15\times 6=90$(가지)

따라서, 구하는 최단 경로의 수는

$210-90=120$(가지)

46. 84가지

6개의 숫자 1, 3, 3, 5, 7, 7을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{6!}{2!2!}=180$(가지)

3, 3을 각각 한 묶음으로 하여 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{2!}=60$(가지)

7, 7을 각각 한 묶음으로 하여 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{2!}=60$(가지)

3, 3과 7, 7을 각각 한 묶음으로 하여 나열하는 방법의 수는 $4!=24$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $180-(60+60-24)=84$(가지)

47. 정답 ③

[해설] 최고자리의 수가 1인 여섯 자리 자연수의 개수는

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$

최고자리의 수가 2인 여섯 자리 자연수의 개수는 $\dfrac{5!}{2!}=60$

최고자리의 수가 3인 여섯 자리 자연수의 개수는 $\dfrac{5!}{2!2!}=30$

최고자리의 두 수가 41인 여섯 자리 자연수의 개수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

최고자리의 두 수가 42인 여섯 자리 자연수의 개수는 $4!=24$

최고자리의 두 수가 43인 여섯 자리 자연수의 개수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

최고자리의 세 수가 441인 여섯 자리 자연수의 개수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$

이때, $30+60+30+12+24+12+3=171$이므로 442123, 442132는 각각 172와 173번째의 수이다.

따라서 442213은 174번째의 수이다.

48. 정답 ③

[해설] 단어 exercises를 구성하는 문자는 e가 3개, s가 2개,

x, r, c, I 가 각각 1개씩 있으므로 이들 문자 중에서 4개의 문자를 선택하여 배열하는 방법은 아래와 같이 다섯 가지의경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) e, e, e,○의 경우

○의 문자를 선택하는 방법이 5(가지)이고, 배열하는 방법은 $\frac{4!}{3!}=4$(가지)이므로 $5\times4=20$(가지)

(ii) e, e, s, s의 경우

네 문자를 배열하는 방법은 $\frac{4!}{2!2!}=6$(가지)

(iii)

(iv)

(v)

49. 정답 ④

[해설] 네 자리의 자연수 중에서 일의 자리의 수를 제외하고 0, 2, 4, 6, 8의 다섯 개의 짝수로 중복을 허락하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_3\cdots$ ㉠

여기서 ㉠의 세 자리 자연수의 개수는 천의 자리가 0인 것을 포함하므로 ㉠의 세 자리의 자연수의 개수에서 천의 자리가 0인 것의 개수를 제외하여야 한다.

${}_5\Pi_3-{}_5\Pi_2=5^3-5^2=100\ \cdots$ ㉡

㉡의 경우에 대하여 각각 일의 자리의 수는 10가지의 경우의 수가 있으므로 구하는 경우의 수는 $100\times10=1000$

50. 정답 ⑤

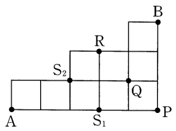
[해설] 최우수상을 A, 우수상을 B, 상을 받지 못한 것을 C로 나타내면 8개월 팀에 시상을 하는 방법의 수는 참가한 8개의 팀에 A, B, B, B, C, C, C, C를 대응시키는 방법의 수와 같다. 즉, 8개의 대상 중에서 같은 것이 각각 1개, 3개, 4개 있을 때, 이들을 일렬로 나열하는 순열의 수이므로

$\frac{8!}{1!3!4!}=280$(가지)

51. 정답 ①

[해설] 다음 그림과 같이

$A\to P\to B$, $A\to Q\to B$,; $A\to R\to B$로 나누어 A에서 B로 가는 최단 코스의 방법의 수를 생각해 보자.



(i) $A\to P\to B$의 방법의 수 : 1가지

(ii) $A\to Q\to B$의 방법의 수 :

$\frac{5!}{4!}\times\frac{3!}{2!}=5\times3=15$(가지)

(iii) $A\to R\to B$의 방법의 수 :

먼저 $A\to R$의 방법을 $A\to S_1\to R$, $A\to S_2\to R$로 나누어 생각하면 $1+\frac{3!}{2!}\times2=7$(가지)이고 $R\to B$의 방법의 수는 2가지이므로 $A\to R\to B$의 방법의 수는 $7\times2=14$(가지)

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는 $1+15+14=30$(가지)

52. 정답 ①

[해설] 남자 A, B, C, D 중에서 나이가 가장 적은 사람을 A라 하고 여학생을 E, F라 하자.

남학생 4명을 모두 X로 생각하고, X, X, X, X, E, F를 나열하는 방법의 수는 $\frac{6!}{4!}=30$(가지)이다. 이때, 가장 왼쪽에 위치한 X를 A로 바꾸고 나머지 3명의 남자가 위치를 바꾸는 경우를 생각하면 $30\times3!=180$(가지)

53. 정답 ④

[해설] A팀이 이기는 경우를 ○, B팀이 이기는 경우를 ×라 할 때, 4번째까지의 시합의 결과는 ○○×○, ○○○×, ○○○○ 중 어느 하나이다.

(i) ○○×○인 경우

××○○○ $\Rightarrow\ \frac{5!}{3!2!}-1=9$(가지)

(ii) ○○○×인 경우

××○○○ $\Rightarrow\ \frac{5!}{3!2!}-1=9$(가지)

(iii) ○○○○인 경우

×××○○ $\Rightarrow\ \frac{5!}{3!2!}=10$(가지)

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$9+9+10=28$(가지)

54. 정답 ②

[해설] $AB=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c\\2a+b\\b+3c\end{pmatrix}$

이므로 모든 성분의 합은

$(a-c)+(2a+b)+(b+3c)=3a+2b+2c=3a+2(b+c)$

이고, 그 합이 짝수이려면 a의 값이 짝수이기만 하면 된다.

따라서 구하는 행렬 B의 개수는 $3\times{}_6\Pi_2=108$(개)

55. 정답 ⑤

[해설] 이웃하는 짝수를 하나로 묶어서 생각한다.

(i) 짝수묶음을 만드는 경우의 수는 ${}_3P_3=6$(가지)

(ii) 홀수 3개와 짝수 묶음 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_4=24$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$(가지)

56. 정답 ⑤

[해설] 다섯 번의 프로그램에 참여하여 시간 합계가 8시간이 되도록 하는 방법은 다음과 같다.

(i) $8=1+1+1+1+4$의 경우

작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는 A, A, A, A, D를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{4!}=5$(가지)

(ii) $8=1+1+1+2+3$의 경우

작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는 A, A, A, B, C 를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!}=20$(가지)

(iii) $8=1+1+2+2+2$의 경우

작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는

A, A, B, B, B 를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!3!}=10$(가지)

따라서, 구하는 가짓수는 $5+20+10=35$(가지)

57. 정답 ⑤

[해설] 어른 4명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $4!=24$(가지)

어른 4명이 한 줄로 서 있을 때, 그 사이사이와 앞, 뒤 5군데 중 3군데에 어린이를 세우는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times 60=1440$(가지)

58. 정답 ③

[해설] 6초간 울리는 것을 x회, 4초간 울리는 것을 y회 사용하였다고 하면 $6x+4y+3(x+y-1)=67$

즉, $y=10-\dfrac{9}{7}x$

이 등식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(x,\ y)=(0,\ 10)$, $(7,\ 1)$

따라서 보낼 수 있는 신호의 총 가짓수는

$\dfrac{10!}{0!10!}+\dfrac{8!}{7!1!}=9$(가지)

59. 정답 ④

[해설]

1기에 5명이 봉사활동에 참여하는 경우의 수는

${}_2\Pi_5=2^5$(가지)

이 각각에 대하여 2기에 5명이 봉사활동에 참여하는 경우의 수는

${}_7P_5$(가지)

이 각각에 대하여 3기에 5명이 봉사활동에 참여하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!2!}$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$2^5\times {}_7P_5\times \dfrac{5!}{2!2!}=4\times 7!\times 5!$(가지)

60. 정답 ⑤

[해설] 1에서 5까지의 수를 A로 생각하면

6, 7, 8, 9, A, A, A, A, A를 배열하는 방법의 수는

$\dfrac{9!}{5!}=3024$(가지)

1에서 6까지의 수를 A로 생각하면

7, 8, 9, A, A, A, A, A, A를 배열하는 방법의 수는

$\dfrac{9!}{6!}=504$(가지)

따라서 구라는 수의 개수는

$3024-504=2520$(개)

61. 정답 ⑤

[해설] 6 이하의 홀수는 1, 3, 5이고, 짝수는 2, 4, 6이므로

(i) 점 (6, 2)에 도달하는 방법은

(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) : $\dfrac{7!}{6!}=7$(가지)

(1, 1, 1, 3, 2) : $\dfrac{5!}{3!}=20$(가지)

(3, 3, 2): $\dfrac{3!}{2!}=3$(가지)

(1, 5, 1): $3!=6$(가지)

$\therefore N(6,\ 2)=7+20+3+6=36$

(ii) 점 (2, 6)에 도달하는 방법은

(1, 1, 2, 2, 2): $\dfrac{5!}{2!3!}=10$(가지)

(1, 1, 2, 4): $\dfrac{4!}{2!}=12$(가지)

(1, 1, 6): $\dfrac{3!}{2!}=3$(가지)

$\therefore N(2,\ 6)=10+12+3=25$

(i), (ii)에서 $N(6,\ 2)-N(2,\ 6)=11$

62. 정답 ②

[해설] 서로 다른 세 종류의 과일을 각각 A, B, C라 하면

(i) 두 종류의 과일을 선택하는 경우의 수는 AABB, AACC, BBCC 의 3(가지)이고, 이를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수가

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$(가지) 이므로 구하는 방법의 수는

$3\times 6=18$(가지) 이다.

(ii) 세 종류의 과일을 선택하는 경우의 수는 AABC, ABBC, ABCC 의 3(가지)이고, 이를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수가

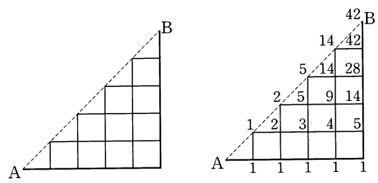
$\dfrac{4!}{2!}=12$(가지) 이므로 구하는 방법의 수는

$3\times 12=36$(가지) 이다.

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $18+36=54$(가지) 이다.

63. 정답 ③

[해설] 아래 그림과 같이 A지점, B지점이 연결되어 있다고 하고, 가로 방향의 경로를 따라 움직이는 것을 x, 세로 방향의 경로를 따라 움직이는 것을 y라 하자.



$x<y$일 때, 즉 가로 방향보다 세로 방향의 경로를 따라 더 많이 움직이면 선분AB의 윗부분을 지나므로 $x\geq y$를 만족하려면 점선으로 표시한 선분 AB의 윗부분을 지나갈 수 없다. 따라서 문제의 조건을 만족하도록 x, y카드를 배열하는 방법의 수는 그림의 도로망을 따라 A지점에서 B지점으로 가는 최단경로의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는 42가지이다.

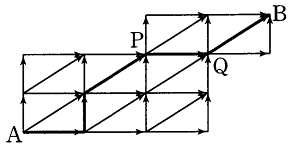
64. 정답 ②

[해설]

$\rightarrow$, $\uparrow$, $\nearrow$의 방향으로 가는 것을 각각 a, b, c라 하면 구하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) A에서 P를 거쳐 B로 가는 경우의 수

A에서 P로 가는 경우의 수는 a, a, b, b또는 a, b, c또는 c, c를 나열하는 경우의 수와 같으므로



$\frac{4!}{2!2!}+3!+1=13$(가지)

이 각각에 대하여 P에서 B로 가는 경우의 수는 a, a, b또는 a, c를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}+2=5$(가지)

그러므로 경우의 수는 $13\times5=65$(가지)

(ii) A에서 Q를 거쳐 B로 가는 경우의 수

A에서 Q로 가는 경우의 수는 a, a, a, b, b또는 a, a, b, c 또는 a, c, c를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{3!}{2!}=25$(가지)

이 각각에 대하여 Q에서 B로 가는 경우의 수는 a, b또는 c를 나열하 는 경우의 수와 같으므로

$2!+1=3$(가지)

그러므로 경우의 수는 $25\times3=75$(가지)

(iii) A에서 P, P에서 Q, Q에서 B로 가는 경우의 수

A에서 P로 가는 경우의 수는 (i)에서 13(가지)

이 각각에 대하여 P에서 Q로 가는 경우의 수는 1(가지)

이 각각에 대하여 Q에서 B로 가는 경우의 수는 (ii)에서 3(가지)

그러므로 경우의 수는 $13\times1\times3=39$(가지)

따라서 (i), (ii)의 경우의 수에서 (iii)의 경우의 수를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$65+75-39=101$(가지)

65. 정답 36

[해설] 제1행에 들어가는 숫자 $1,2,3,3$을 배열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$(가지)

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 3\\ \square & 2 & \square & \square\end{pmatrix}$

이때, 제 2행에서 두 번째 열의 숫자는 반드시 2가 들어가고 나머지는

$1,3,3$이 들어가므로 제 2행을 결정하는 방법은

$\frac{3!}{2!}=3$(가지)

따라서, 구하는 행렬의 개수는

$12\times3=36$(개)

66. 정답 288

[해설] 두 쌍의 부부을 커플 좌석에 배정하는 방법의 수는

$2\times2!\times2!=8$(가지)

남은 여자 3명과 남자 2명을 개인별 좌석에 여자끼리 이웃하도록 배정하는 방법의 수는 $3!\times3!=36$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는 $8\times36=288$(가지)

67. 정답 287

[해설] 평행이동 f,g,h에 의하여 x좌표는 각각 $+1,+1,+2$만큼 변하고, y좌표는 각각 $+1,+2,+1$만큼 변한다. 원점이 점$(9,9)$로 옮겨지므로 평행이동 f,g,h의 횟수를 각각 $\mathrm{F},\mathrm{G},\mathrm{H}$라 하면

(x좌표) : $\mathrm{F}+\mathrm{G}+2\mathrm{H}=9$ …… ㉠

(y좌표) : $\mathrm{F}+2\mathrm{G}+\mathrm{H}=9$ …… ㉡

㉠-㉡에서 $\mathrm{G}=\mathrm{H}$이고, $\mathrm{F}+3\mathrm{G}=9$가 성립한다.

(i) $\mathrm{G}=\mathrm{H}=0$일 때, $\mathrm{F}=9$

f,g,h를 각각 9회, 0회, 0회 배열하는 방법의 수는 1(가지)

(ii) $\mathrm{G}=\mathrm{H}=1$일 때, $\mathrm{F}=6$

f,g,h를 각각 6회, 1회, 1회 배열하는 방법의 수는

$\frac{8!}{6!}=56$(가지)

(iii) $\mathrm{G}=\mathrm{H}=2$일 때, $\mathrm{F}=3$

f,g,h를 각각 0회, 3회, 3회 배열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{3!2!2!}=210$(가지)

(iv) $\mathrm{G}=\mathrm{H}=3$ 일 때, $\mathrm{F}=0$

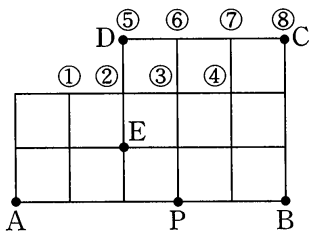
f,g,h를 각각 0회, 3회, 3회 배열하는 방법의 수는

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는

$1+56+210+20=287$(가지)

68. 정답 13

[해설]



(i) $A\rightarrow$①$\rightarrow$ ②$\rightarrow$ B로 가는 방법

$A\rightarrow$ ①$\rightarrow$ ②로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{3!}{1!2!}\times1=3$(가지)이다.

또, $\overline{DC}$ 위의 거리 2만큼의 길을 지나 B지점까지 가는 최단경로는

②$\rightarrow$⑤ $\rightarrow$ ⑦$\rightarrow$ ④$\rightarrow B$ 또는 ② $\rightarrow$ ③ $\rightarrow$ ⑥$\rightarrow$⑧$\rightarrow$ B

이므로 $\frac{3!}{1!2!}+1=4$(가지)

$\therefore 3\times4=12$(가지)

(ii) $A\rightarrow$ $P\rightarrow$③$\rightarrow$ ⑥ $\rightarrow$ ⑧ $\rightarrow$ B로 가는 최단 경로의 수는 1가지

따라서 (i), (ii)에서 구하는 최단 경로의 수는 $12+1=13$이다.

69. 정답 24

[해설]

(ⅰ) 두 종류의 문자를 사용하는 경우는 a, b,와 b, c와 c, a 의 3가지이다.

이때, 두 문자 a, b를 선택하여 만들 수 있는 네 자리의 문자열은 $abab, baba$의 2가지이므로 두 종류의 문자를 사용하여 만들 수 있는

네 자리의 문자열의 개수는

$3 \times 2 = 6$(가지)

(ⅱ) 세 종류의 문자를 선택하는 경우는 a, a, b, c와 a, b, b, c 그리고

a, b, c, c, 의 3가지이다.

이때, 각각의 경우에 같은 문자를 이웃하지 않게 하는 네 자리의 문자열은 네 문자를 배열하는 방법의 수에서 같은 문자가 이웃한 경우의 수를 빼면 되므로

$\frac{4!}{2!} - 3! = 6$(가지)

따라서, 세 종류의 문자를 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 문자열의 개수는 $3 \times 6 = 18$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 문자열의 개수는

$6 + 18 = 24$(가지)

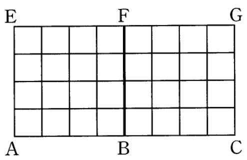
70. 정답 920

[해설]

(ⅰ) 변BF 위의 점을 거쳐 G로 가는 경우

변 BF위의 점을 거쳐 가는 최단 경로의 수는 아래 그림과 같이 정육면체의 옆면 BCGF를 펼쳤을 때, 꼭짓점A에서 출발하여

꼭짓점G로 가는 최단 경로의 수와 같다.

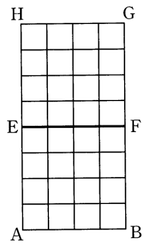


$\therefore \frac{12!}{8!4!} = 495$(가지)

(ⅱ) 변EF 위의 점을 거쳐 G로 가는 경우

변EF 위의 점을 거쳐 가는 최단 경로의 수는 오른쪽 그림과 같이 정육면체의 윗면 EFGH를 펼쳤을 때,

꼭짓점A에서 출발하여 꼭짓점G로 가는 최단경로의 수와 같다.



$\therefore \frac{12!}{8!4!} = 495$(가지)

이때, (ⅰ), (ⅱ)에서 점F를 거쳐 점G로 가는 최단 경로의 수 $\frac{8!}{4!4!} = 70$(가지)가 중복해서 포함되어 있으므로 한 번 빼주어야 한다.

따라서, 구하는 최단 경로의 수는

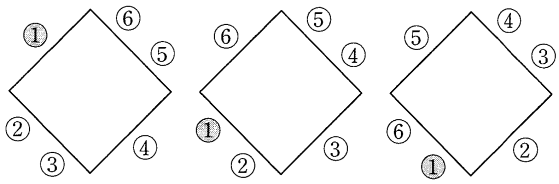
$495 + 495 - 70 = 920$(가지)

71. 정답 ③

[해설] 6명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(6-1)! = 120$

이때, 정사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 나타난다.



따라서 구하는 방법의 수는 $120 \times 3 = 360$

72. ③

작은 정삼각형을 칠하는 방법은 7가지가 있다.

나머지 6개의 직각삼각형에 색을 칠하는 방법의 수를 원순열의 수로 생각하면 $(6-1)! = 5!$이지만 오른쪽 그림에서 어느 한 색이 a에 있을 때와 b에 있을 때 서로 다른 경우로 세어야 하므로 구하는 경우의 수는 $7 \times 5! \times 2 = 1680$(가지)이다.

73. 정답 ④

[해설] 부부 2명을 먼저 원형에서 서로 마주 보게 나열하는 방법의 수는 $(2-1)! = 1$

이에 대하여 서로 이웃하는 진행자를 1명으로 생각하고 나머지 4명과 함께 모두 5명을 일렬로 나열한 각각에 대하여 진행자 2명을 나열하는 방법의 수는 $1 \times 5! \times 2! = 240$

74. 정답 ④

[해설]

부모가 이웃하여 앉는 방법은 부모를 하나로 보고 원형으로 배열한 후 부모가 자리를 바꾸는 경우를 생각하면 되므로

$(4-1)! \times 2 = 12$(가지)

이 각각에 대하여 음식의 종류가 3가지이므로 음식의 종류를 a, b, c라 하면 음식을 시킨 인원수는 다음과 같다.

(a : 1명, b : 2명, c : 2명), (a : 2명, b : 1명, c : 2명)

(a : 2명, b : 2명, c : 1명), (a : 3명, b : 1명, c : 1명)

(a : 1명, b : 3명, c : 1명), (a : 1명, b : 1명, c : 3명)

이때, 주문하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!} \times + \frac{5!}{3!} \times 3 = 150$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$12 \times 150 = 1800$(가지)

75. 정답 ⑤

[해설] 초등학생 1명, 중학생 2명, 빈 의자가 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(4-1)! = 6$(가지)

그 각각에 대하여 고등학생 3명이 빈 공간 4군데에서 3군데를 택하여 의자를 놓고 앉는 방법의 수는 ${}_4P_3 = 24$(가지)이므로 구하는 방법의 수는 $6 \times 24 = 144$(가지)

76. 정답 ③

[해설]

이웃하는 세 수가 10보다 큰 수는 다음 두 가지가 있다.

(i) 3, 4, 5가 이웃하는 경우

3, 4, 5를 하나로 보고 1, 2와 함께 원형으로 나열하는 경우의 수는 $2!$(가지)

이 각각에 대하여 3, 4, 5를 나열하는 경우의 수는 $3!$(가지)

그러므로 구하는 경우의 수는

$2! \times 3! = 12$(가지)

(ii) 2, 4, 5가 이웃하는 경우

2, 4, 5를 하나로 보고 1, 3과 함께 원형으로 나열하는 경우의 수는 $2!$(가지)

이 각각에 대하여 2, 4, 5를 나열하는 경우의 수는 $3!$(가지)

그러므로 구하는 경우의 수는

$2! \times 3! = 12$(가지)

한편, 2와 3사이에 4와 5가 나열되는 경우는 (i), (ii)에 모두 포함된다. 이 때, 2, 4, 5, 3을 하나로 보고 1과 원형으로 배열하는 경우의 수는 $1!$(가지)이고, 이 각각에 대하여 2와 3이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$(가지), 이 각각에 대하여 4와 5가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$(가지)이므로

$1! \times 2! \times 2! = 4$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$12 + 12 - 4 = 20$(가지)

77. 정답 ①

[해설] 6가지 색을 A, B, C, D, E, F라 하면 6개의 곳에 6개의 색을 칠하는 방법은 ${}_6P_6 = 6! = 720$

다음 그림에서와 같이 회전시킬 수 있으므로 2로 나눈다.

A	B	C
D	E	F

F	E	D
C	B	A

따라서 구하는 방법의 수는 $\dfrac{720}{2} = 360$(가지)

78. 정답 96

[해설] 부부를 하나로 생각하면 원탁에 앉는 방법의 수는

$(4-1)! = 3!$(가지) 이고, 부부끼리 자리를 바꾸어 앉는 방법의 수는

2^4(가지) 이므로 부부가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$3! \times 2^4 = 96$(가지)

79. 정답 240

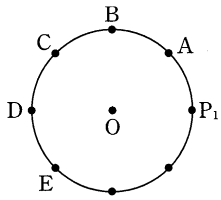
[해설] 여섯 개의 영역에 색을 칠하는 방법의 수는 $6!$이다.

그런데 각각의 경우마다 회전해서 같은 것이 3개씩 있으므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{3} = 240$(가지)

80. 정답 ④

[해설]



P_1은 8개의 점 중 하나에 적으므로 오른쪽 그림과 같이 P_1을 쓰면

$\sin(\angle P_1OP_2) > 0$이므로 P_2는 A, B, C중 하나에 쓰인다.

(i) A또는 B에 P_2를 쓰는 경우

P_2를 A또는 B에 쓰는 경우의 수는 2(가지)

이 각각에 대하여 P_3은 $\cos(\angle P_1OP_3) < 0$을 만족시키므로 C, D, E중 하나에 써야 하므로 3(가지)

이 각각에 대하여 나머지 5개의 점에 쓰는 경우의 수는 $5!$(가지)

그러므로 경우의 수는

$2 \times 3 \times 5!$(가지)

(ii) C에 P_2를 쓰는 경우

P_2를 C에 쓰는 경우의 수는 1(가지)

이 각각에 대하여 P_3은 $\cos(\angle P_1OP_3) < 0$을 만족시키므로 D, E 중 하나에 써야 하므로 2(가지)

이 각각에 대하여 나머지 5개의 점을 쓰는 경우의 수는 $5!$(가지)

그러므로 경우의 수는

$1 \times 2 \times 5!$(가지)

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$2 \times 3 \times 5! + 1 \times 2 \times 5! = 960$(가지)

81. 정답 ④

[해설] 세 곡 B, C, F사이에는 순서가 정해지므로

A, D, E, B, B, B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서, 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!} = 120$(가지)

82. ④

여자 양 옆에는 남자가 앉아야 하므로 양쪽 맨 끝에는 남자가 앉아야 한다.

남							남
↓							↓
1	2	3	4	$\cdots$	n	$n+$	$n+$

(i) 특별한 남녀 한 쌍을 $\boxed{1}\boxed{2}$에 앉히는 경우 : $\boxed{1}$에 남자가 앉아야 하므로 $\boxed{3}$에 남자가 앉아야 하고, 다른 한 여자는 $\boxed{4} \sim \boxed{n+1}$중 어느 한 자리에 앉아야 한다. 이 때, 나머지 자리에 남자가 위치하는 방법의 수는 $(n-1)!$이다.

$\therefore (n-2) \times (n-1)!$

(ii) 특별한 남녀를 각각 $\boxed{2}$와 $\boxed{3}$에 앉히는 경우 : $\boxed{4}$에 남자가 와야 하므로 다른 여자는 $\boxed{5} \sim \boxed{n+1}$중 어느 한 자리에 앉아야 한다.

이 때, 나머지 자리에 남자가 위치하는 방법의 수는 $(n-1)!$이다.

$\therefore (n-3) \times (n-1)!$

(iii) 특별한 남녀를 각각 $\boxed{3}$과 $\boxed{2}$에 앉히는 경우 : 다른 한 여자는 $\boxed{4} \sim \boxed{n+1}$중 어느 한 자리에 앉아야 하고, 나머지 자리에 남자가

위치하는 방법의 수는 $(n-1)!$이다.

$\therefore\ (n-2)\times(n-1)!$

(i), (ii), (iii)에서

$\{(n-2)+(n-3)+(n-2)\}\times(n-1)!=(3n-7)\times(n-1)!$

83. 정답 ③

[해설]

ㄱ. 홀수가 되려면 일의 자리 수가 $\boxed{1}$ 또는 $\boxed{3}$ 또는 $\boxed{5}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 중에서 홀수인 항은

$3\times 4!=72$ (참)

ㄴ. $\boxed{1}$○○○○인 경우의 수는 $4!=24$이므로

$a_{25}-a_{24}=21345-15432=5913$ (참)

ㄷ. $\boxed{1}$○○○○인 경우의 수는 $4!=24$

$\boxed{2}$○○○○인 경우의 수는 $4!=24$

$\boxed{3}$○○○○인 경우의 수는 $4!=24$에서

$48<63<72$이므로 a_{63}의 10^4자리의 수는 3임을 알 수 있다.

$\boxed{3}\boxed{1}$○○○인 경우의 수는 $3!=6$

$\boxed{3}\boxed{2}$○○○인 경우의 수는 $3!=6$

$\boxed{3}\boxed{4}$○○○인 경우의 수는 $3!=6$에서

$(48+12)<63<(48+18)$이므로 a_{63}의 10^3자리의 수는 4임을 알 수 있다.

$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{1}$○○인 경우의 수는 $2!=2$이므로 a_{63}은

$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{2}$○○인 수 중에서 가장 작은 수인

$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{5}$이다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

84. 정답 ①

[해설]

a, b를 제외한 네 명 c, d, e, f를 c가 d와 e 사이에 있도록 나열하는 방법은 c, d, e를 우선 c가 가운데 있도록 나열한 후 오른쪽 그림의 ∨부분에 f를 넣고 d, e를 나열하면 되므로

$\boxed{\vee d \vee c \vee e \vee}$

$4\times 2!=8$(가지)

이 각각에 대하여 a와 b가 이웃해야 하므로 오른쪽 그림에서 ∨부분에 a, b를 하나로 생각하여 넣는 경우의 수는

$\boxed{\vee d \vee c \vee e \vee f \vee}$

5(가지)

이 각각에 대하여 a, b를 나열하는 경우의 수는

$2!=2$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$8\times 5\times 2=80$(가지)

85. 정답 ②

[해설]

제 1행의 수를 나열하는 경우의 수는 $4!$(가지)

이 각각에 대하여 제2행에는 같은 열의 두 성분이 서로소이어야 한다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

제 1행에 3이 있는 열에는 6, 9를 제외한 5, 7, 8이 와야 하므로 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

(i) 제 1행에 3이 있는 열에 짝수인 8이 오는 경우

제 1행에 3이 있는 열에는 8이 오므로 제 1행에 2와 4가 있는 열에는 5, 7, 9 중 두 수가 와야 하고, 그 각각에 대하여 제 1행에 1이 있는 열은 나머지 두 수 중 1개가 오면 되므로 경우의 수는

$_3P_2\times 2=12$(가지)

(ii) 제 1행에 3이 있는 열에 홀수인 5또는 7이 오는 경우

제 1행에 3이 있는 열에는 5, 7중의 하나가 와야 하고, 이 각각에 대하여 제 1행에 2와 4가 있는 열에는 5, 7중 앞에 배열한 수를 제외한 수와 9가 와야 하고, 제 1행에 1이 있는 열은 나머지 두 수 중 한 수가 오면 되므로 경우의 수는

$2\times 2!\times 2=8$(가지)

따라서 만들 수 있는 행렬의 개수는

$4!\times(12+8)=480$(개)

86. 정답 64

[해설] 할아버지, 할머니가 먼저 열을 선택하여 앉으면

(i) 할아버지, 할머니가 앉는 열을 선택하는 방법은 2(가지)

한 열에서 이웃하는 두 자리를 선택하여 앉는 방법의 수는

$2\times 2!=4$(가지)

이므로 할머니, 할아버지가 자리를 선택해서 앉는 방법의 수는

$2\times 4=8$(가지)

(ii) 아버지, 어머니는 할아버지, 할머니와 다른 열에 앉아야 하므로

아버지, 어머니가 이웃하는 두 자리를 선택하여 앉는 방법의 수는

$2\times 2!=4$(가지)

(iii) 아들, 딸이 앉는 방법의 수는 $2!=2$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는 $8\times 4\times 2=64$(가지)

87. 정답 48

[해설]

(i) 아버지 대표를 뽑는 경우의 수 : 4가지

(ii) 아버지 대표를 뽑은 후 어머니 대표를 뽑는 경우의 수 : 3가지

(iii) 아버지 대표, 어머니 대표를 뽑은 후 자녀 대표를 뽑는 경우의 수 : 4가지

따라서, 구하는 경우의 수는

$4\times 3\times 4=48$(가지)

88. ④

(i) $f(2)$, $f(4)$에 대응하는 원소를 선택하는 방법의 수는 $\mathrm{A}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 2개의 원소를 선택하여 나여하는 방법의 수와 같으므로

$_5\mathrm{P}_2=5\times 4=20$

(ii) $f(1)\geq 1$에서 $f(1)$은 1, 2, 3, 4, 5의 5가지 같은 방법으로

$f(3)$은 3, 4, 5의 3가지

$f(5)$는 5의 1가지

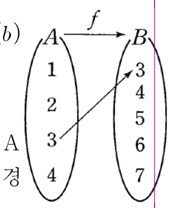
그러므로 $f(2c-1)\geq 2c-1$을 만족하는 함수 f의 개수는

$5\times 3\times 1=15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 $f(x)$의 개수는 $20\times15=300$(개)

89. 정답 ①

[해설]



집합 A의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)\neq f(b)$인 함수는 모두 ${}_5\mathrm{P}_4=120$(개) 있다.

이 함수들 중 $f(x)=x$를 만족하는 x는 $x=3$, 4이다.

(ⅰ) $f(3)=3$인 조건 (가)를 만족하는 함수의 개수는 A의 원소 1, 2, 4에 B의 원소 4, 5, 6, 7이 대응하는 경우이므로 ${}_4\mathrm{P}_3$개 존재한다.

(ⅱ) 마찬가지로 $f(4)=4$인 함수의 개수는 ${}_4\mathrm{P}_3$개다.

(ⅲ) $f(3)=3$이고 $f(4)=4$인 함수의 개수는 ${}_3\mathrm{P}_2$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(3)=3$ 또는 $f(4)=4$인 함수의 개수는

$${}_4\mathrm{P}_3+{}_4\mathrm{P}_3-{}_3\mathrm{P}_2=42$$

따라서 구하는 함수의 개수는 $120-42=78$이다.

90. 정답 $3^n-3\times2^n+3$

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$에서 집합 $Y=\{a,\ b,\ c\}$로의 함수 $f:X\to Y$의 개수는 a, b, c에서 중복을 허락하여 n개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_3\Pi_n=3^n$ (개)

이 중에서 상수함수와 치역의 원소가 2개인 함수를 제외하면 된다.

(ⅰ) 상수함수는 3개

(ⅱ) 치역의 원소가 2개인 함수

치역이 되는 원소 2개를 택하는 방법이 3가지이고, 각각의 경우에 대하여 치역의 원소가 2개가 되는 함수는 2^n-2(개)이므로 $3\times(2^n-2)$(개)

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 함수의 개수는

$3^n-3-3\times(2^n-2)=3^n-3\times2^n+3$

91. 정답 ③

[해설]

(i) 치역의 원소가 1개인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$은 모두 2, 4중 하나이어야 하므로 2(가지)

(ii) 치역의 원소가 2개인 경우

치역의 원소 2개가 모두 홀수인 경우 $3\times({}_2\Pi_3-2)=18$(가지)

치역의 원소 2개가 모두 짝수인 경우 ${}_2\Pi_3-2=6$(가지)

$\therefore 18+6=24$(가지)

(iii) 치역의 원소가 3개인 경우

치역의 원소가 2개는 홀수, 1개는 짝수인 경우이므로 다음과 같다. 공역의 1, 3, 5중 2개를 택하는 경우의 수는 3가지이고 이 각각에 대하여 택한 3개의 수를 나열하는 경우의 수는 $3!$(가지)이므로

$3\times2\times3!=36$(가지)

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$2+24+36=62$(개)

92. 정답 ②

[해설]

$f(1)\times f(2)\times f(3)$의 값이 제곱수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 상수함수인 경우 :

$f(1)=f(2)=f(3)=1$ 또는

$f(1)=f(2)=f(3)=4$ ⇨ 2개

(ⅱ) $\{f(1),\ f(2),\ f(3)\}=\{1,\ a,\ a\}\,(a\neq1)$인 경우 :

$3\times4=12$(가지)

(ⅲ) $\{f(1),\ f(2),\ f(3)\}=\{4,\ b,\ b\}\,(b\neq4)$인 경우 :

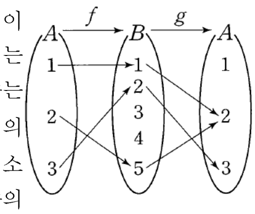
$3\times4=12$(가지)

따라서 구하는 함수 $f(x)$의 개수는

$2+12+12=26$(개)

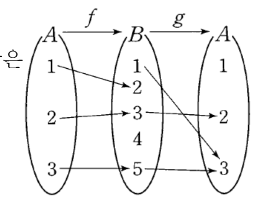
93. 정답 ①

[해설]



(ⅰ) $f(1)=1$일 때, $g(1)=2$ 또는 $g(1)=3$이다. 조건 (나)를 만족하려면 함수 f는 $f(2)\neq f(3)$이어야 하므로 함수 f의 개수는 ${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$이다. 또, 각각에 대하여 g의 개수는 f의 치역 $f(\mathrm{A})$의 원소가 아닌 두 원소를 집합 $\mathrm{A}=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대응시키는 함수의 개수와 같으므로 3×3이다.

따라서 두 조건을 만족하는 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는 $2\times12\times3\times3$(개)이다.



(ⅱ) $f(1)=2$일 때, $g(1)=3$이고 (ⅰ)과 같은 방법으로 생각하면

$1\times12\times3\times3$(개)이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 두 함수 f와 g의 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는

$(2+1)\times12\times3\times3=324$

94. 정답 ③

[해설] $n(A)$를 집합A의 원소의 개수라 하면

$$\begin{aligned} n(A^c\cap B^c)&=n(U)-n(A\cup B)\\ &=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)\end{aligned}$$

$f(2)=4$를 만족시키는 일대일 대응의 개수는 $4!=24$(개) 이고,

$f(4)=2$를 만족시키는 일대일 대응의 개수는 $4!=24$(개) 이며,

$f(2)=4$, $f(4)=2$인 일대일 대응의 개수는 $3!=6$(개) 이다.

일대일 대응인 함수 f의 개수는 $5!=120$(개) 이므로 구하는 함수 f의 개수는

$120-24-24+6=78$(개)

95. 정답 ③

[해설]

(가)에 의하여 함숫값은 다음과 같다

$f(1)=1$
$f(2)$는 1, 2 중 하나
$f(3)$은 1, 3 중 하나
$f(4)$는 1, 2, 4중 하나
$f(5)$는 1, 5 중 하나

(나)에 의하여 치역의 모든 원소의 곱이 4의 배수이어야 하므로 다음 두 가지의 경우가 있다.

(i) $f(4)=4$인 경우

$f(2)$는 2가지, 그 각각에 대하여 $f(3)$은 2가지, 그 각각에 대하여 $f(5)$는

2가지 이므로 구하는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$(가지)

(ii) $f(4)=2$인 경우

$f(2)=2$이어야 하므로 $f(3)$은 2가지, 그 각각에 대하여 $f(5)$는 2가지 이므로 구하는 경우의 수는

$2\times2=4$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$8+4=12$(가지)

96. 정답 ④

[해설]

$f(1)+f(2)$가 짝수이므로 $f(1)$, $f(2)$는 다음 두 가지 경우로 나눌수 있다.

(i) $f(1)$, $f(2)$가 모두 짝수인 경우

(가)의 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_3P_2\times{}_5P_3=360$(개)

(ii) $f(1)$, $f(2)$가 모두 홀수인 경우

(가)의 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_4P_2\times{}_5P_3=720$(개)

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$360+720=1080$(개)

97. 정답 ⑤

[해설]

$\sum_{k=1}^{5}f(k)=7$을 만족시키므로 다음 두 가지가 있다.

(i) 함숫값이 1, 1, 1, 2, 2인 경우

함수 f의 개수는 $\dfrac{5!}{3!\,2!}=10$(개)

(ii) 함숫값이 1, 1, 1, 1, 3인 경우

함수 f의 개순느 $\dfrac{5!}{4!}=5$(개)

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$10+5=15$(개)

98. 정답 28

[해설] $f(3)\geq3$이고,

(i) $f(2)=1$이면 $f(1)=2$이므로 함수f가 일대일 대응이 되는 경우의 수는 $3\times2!=6$(가지)

(ii) $f(2)=2$이면 $f(1)=1$ 또는 $f(1)=3$이므로 함수f가 일대일 대응이 되는 경우의 수는

$3\times2!+2\times2\neq10$(가지)

(iii) $f(2)=3$이면 $f(1)=2$ 또는 $f(1)=4$ 이므로 함수 f가 일대일 대응이 되는 경우의 수는

$2\times2!+1\times2!=6$(가지)

(iv) $f(2)=4$이면 $f(1)=3$ 또는 $f(1)=5$이므로 함수f가 일대일 대응이 되는 경우의 수는

$1\times2!+1\times2\neq4$(가지)

(v) $f(2)=5$이면 $f(1)=4$이므로 함수f가 일대일 대응이 되는 경우의 수는

$1\times2!=2$(가지)

따라서, 구하는 함수 f의 개수는

$6+10+6+4+2=28$(개)

99. 정답 ⑤

[해설]

동아리의 대표를 뽑을 수 있는 전체 경우의 수는

${}_8C_3=56$(가지)

이 중에서 여자가 한 명도 뽑히지 않는 경우의 수는

${}_5C_3\times{}_3C_0=10$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$56-10=46$(가지)

100. 정답 126

1부터 7까지의 정수 중에서 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_7C_2=\dfrac{7\cdot6}{2}=21$

이 각각에 대하여 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $21\times6=126$

101. 정답 ④

[해설]

세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 세 수가 모두 짝수인 경우와 짝수 한 개와 홀수 두 개로 이루어진 경우이다.

(i) 세 수가 모두 짝수인 경우

${}_{10}C_3=120$ (가지)

(II) 짝수 한 개와 홀수 두 개로 이루어진 경우

${}_{10}C_1\times{}_{10}C_2=10\times45=450$ (가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$120+450=570$ (가지)

102. 정답 ⑤

[해설]

A의 원소가 되는 5개를 제외한 나머지 원소는 14개이므로 14개의 ○를 아래 그림과 같이 배열하면 맨 앞과 맨 뒤를 포함하여 화살표(↑)로 표시한 15개의 빈칸이 생긴다. 이 화살표15개 중 5개를 선택하는 방법만큼 집합 A를 만들 수 있다.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

따라서 구하는 부분집합 A의 개수는

$${}_{15}C_5=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=3003(\text{개})$$

참고

위에서 첫 번째, 네 번째, 다섯 번째, 일곱 번째, 열 번째 화살표(↑)를 선택하면 다음과 같이 부분집합 $A=\{1,5,7,10,14\}$를 구성할 수 있다.

↑	○	○	○	↑	○	↑	○	○	↑	○	○	○	↑	○	○	○	○	○
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

같은 방법으로 두 번째, 네 번째, 여섯 번째, 여덟 번째, 열 번째 화살표(↑)를 선택하면 다음과 같이 부분집합 $A=\{2,4,6,8,10\}$을 구성 할 수 있다.

○	↑	○	↑	○	↑	○	↑	○	↑	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

즉 선택한 화살표(↑)는 사이에 ○을 끼고 있으므로 선택한 화살표(↑)와 ○에 대하여 차례로 1부터 19까지 배열하는 방법으로 부분집합 A를 구성할 수 있다.

103. 정답 ②

[해설]

(i) 같은 색의 책상 앞에 놓이는 의자 3 개를 결정하는 경우의 수는

$${}_6C_3=20\ (\text{가지})$$

(ii) 같은 색의 책상 앞에 놓이는 의자 3 개를 결정한 후, 다른 색의 책상 앞에 놓이는 의자 3개의 위치를 정하는 경우는 위의 표와 같으므로 2가지

책상의 색	A	B	C
의자의 색	B	C	A
	C	A	B

따라서 구하는 경우의 수는

$$20\times 2=40\ (\text{가지})$$

104. 정답 ④

[해설]

24명이 모두 악수를 하였다면 그 회수는 ${}_{24}C_2=276$(회)

그런데 12명의 여자끼리는 악수를 하지 않았으므로 그 횟수는 ${}_{12}C_2=66$(회)이고, 배우자와는 악수를 하지 않았으므로 그 횟수는 12(회)이다.

따라서 악수의 총 횟수는

$$276-66-12=198(\text{회})$$

105. 정답 ③

[해설]

오늘 할 업무를 택하는 방법의 수는 A, B는 반드시 포함되어 있고, 나머지 4가지 업무 중에서 2가지를 더 택해야 하므로

$${}_4C_2=6\ (\text{가지})$$

오늘 처리하려고 택한 두 업무를 C, D라 하면 네 업무 A, B, C, D 중에서 A, B는 순서가 정해져 있으므로 업무를 처리하는 순서를 정하는 경우의 수는 C, D, X, X를 배열하는 방법의 수 $\frac{4!}{2!}=12$ (가지)이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$6\times 12=72\ (\text{가지})$$

106. 정답 ③

[해설]

흰색 공과 검은색 공을 배열하는 방법은 다음과 같이 여섯 가지이다.

(ⅰ) 흰, 흰, 검, 검 (ⅱ) 흰, 검, 흰, 검
(ⅲ) 흰, 검, 검, 흰 (ⅳ) 검, 흰, 흰, 검
(ⅴ) 검, 흰, 검, 흰 (ⅵ) 검, 검, 흰, 흰

각각의 경우 붉은색 공을 끼워 넣는 방법은

(ⅰ), (ⅵ)에 붉은색 공을 넣는 방법의 수는 3(가지)

(ⅲ), (ⅳ)에 붉은색 공을 넣는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$(가지)

(ⅱ), (ⅴ)에 붉은색 공을 넣는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$$2\times(3+6+10)=38(\text{가지})$$

107. 정답 ③

[해설] 같은 알파벳의 대문자와 소문자 6쌍에서 2쌍을 택하고, 나머지 4쌍에서 2쌍을 택하고 대문자와 소문자 중 하나씩 택해야 하므로

$${}_6C_2\times({}_4C_2\times 2\times 2)=360$$

108. 정답 ②

[해설]

$n(\{x\,|\,f(x)=1\})=1$이므로 1을 함숫값으로 갖는 X의 원소는 한 개이고, 이를 정하는 방법의 수는 ${}_7C_1=7$(가지)이다.

$n(\{x\,|\,f(x)=2\})=2$이므로 2를 함숫값으로 갖는 X의 원소는 두 개이고, 이를 정하는 방법의 수는 ${}_6C_2=15$(가지)이다.

나머지 X의 원소 4개는 3을 함숫값으로 가지므로 구하는 함수의 개수는

$$7\times 15=105\ (\text{개})$$

109. 정답 ②

[해설] $n_1<n_2<n_3$을 만족하는 세 자리 자연수의 개수는 {1, 2, 3, ⋯, 9}에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 조합의 수와 같다.

$\therefore A={}_9C_3=84$

또, $n_3<n_2<n_1$을 만족하는 세 자리 자연수의 개수는 {0, 1, 2, 3, ⋯, 9}에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 조합의 수와 같다.

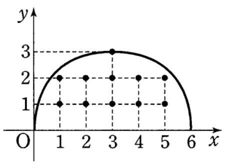
$\therefore B={}_{10}C_3=120$

$\therefore A+36=B$

110. 정답 ③

[해설] 부등식 $(x-3)^2+y^2\le 9$가 나타내는 영역에 속하고 x좌표, y좌표가 모두 자연수인 점은 오른쪽 그림과 같이 11개다.

이때, 서로 다른 두 점을 택하면 직선이 1개씩 만들어지는데 일직선에 세 개 이상의 점이 있는 경우에는 직선이 한 개만 만들어진다.



그러므로 두 직선 $y=1$, $y=2$와 세 직선 $y=x$, $x=3$, $y=-x+6$으로 만들어지는 직선은 5개다.
따라서 구하고자 하는 직선의 개수는
$_{11}C_2-({}_5C_2\times2+{}_3C_2\times3)+5=55-29+5=31$(개)

111. 정답 ⑤

[해설]
학생을 받지 못하는 학급을 정하는 방법의 수는
$_6C_1=6$(가지)
두 명의 학생을 받는 학급을 결정하는 방법의 수는
$_5C_1=5$(가지)
같은 학급에 배정될 학생을 결정하는 방법의 수는
$_6C_2=15$(가지)
나머지 4명의 학생을 4개의 학급에 배정하는 방법의 수는
$4!=24$(가지)
따라서 구하는 방법의 수는
$6\times5\times15\times4!=6!\times15$(가지)

112. 정정답 ③

[해설]
(i) A, B 를 모두 포함하여 $(n+1)$개를 택하는 경우는 나머지 $2n$개에서 $(n-1)$개를 택해야 한다.
이러한 경우의 수는 $\boxed{{}_{2n}C_{n-1}}$이다.
(ii) A, B 중 하나만 포함하여 $(n+1)$개를 택하는 경우는 나머지 $2n$ 개 에서 n 개를 택해야 한다.
이러한 경우의 수는 $\boxed{{}_{2n}C_n}$이다.
(iii) A, B 를 모두 포함하지 않고 $(n+1)$개를 택하는 경우는 나머지 $2n$ 개에서 $(n+1)$개를 택해야 한다.
이러한 경우의 수는 $\boxed{{}_{2n}C_{n+1}}$이다.
(i),(ii),(iii)에서 다음 등식이 성립한다.
$$_{2n+2}C_{n+1}={}_{2n}C_{n-1}+2\,{}_{2n}C_n+{}_{2n}C_{n+1}$$
$$={}_{2n}C_{n-1}+2\,{}_{2n}C_n+{}_{2n}C_{n-1}\ (\because {}_{2n}C_{n+1}={}_{2n}C_{n-1})$$
$$=\boxed{2\,{}_{2n}C_{n-1}+2\,{}_{2n}C_n}$$

113. 정답 ③

[해설]
집합 A를 $(n+1)$개의 원소를 가진 집합이라 하고, 집합 A의 한 원소 a에 대하여 $B=A-\{a\}$라 하자
집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 r인 것은 $({}_{n+1}C_r)$개다.
이 부분집합의 개수는 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) a를 포함하는 경우
a를 제외한 n개중에서 $(r-1)$개를 선택한 부분집합의 수와 같다.
(ii) a를 포함하지 않는 경우
a를 제외한 n개중에서 r개를 선택한 부분집합의 수와 같다.
(i), (ii)에서 다음이 성립한다.
$({}_{n+1}C_r)=({}_nC_{r-1})+{}_nC_r$

114. 정답 ②

[해설]
2 이상인 자연수 k 에 대하여 $k^2=\boxed{(가)}+2\cdot{}_kC_2$ 로 나타내어 지면
$\boxed{(가)}=k^2-2\cdot{}_kC_2=k^2-2\cdot\dfrac{k(k-1)}{2}=k=\boxed{{}_kC_1}$
$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
$={}_1C_1+({}_2C_1+2\cdot{}_2C_2)+({}_3C_1+2\cdot{}_3C_2)+\cdots$
$+({}_nC_1+2\cdot\boxed{{}_nC_2})$
$=({}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_nC_1)+2({}_2C_2+{}_3C_2+\cdots+\boxed{{}_nC_2})$
그런데 $_1C_1={}_2C_2$ 이고, $_kC_2+{}_kC_1={}_{k+1}C_2$ 이므로
$={}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_nC_1$
$={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_nC_1$
$={}_3C_2+{}_3C_1+\cdots+{}_nC_1$
$={}_4C_2+\cdots+{}_nC_1$
$=\cdots={}_{n+1}C_2$
또, $_2C_2={}_3C_3$ 이고, $_kC_3+{}_kC_2={}_{k+1}C_3$
$_2C_2+{}_3C_2+\cdots+{}_nC_2={}_3C_3+{}_3C_2+\cdots+{}_nC_2$
$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2$
$=\cdots={}_{n+1}C_3$
$\therefore 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2={}_{n+1}C_2+2\cdot\boxed{{}_{n+1}C_3}$

115. 정답 85

[해설]
집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 3 인 것의 개수는
$_{10}C_3=120$ (개)
세 수의 곱이 3 의 배수가 아닌 경우는 세 수가 모두 3 의 배수가 아닌
경우이다.
3 개의 원소를 갖는 A 의 부분집합 중에서 모든 원소의 곱이 3 의 배수
가 아닌것 의 개수는
$_7C_3=35$ (개)
따라서 구하는 부분집합의 개수는
$120-35=85$(개)

116. 정답 135

[해설] 자기 휴대폰을 받게 될 두 명의 학생을 택하는 경우의 수는
$_6C_2=15$(가지)
나머지 4명의 학생 A, B, C, D의 휴대폰을 각각 a, b, c, d라 할 때, A 학생이 b를 가진 경우는 다음과 같다.

A	B	C	D
b	a	d	c
b	c	d	a
b	d	a	c

위와 같은 방법으로 A 학생이 c를 가질 경우도 3가지, A 학생이 d를 가질 경우도 3가지이므로 구하는 경우의 수는

${}_6C_2\times(3+3+3)=15\times9=135$

117. 정답 ⑤

[해설]

세 수를 더하여 짝수인 경우는 세 수가 모두 짝수인 경우와 하나만 짝수이고 나머지는 홀수인 경우이다.

(i) 선택된 세 수가 모두 짝수인 경우

2, 4, 6, ⋯, 20의 10개의 수에서 3개를 선택하는 경우이므로

${}_{10}C_3=120$(가지)

(ii) 선택된 세 수 중 하나는 짝수이고 나머지는 홀수인 경우

짝수 중에서 1개, 홀수 중에서 2개를 선택하는 경우이므로

${}_{10}C_1\times{}_{10}C_2=450$(가지)

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$120\times450=570$(가지)

118. 정답 ④

[해설]

${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$, ${}_nP_2=n(n-1)$이므로

${}_nC_3-{}_nP_2=\dfrac{n(n-1)}{6}\times(n-2-6)=0$

$\therefore n=8\ (\because n\geq3)$

119. 정답 ⑤

[해설] $f(1)$, $f(2)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5 중에서 선택해야 하므로

${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

또, $f(4)$의 값은 7 또는 8 또는 9이어야 하므로 3가지

따라서 구하고자 하는 함수의 개수는 $10\times3=30$

120. 정답 ⑤

[해설] 1부터 20까지의 자연수를 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 수의 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면

$A_0=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

$A_1=\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19\}$

$A_2=\{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20\}$

이때, 세 수의 합이 3의 배수인 경우는

(i) 집합 A_0에서 3개를 뽑는 경우

${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$(가지)

(ii) 집합 A에서 3개를 뽑는 경우

${}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$(가지)

(iii) 집합 A_2에서 3개를 뽑는 경우

${}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$(가지)

(iv) 집합 A_0, A_1, A_2에서 각각 1개를 뽑는 경우

${}_6C_1\times{}_7C_1\times{}_7C_1=294$(가지)

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$20+35+35+294=384$

121. 정답 ①

[해설]

10 장의 카드에서 2 장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$ (가지)

2 장의 카드에 적힌 수가 모두 2 의 배수이거나 모두 3 의 배수이거나 모두 5 의 배수이면 서로소가 아니다.

(i) 2 의 배수가 적힌 카드가 두 장 뽑히는 경우의 수는

${}_5C_2=10$ (가지)

(ii) 3 의 배수가 적힌 카드가 두 장 뽑히는 경우의 수는

${}_3C_2=3$ (가지)

(iii) 5 의 배수가 적힌 카드가 두 장 뽑히는 경우의 수는

${}_2C_2=1$ (가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$45-10-3-1=31$ (가지)

122. 정답 ④

[해설]

발라드곡은 2개까지 연속으로 나올 수 있으므로 연속인 개수가 (1, 1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2)인 경우로 나눌 수 있다.

먼저 댄스곡을 나열하는 경우의 수는 $3!=6$(가지)

댄스곡을 ○로 나타내면 발라드곡은 오른쪽 그림에서 ×표시가 된 곳에 연속으로 2개까지 들어 갈수 있다.

×○×○×○×

발라드곡의 연속인 개수가

(1, 1, 1, 1)인 경우 : $4!=24$(가지)

(2, 1, 1)인 경우 : ${}_4C_2\times{}_4P_3\times2!=288$(가지)

(2, 2)인 경우 : $\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{2!}\right)\times{}_4P_2\times2!\times2!=144$(가지)

따라서 7개의 곡을 배열하는 경우의 수는

$6\times(24+288+144)=2736$(가지)

다른 풀이

연속된 개수와 상관없이 7개의 곡을 배열하는 경우의 수는 $7!$(가지)

먼저 댄스곡 3개를 나열하는 경우의 수는 $3!=6$(가지)

댄스곡을 ○로 나타내면 발라드곡은 오른쪽 그림에서 ×표시가 된 4곳에 연속하여 2개까지 들어갈 수 있다.

×○×○×○×

3개가 연속하여 한 곳에 들어가는 경우의 수는

$({}_4C_3\times3!)\times{}_4P_2=12\times4!$(가지)

4개가 연속하여 한 곳에 들어가는 경우의 수는

$4!\times4$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$7!-(12\times4!+4\times4!)\times3!=2736$(가지)

123. 정답 ⑤

[해설]

A가 여행하는 두 개의 산을 선택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$ (가지)이다.

B 가 여행하는 두 개의 산이 A 가 여행하는 산과 두 개가 일치하는 경우의 수는 1 (가지), 한 개가 일치하는 경우의 수는 $2\times2=4$ (가지), 하나도 일치하지 않는 경우의 수는 1 (가지)이다.

(i) B 가 여행하는 두 개의 산이 A 가 여행하는 산과 두 개가 일치하는 경우

C 는 A,B 가 여행하지 않는 산을 여행해야 하므로 경우의 수는 1 (가지), D 도 A,B 가 여행하지 않는 산을 여행해야 하므로 경우의 수는 1 (가지)이다.

$\therefore 1\times1=1$ (가지)

(ii) B 가 여행하는 두 개의 산이 A 가 여행하는 산과 한 개가 일치하는 경우

C 는 A,B 가 모두 여행하지 않는 산은 반드시 여행하고 A,B 중 한명이 여행하는 두 개의 산에서 하나를 선택하여 여행할 수 있으므로 C 가 여행할 산을 선택하는 경우의 수는 2 (가지)이다.

이 때, D 는 한 명이 여행하는 산을 여행해야 하므로 경우의 수는 1 (가지)이다.

$\therefore 2\times1=2$ (가지)

(iii) B 가 여행하는 두 개의 산이 A 가 여행하는 두 개의 산과 하나도 일치하지 않는 경우

C 는 네 개의 산에서 두 개를 선택할 수 있으므로 경우의 수는 ${}_4C_2=6$ (가지), D 는 한 명이 여행하는 산을 여행해야 하므로 경우의 수는 1 (가지)이다.

$\therefore 6\times1=6$ (가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times(1\times1+4\times2+1\times6)=90$ (가지)

124. 정답 ④

[해설]

1000과 2000사이의 수는 천의 자리의 숫자가 1이어야 한다.

(i) 중복되는 숫자가 1인 경우

나머지 두 개의 숫자는 1을 제외한 9개의 숫자 중 2개를 택하고 다시 3개의 숫자를 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_9C_2\times3!=216$(가지)

(ii) 중복되는 숫자가 1이 아닌 경우

9개 중 2개를 택하여 그 중 하나의 숫자는 두 번 나열하면 되므로 3개의 숫자를 나열하는데 2개가 같은 순열의 수와 같으므로

${}_9C_2\times{}_2C_1\times\frac{3!}{2!}=216$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$216+216=432$(가지)

125. 정답 ④

[해설]

$x=1000a+100b+10c+d$

$(1\le a\le9, 0\le b\le9, 0\le c\le9, 1\le d\le9)$에 대하여

$y=1000d+100c+10b+a$이다.

$x>y$를 만족하는 경우는 다음과 같다.

(i) $a>d$ 인 경우

a, d를 선택하는 방법은 ${}_9C_2$가지이고, 이때 b,c를 선택하는 방법은

$10\times10=100$(가지)이므로

${}_9C_2\times100=3600$(개)

(ii) $a=d$인 경우

a, d를 선택하는 방법은 9가지이고, 이때 $b,c(b>c)$를 선택하는 방법은 ${}_{10}C_2$(가지)이므로

$9\times{}_{10}C_2=405$(개)

따라서 구하는 네 자리 자연수 x의 개수는

$3600+405=4005$(개)

126. 정답 ⑤

[해설]

$f(2)f(3)=0$ 이므로 $f(2)=0$ 또는 $f(3)=0$

(i) $f(2)=0$ 인 경우 $f(1)<f(2)$에서

$f(1)$의 값은 $-3,-2,-1$ 중의 하나이므로 3 (가지)

이때, $f(3),f(4),f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1,2,3,4,5 중에서 3 개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_3=10$ (가지)

$\therefore 3\times10=30$ (개)

(ii) $f(3)=0$ 인 경우 $f(1)<f(2)<f(3)$에서

$f(1),f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 -3, -2, -1 중에서 2 개 를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_2=3$ (가지)

이때, $f(4),f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2 개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$ (가지)

$\therefore 3\times10=30$ (개)

따라서 구하는 함수의 개수는 $30+30=60$ (개)

127. 정정답 ③

[해설]

표에 있는 ♥의 개수는 5 개이고, 특정한 반에 최대 3 개가 붙는다.

5 를 3 이하인 자연수의 합으로 나타내는 방법은

$1+1+1+1+1$, $1+1+1+2$, $1+1+3$, $1+2+2$, $2+3$

각각의 경우에 표가 만들어지는 경우의 수는

(i) $1+1+1+1+1$인 경우

♥가 1 개씩 붙은 5 개의 반을 결정하면 되므로 ${}_6C_5=6$ (가지)

(ii) $1+1+1+2$ 인 경우

♥가 1 개씩 붙은 3 개의 반과 2 개 붙은 1 개의 반을 결정하면 되므로

${}_6C_3\times{}_3C_1=60$ (가지)

(iii) $1+1+3$ 인 경우

♥가 1 개씩 붙은 2 개의 반과 3 개 붙은 1 개의 반을 결정하면 되므로

$_6C_2 \times {}_4C_1 = 60$ (가지)

(iv) $1+2+2$ 인 경우

♥가 1 개씩 붙은 1 개의 반과 2 개 붙은 2 개의 반을 결정하면 되므로

$_6C_1 \times {}_5C_2 = 60$ (가지)

(v) $2+3$ 인 경우

♥가 2 개씩 붙은 1 개의 반과 3 개 붙은 1 개의 반을 결정하면 되므로

$_6C_1 \times {}_5C_1 = 30$ (가지)

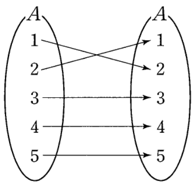
따라서 구하는 모든 경우의 수는

$6+60+60+60+30=216$ (가지)

128. 정답 ⑤

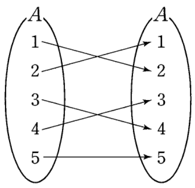
[해설] (ⅰ) f가 항등함수이면 $(f \circ f)(a) = a$: 1개

(ⅱ) 오른쪽 그림과 같이 두 원소가 한 조가 되어 서로 다른 원소에 대응될 때 $(f \circ f)(a) = a$ 이다.



$\therefore {}_5C_2 = 10$(개)

(ⅲ) 오른쪽 그림과 같이 4개의 원소가 각각 2개씩 한 조가 되어 두 조가 서로 다른 원소에 대응될 때 $(f \circ f)(a) = a$이다.



$\therefore {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times \dfrac{1}{2!} = 15$(개)

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $1+10+15=26$(개)

129. 정답 ④

[해설]

회장의 연락을 직접 받는 3 명의 회원을 정하는 경우의 수는

$_9C_3 = 84$ (가지)

회장에게 연락을 받은 3 명의 회원이 각각 서로 다른 2 명의 회원에게 연락하는 방법의 수는

$_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 90$ (가지)

따라서 비상연락망을 작성하는 경우의 수는

$84 \times 90 = 7560$ (가지)

130. 정답 ①

[해설] $f(k)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7)$ 중 2개를 $\sqrt{5}$에 대응시키는 방법의 수는 $_7C_2 = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$(가지)

나머지 5개의 $f(k)$의 곱이 2가 되고, (가)에서 치역과 공역이 같아지려면 5개의 $f(k)$의 값 중에서 $-\sqrt[5]{2}$는 2개 또는 4개 있어야 한다.

$\therefore {}_5C_2 + {}_5C_4 = 10+5 = 15$(가지)

따라서 구하는 함수의 개수는 $21 \times 15 = 315$

131. 정답 34

[해설] 세 장을 택하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 다음과 같이 생각할 수 있다.

(ⅰ) $\boxed{1}$을 세 장 택할 경우 : 1(개)

(ⅱ) $\boxed{1}$을 두 장 택하고 나머지 수 중 한 장을 택할 경우 :

$_3C_1 \times \dfrac{3!}{2!} = 9$(개)

(ⅲ) 서로 다른 숫자를 택할 경우 : $_4C_3 \times 3! = 24$(개)

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 자연수의 개수는

$1+9+24=34$(개)

132. 정답 56

[해설]

bc, ad를 묶어 ad, bc, b, c, d 다섯 개의 문자를 배열하는데 □□□□□에서 두 칸을 선택하여 ad, bc의 순으로 배열해야 하므로 $_5C_2 \times 3!$(가지)

이때, ad의 뒤에 bc가 두 번 나오는 문자열 (ad, bc, bc, d), (ad, bc, d, bc),(ad, d, bc, bc), (d, ad, bc, bc)는 각각 두 번씩 세어지므로 구하는 문자열의 수는

$_5C_2 \times 3! - 4 = 56$(가지)

133. 정답 240

[해설]

조건 (나)에 의하여 $n(A \cap B) = 0$인 경우와 $n(A \cap B) = 1$인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $n(A \cap B) = 0$인 경우

집합 A의 원소를 결정하는 방법이 $_6C_3$(가지)이고, 집합 B를 결정하

는 방법이 $_3C_2$(가지) 이므로

$_6C_3 \times {}_3C_2 = 60$(가지)

(ⅱ) $n(A \cap B) = 1$인 경우

집합 A의 원소를 결정하는 방법이 $_6C_3$(가지)이고, 집합 B를 결정할 때, 집합 A의 원소에서 하나, A^C의 원소에서 하나를 뽑아서 만들어 야 하므로

$_6C_3 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 180$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$60+180=240$(가지)

134. 정답 90

[해설]

6개의 과제를 제출하는 순서대로 아래 6개의 칸을 채운다고 생각하자.

1	2	3	4	5	6

국어를 제출하는 두 칸을 선택하는 방법은 $_6C_2 = 15$(가지)이고, 두 칸 중에서 앞의 칸에 국어 A를, 뒤의 칸에 국어 B를 채운다. 같은 방법으로, 수학을 제출하는 두 칸을 선택하는 방법은 $_4C_2 = 6$(가지)이고, 나머지 두 칸에는 영어를 제출한다.

따라서 구하는 방법의 수는

$15 \times 6 = 90$(가지)

135. 정답 127

[해설]

$a_1 = 9$, $a_2 \neq 1$, $r = 2$를 만족하는 9자리 정수가 되려면 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$에서 $9 = a_1 > a_2$이므로 $a_n > a_{n+1}$을 만족하는 $n(n = 2, 3, 4, \cdots, 8)$은 한 개 뿐이어야 한다.

즉, $a_2 < a_3 < \cdots < a_n, a_{n+1} < a_{n+2} < \cdots < a_9$가 성립하도록 a_n을 결정하면 된다. 그런데 $2, 3, 4, \cdots, 8$ 중에서 $n-1$개를 뽑아 작은 수부터 $a_2, a_3, \cdots, a_n$을 결정하면 $a_2 < a_3 < \cdots < a_n$이 성립하고, 또한 뽑히지 않은 수 중에서 작은 수부터 $1 = a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_9$를 결정하면 조건에 맞는 수가 된다.

$2, 3, 4, \cdots, 8$ 중에서 $(n-1)$개를 뽑는 방법의 수는

$${}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_7C_3 + \cdots + {}_7C_7 = 2^7 - 1$$
$$= 127(\text{가지})$$

다른 풀이

$a_1 = 9$, $a_2 \neq 1$, $r = 2$를 만족시키는 9자리 정수를 배열하는 방법은 다음과 같다.

$9 \times 1 \times \times \times \times \times \times$의 경우: ${}_7C_1 \times {}_6C_6$

$9 \times \times 1 \times \times \times \times \times$의 경우: ${}_7C_2 \times {}_5C_5$

$9 \times \times \times 1 \times \times \times \times$의 경우: ${}_7C_3 \times {}_4C_4$

$9 \times \times \times \times 1 \times \times \times$의 경우: ${}_7C_4 \times {}_3C_3$

$9 \times \times \times \times \times 1 \times \times$의 경우: ${}_7C_5 \times {}_2C_2$

$9 \times \times \times \times \times \times 1 \times$의 경우: ${}_7C_6 \times {}_1C_1$

$9 \times \times \times \times \times \times \times 1$의 경우: ${}_7C_7$

따라서 구하는 정수의 개수는

${}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_7C_3 + \cdots + {}_7C_7 = 2^7 - 1 = 127(\text{가지})$

136. 정답 81

[해설]

(i) 모든 $x \in X$에 대하여 $f(x) = x$인 경우 주어진 두 조건을 만족시킨다.

(ii) $f(a) = b(a \neq b)$를 만족시키는 두 원소 a, b가 존재하는 경우 $f(x)$가 일대일 대응이므로 $f(b) \neq a$이면

$(f \circ f \circ f)(a) = f(f(f(a))) = f(f(b)) = f(a) = b$

가 되어 조건을 만족시키지 않으므로 $f(b) \neq a$이다.

$f(b) = c$라 하면 위와 같은 이유로 $f(c) \neq c$, $f(c) \neq b$

또, $(f \circ f \circ f)(a) = a$에서 $f(c) = a$

그러므로 X의 세 원소 a, b, c에 대하여

$f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ …… ㉠

가 성립하여야 한다.

이때, 함수 f는 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

① 6개의 원소 중에서 세 원소에 대해서는 ㉠이 성립하고 나머지는 자기 자신으로 대응하는 경우

6개의 원소 중 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$(가지)이고 선택된 세 원소 a, b, c에 대하여

$f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ 또는

$f(a) = c$, $f(c) = b$, $f(b) = a$

가 성립하면 되므로 함수의 개수는 $20 \times 2 = 40$(개)

② 6개의 원소 중에서 3개씩 각각 ㉠이 성립하는 경우

6개의 원소를 3개씩 2개의 조로 분할하는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2} = 10(\text{가지})$$

각각에 대하여 대응하는 방법이 2가지씩 존재하므로 함수의 개수는

$$10 \times 10 \times 2 = 40(\text{개})$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 $f(x)$의 개수는

$$1 + 40 + 40 = 81(\text{개})$$

137. 정답 ⑤

[해설]

4명씩 두 개의 조로 편성할 때, 한 쪽 조에는 네 학교에서 한 명씩의 선수만 들어가야 한다.

각 학교에서 한 명씩 선택하는 경우의 수는 2^4이고 양 쪽 조가 바뀌는 경우는 같은 경우로 세어야 하므로 경우의 수는 $\frac{2^4}{2} = 8$(가지)

한 쪽 조의 네 명을 두 팀으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3(\text{가지})$$

따라서 토너먼트의 대진표를 만드는 경우의 수는

$$8 \times 3 \times 3 = 72(\text{가지})$$

138. 정답 ③

8명을 구분 없이 세 묶음으로 나누는 방법은

(i) 1, 3, 4명으로 나눌 때, 1명이 외국인이 되지 않도록 하는 방법의 수는

${}_8C_1 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 - ({}_7C_3 \times {}_4C_4) = 245$

(ii) 2, 2, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 210$

(iii) 2, 3, 3명으로 나누는 방법의 수는

${}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times 2! = 280$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$245 + 210 + 280 = 735$

139. 정답 ④

[해설] 6명 중에서 2명을 뽑아 부전승에 배치하는 방법의 수는

${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$

나머지 4명을 2명씩 나눈 후 나머지 자리에 배치하는 방법의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{1}{2} = 3$

따라서 구하는 방법의 수는 $15 \times 3 = 45$

140. 정답 ⑤

[해설] 12개의 구슬을 (4, 4, 4) 세 뭉치로 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는

$A = {}_{12}C_4 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{3!} \times 3!$

특정한 2개의 구슬이 한 뭉치 속에 들어갈 경우는 10개의 구슬을 (4, 4, 2)의 3뭉치로 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수와 같다.

$B = {}_{10}C_4 \times {}_6C_4 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times 3!$

$\therefore \frac{B}{A} = \frac{{}_{10}C_4 \times {}_6C_4 \times 3}{{}_{12}C_4 \times {}_8C_4}$

141. 정정답 ①

[해설]

여섯 개의 파일을 세장의 디스켓에 저장하려면

(4개, 1개, 1개), (3개, 2개, 1개), (2개, 2개, 2개)

로 나누어 저장해야 한다.

또한 , 4개의 파일의 크기의 합은 900KB이하이므로 한 장의 디스켓에 저장할 수 있다.

(i) (4개, 1개, 1개)로 나누어 저장하는 방법의 수는

$${}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15 \text{ (가지)}$$

(ii) (3개, 2개, 1개)로 나누어 저장하는 방법의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = 60 \text{ (가지)}$$

(iii) (2개, 2개, 2개)로 나누어 저장하는 방법의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \text{ (가지)}$$

(i),(ii),(iii)에서 구하는 방법의 수는

$$15 + 60 + 15 = 90 \text{ (가지)}$$

142. 정답 ⑤

[해설]

서로 다른 8개의 사탕에서 3개를 골라 주머니에 넣는 방법이 ${}_8C_3$(가지)이고, 남은 5개의 사탕에서 3개를 골라 주머니에 넣는 방법이 ${}_5C_3$(가지)이다. 그런데 3개를 넣은 주머니는 서로 구분이 되지 않으므로 주머니에 나누어 넣는 방법의 수는

$${}_8C_3 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2} = 280 \text{(가지)}$$

143. 정답 ②

[해설]

운전할 수 있는 3사람이 두 승용차 A, B에 나누어 타는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2C_2 \times 2! = 6 \text{(가지)}$$

운전할 수 있는 사람이 승용차 A에 1명, 승용차 B에 2명 탔을 때 나머지 3명은 두 승용차에 (1명, 2명), (2명, 1명), (3명, 0명) 탈 수 있으므로 그 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2C_2 + {}_3C_2 \times {}_1C_1 + {}_3C_3 = 3 + 3 + 1 = 7 \text{(가지)}$$

마찬가지로 운전할 수 있는 사람이 승용차 A에 2명, 승용차 B에 1명탓을 때도 그 경우의 수는 7(가지)이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 7 = 42 \text{(가지)}$$

144. 정답 ⑤

[해설]

먼저 민준, 희정이가 4명인 조에 들어가는 경우는 나머지를

(2명, 3명, 3명)으로 나누면 되므로

$${}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 280 \text{(가지)}$$

또, 민준, 희정이가 3명인 조에 들어가는 경우는 나머지를

(4명, 1명, 1명)으로 나누면 되므로

$${}_8C_4 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 = 280 \text{(가지)}$$

따라서 민준, 희정이를 같은 조에 넣어 조를 편성하는 경우의 수는

$280 + 280 = 560$(가지)

이 3개의 조를 역사체험, 문화체험, 갯벌체험으로 나누는 경우의 수는

$3! = 6$(가지)이다.

그러므로 구하는 경우의 수는

$$560 \times 6 = 3360 \text{(가지)}$$

145. 정답 ①

[해설]

(i) A, B 가 2 명인 같은 팀에 속할 때 나머지 6 명을 3 명, 3 명의 두 팀으로 나누면 되므로

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 10 \text{ (가지)}$$

(ii) A, B 가 3 명인 같은 팀에 속할 때 나머지 6 명을 1 명, 2 명, 3 명

으로 나누어 1 명을 A, B 와 같은 팀에 속하게 하면 되므로

$${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 60 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 + 60 = 70 \text{ (가지)}$$

[해설]

146. 정답 ⑤

[해설] 동대구역, 김천역, 대전역, 서울역 중에서 두 곳을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$이다.

(i) 두 역에 1명, 3명씩 내리는 경우의 수는

${}_4C_2 \times ({}_4C_1 \times {}_3C_3 \times 2!) = 48$

(ii) 두 역에 각각 2명, 2명씩 내리는 경우의 수는

${}_4C_2 \times ({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times 2!) = 36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $48 + 36 = 84$

147. 정답 ④

[해설] 7팀을 6팀과 1팀으로 나눈 후 6팀을 4팀, 2팀, 다시 4팀을 2팀, 2팀으로 나누는 경우의 수와 같으므로

(i) 7팀을 1팀, 6팀으로 나누는 방법의 수는 ${}_7C_1 \times {}_6C_6$

(ii) 6팀을 2팀, 4팀으로 나누는 방법의 수는 ${}_6C_2 \times {}_4C_4$

(iii) 4팀을 2팀, 2팀으로 나누는 방법의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$

(i), (ii), (iii)에서 대진표를 작성하는 방법의 수는

${}_7C_1 \times {}_6C_6 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$

$= 7 \times 1 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2}$

$= 315$

148. 정답 ③

[해설]

사각형 한 개는 가로선 2개와 세로선 2개로 결정되므로 주어진 그림에서 사각형의 총 개수는

$${}_5C_2 \times {}_5C_2 = 10 \times 10 = 100(\text{개})$$

이 중에서 정사각형의 개수는

한 변의 길이가 1칸인 경우 : $4 \times 4 = 16$(개)

한 변의 길이가 2칸인 경우 : $3 \times 3 = 9$(개)

한 변의 길이가 3칸인 경우 : $2 \times 2 = 4$(개)

한 변의 길이가 4칸인 경우 : $1 \times 1 = 1$(개)

$$100-(16+9+4+1)=70(\text{개})$$

149. 정답 ⑤

[해설]

두 직선이 교점 하나를 만들게 되므로 6개의 직선이 만드는 교점의 개수는 ${}_6C_2$이다. 그런데 그 중 평행한 직선은 교점이 없으므로 교점의 개수는

$$a = {}_6C_2 - 1 = 14$$

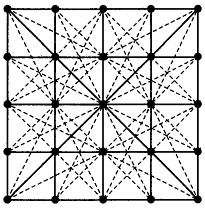
삼각형을 만들기 위해 14개의 점 중에서 3개의 점을 선택하는 방법의 수는 ${}_{14}C_3$이다. 그런데 한 직선위에 존재하는 3점을 택하는 경우는 삼각형이 되지 않으므로 제외해야 한다. 평행한 두 직선 위에는 교점이 4개씩 존재하고, 그 이외의 직선 위에는 교점이 5개씩 존재하므로 삼각형의 개수는

$$b = {}_{14}C_3 - ({}_4C_3 \times 2 + {}_5C_3 \times 4) = 316$$

$$\therefore a+b = 14+316 = 330$$

150. 정답 ①

[해설]



25개의 점 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_{25}C_2$(가지)이다.

이 중에서 중복되는 경우는 5개의 점이 한 직선 위에 있는 경우 12가지, 4개의 점이 한 직선 위에 있는 경우 4가지, 3개의 점이 한 직선 위에 있는 경우 16가지이다.

따라서 구하는 직선의 개수는

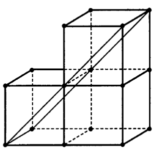
$${}_{25}C_2 - 12({}_5C_2 - 1) - 4({}_4C_2 - 1) - 16({}_3C_2 - 1)$$

$$= 300 - 108 - 20 - 32$$

$$= 140(\text{개})$$

151. 정답 정정답 ④

[해설]



16 개의 점 중에서 3 개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{16}C_3 = 560 \text{ (가지)}$$

이때, 오른쪽 그림과 같이 3 개의 점이 일직선 위에 있는 10 가지 경우는 삼각형이 만들어지지 않는다.

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$560 - 10 = 550 \text{ (개)}$$

152. 정정답 ④

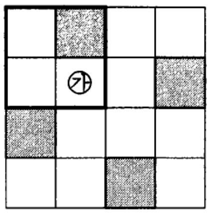
[해설]

몇 도 회전해야 같은 도형이 되는지로 구분한다.

(i) 90° 회전할 때, 같은 도형이 되는 경우

㉮에서 1 개의 정사각형을 택하고 90° 회전시키면서 칠한다.

$$\therefore {}_4C_1 = 4 \text{ (가지)}$$



(ii) 180° 회전할 때, 같은 도형이 되는 경우

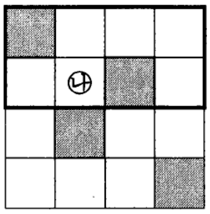
㉯에서 2 개의 정사각형을 택하고 180° 회전시키면서 칠한다.

$$\therefore {}_8C_2 = 28$$

(iii) 180° 회전할 때, 같은 도형이 되지 않는 경우

16 개의 정사각형에서 4 개를 택하는 경우에서 (ii)의 경우를 제외한다.

$$\therefore {}_{16}C_4 - {}_8C_2 = 1792$$



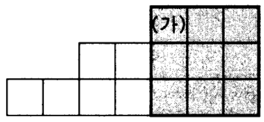
(i) 의 경우는 서로 다르게 색칠한 것이 회전하여 일치하게 되는 경우가 없고, (ii)에서 (i)을 제외한 경우는 서로 다르게 색칠한 것이 회전하여 일치하게 되는 경우가 2 가지, (iii)의 경우는 서로 다르게 색칠한 것이 회전하여 일치하게 되는 경우가 4 가지이다.

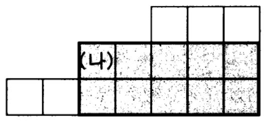
따라서 구하는 경우의 수는

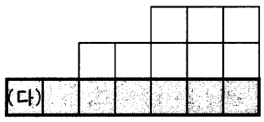
$$4 + \frac{28-4}{2} + \frac{1792}{4} = 464 \text{ (가지)}$$

153. 정정답 ④

[해설]







(가),(나),(다)의 영역에 포함되는 직사각형의 집합을 각각 A, B, C 라 하자.

(가)의 영역에 포함되는 직사각형은 가로선 4 개 중에서 2 개를 택하고, 세로선 4 개 중에서 2 개를 택하면 결정된다.

$\therefore n(A) = {}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$

같은 방법으로

$n(B) = {}_3C_2 \times {}_6C_2 = 45$

$n(C) = {}_2C_2 \times {}_8C_2 = 28$

$n(A \cap B) = {}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$

$n(B \cap C) = {}_2C_2 \times {}_6C_2 = 15$

$n(C \cap A) = {}_2C_2 \times {}_4C_2 = 6$

$n(A \cap B \cap C) = {}_2C_2 \times {}_4C_2 = 6$

따라서 구하는 직사각형의 개수는

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$

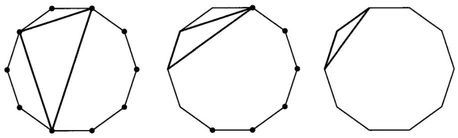
$- n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

$= 36 + 45 + 28 - 18 - 15 - 6 + 6$

$= 76$

154. 정답 ②

[해설]



직각삼각형이 되려면 한 변이 정십각형의 외접원의 지름이 되어야 한다. 지름 한 개를 선택하여 만들 수 있는 직각삼각형은 8개이고, 정십각형의 외접원의 지름이 5개이므로

$8\times5=40$(개)의 직각삼각형을 만들 수 있다.

$\therefore a=40$

정십각형의 10개의 꼭짓점에서 3개를 선택하여 만들 수 있는 삼각형의 총 개수는 ${}_{10}C_3=120$(개)

그 중에서 한 변을 공유하는 삼각형이 $10\times6=60$(개)이고,

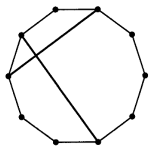
두 변을 공유하는 삼각형이 10개이므로

$b=120-60-10=50$

$\therefore b-a=10$

155. 정답 210

[해설]



정십각형의 10개의 꼭짓점에서 4개를 선택하여 두 선분이 정십각형의 내부의 한 점에서 만나도록 그리면 문제의 조건을 만족하도록 할 수 있으므로 구하는 방법의 수는

${}_{10}C_4=210$ (가지)

156. 정답 19

[해설]

두 쌍의 부부를 A, B라 하면 A, B가 같은 차에 타는 경우와 서로 다른 차에 타는 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) A, B가 4인승 차에 타는 방법: 1가지

(ⅱ) A, B가 서로 다른 차를 타는 방법

남은 3명이 4인승, 5인승 차에 나누어 탄다.

4인승 0명, 5인승 3명의 1가지

4인승 1명, 5인승 2명의 3가지

4인승 2명, 5인승 1명의 3가지

이므로 $(1+3+3)\times2=14$(가지)

(ⅲ) A, B가 5인승 차에 타는 방법

남은 3명이 4인승, 5인승 차에 나누어 탄다.

4인승 3명, 5인승 0명의 1가지

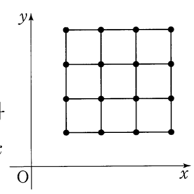
4인승 2명, 5인승 1명의 3가지이므로 4가지

따라서 구하는 방법의 수는

$1+14+4=19$(가지)

157. 정답 372

[해설]



16개 중 3개를 선택하는 방법의 수는

${}_{16}C_3=\dfrac{16\cdot15\cdot14}{3\cdot2\cdot1}=560$(가지)

그런데 세 점이 일직선 위에 있는 경우 (x축과 평행한 직선, y축과 평행한 직선, 직선 $y=\pm x$와 평행한 직선)는 삼각형이 될 수 없으므로

${}_4C_3\cdot10+{}_3C_3\cdot4=44$(가지)

따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수, 즉 집합 T의 원소의 개수는

$m=560-44=516$(개)

이들 삼각형 중에서 x축, y축과 평행한 두 변을 갖는 삼각형은 직각삼각형이고, 직각이 되는 꼭짓점은 집합 S의 원소이다. 집합 S의 원소 하나를 택하는 방법이 16(가지)이고, 삼각형의 나머지 꼭짓점은 가로 방향에서 3개 중 하나를 택하고 세로 방향에서 3개 중 하나를 택해야 하므로

$n=16\times3\times3=144$(개)

$\therefore m-n=372$

158. 정답 ①

[해설]

$(x^3-x)^2=x^6-2x^4+x^2$이므로 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^{-6}, x^{-4}, x^{-2}의 계수를 구하여 위 전개식의 각 항에 곱하면 상수항을 얻는다.

$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r x^{6-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r={}_6C_r\cdot2^r\cdot x^{6-2r}$

x^{-6}의 계수는 $6-2r=-6$에서 $r=6$이므로

${}_6C_6\cdot2^6=64$

x^{-4}의 계수는 $6-2r=-4$에서 $r=5$이므로

${}_6C_5\cdot2^5=192$

x^{-2}의 계수는 $6-2r=-2$에서 $r=4$이므로

${}_6C_4\cdot2^4=240$

따라서 주어진 식에서 상수항은

$1\times64-2\times192+1\times240=-80$

159. 정답 ①

[해설] $x(x^2+y)^5$의 전개식에서 x^3y^4의 계수는 $(x^2+y)^5$의 전개식에서 x^2y^4의 계수와 같다.

$(x^2+y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(x^2)^{5-r}y^r={}_5C_r x^{10-2r}y^r$

$10-2r=2$에서 $r=4$

따라서 구하는 계수는 ${}_5C_4={}_5C_1=5$

160. 정답 ⑤

$\left(x^7+\dfrac{1}{x^4}\right)^n$의 일반항은 ${}_nC_r(x^7)^{n-r}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)^r$이므로

${}_nC_r x^{7n-7r}\cdot x^{-4r}={}_nC_r x^{7n-11r}$

상수항이 되려면 $7n-11r=0$에서 $n=\dfrac{11}{7}r$

7과 11은 서로소이므로 r은 7의 배수이고, 이때 n은 11의 배수이다.

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}11k=11\cdot\dfrac{10\cdot11}{2}=605$

161. 정답 ④

[해설]

$$(ax+by)^{10}=\sum_{r=0}^{10}{}_{10}C_r(ax)^{10-r}(by)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{10}{}_{10}C_r\,a^{10-r}b^rx^{10-r}y^r$$

x^7y^3 의 계수는 $r=3$ 일 때, ${}_{10}C_3a^7b^3=120a^7b^3=1920$ ⋯ ㉠

x^3y^7 의 계수는 $r=7$ 일 때, ${}_{10}C_7a^3b^7=120a^3b^7=\frac{15}{2}$⋯ ㉡

㉠에서 $a^7b^3=16$, ㉡에서 $a^3b^7=\frac{1}{16}$

두 식을 변끼리 곱하면 $a^{10}b^{10}=1$ $\therefore ab=1$ $(\because a>0, b>0)$

$ab=1$ 을 $a^7b^3=16$ 에 대입하면 $(ab)^3\cdot a^4=16$, 즉 $a^4=16$

$$\therefore a=2,\ b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 4(a+b)=4\cdot\frac{5}{2}=10$$

162. 정정답 ⑤

[해설]

$198^{10}=(200-2)^{10}$

$={}_{10}C_0200^{10}+{}_{10}C_1200^9(-2)+\cdots+{}_{10}C_9200(-2)^9+{}_{10}C_{10}200(-2)^{10}$

이때,

${}_{10}C_0200^{10}+{}_{10}C_1200^9(-2)+\cdots+{}_{10}C_9200(-2)^9$ 은 400 으로 나누어 떨어진다.

따라서 198^{10} 을 400 으로 나누었을 때의 나머지는

${}_{10}C_{10}(-2)^{10}=1024$를 400으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 구하는 나머지는 224 이다.

163. 정답 ④

[해설] $(4x+a)\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x의 계수와 상수항은

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 일반항은

${}_6C_rx^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r(-1)^rx^{6-2r}$이므로

$6-2r=0$, $6-2r=1$, $6-2r=-1$ 중에서 만족하는 정수 r가 존재할 때는 $6-2r=0$일 때이므로

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에는 x항과 $\frac{1}{x}$항은 존재하지 않고, 상수항은 $r=3$일 때, ${}_6C_3\times(-1)^3=-20$이다.

따라서 $(4x+a)\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x항의 계수는 $4\times(-20)=-80$이고, 상수항은 $a\times(-20)=-20a$이므로

$-80<-20a$에서 $a<4$

따라서 구하는 자연수 a의 값의 합은 $1+2+3=6$

164. 정답 ⑤

[해설]

$(x-2)^3$ 의 전개식에서 이차 이하의 항은

$${}_3C_1\cdot x^2\cdot(-2)+{}_3C_2\cdot x\cdot(-2)^2+{}_3C_3(-2)^3$$

$=-6x^2+12x-8$

$(2x+1)^5$ 의 전개식에서 이차 이하의 항은

${}_5C_3\cdot(2x)^2+{}_5C_4\cdot 2x+{}_5C_5=40x^2+10x+1$

따라서 $(x-2)^3(2x+1)^5$ 의 전개식에서 이차항은

$-6x^2\cdot 1+12x\cdot 10x+(-8)\cdot 40x^2=-206x^2$

이므로 구하는 x^2 의 계수는 -206 이다.

165. 정답 ④

[해설]

$n\ge 3$일 때, $(1+x)^n$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_nC_3$이므로

주어진 식의 전개식에서 x^3의 계수는

$${}_3C_3+{}_3C_3+{}_3C_3+{}_3C_3+\cdots+{}_3C_3$$

$$=({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3(\because {}_3C_3={}_4C_4)$$

$$=({}_5C_4+{}_5C_3)+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3(\because {}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r)$$

$$=\cdots={}_{10}C_4+{}_{10}C_3$$

$$={}_{11}C_4=330$$

166. 정답 ③

[해설]

파스칼의 삼각형에서 ${}_2C_0$ 의 오른쪽 아래로 내려가는 선을 따라가며 합을 구하면

${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8$

$={}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_{2+}\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_4C_3+{}_4C_{2+}\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_2$

$=\cdots={}_{11}C_3=165$

${}_2C_1$ 의 오른쪽 아래로 내려가는 선을 따라가며 합을 구하면

$${}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9={}2+3+4+\cdots+10=54$$

${}_2C_2$ 의 오른쪽 아래로 내려가는 선을 따라가며 합을 구하면

$${}_2C_2+{}_3C_3+{}_4C_4+\cdots+{}_{10}C_{10}=1+1+1+\cdots+1=9$$

따라서 어두운 부분의 모든 수들의 합은

$$165+54+9=228$$

167. 정답 ①

[해설]

$(1+x)^n$의 전개식에서 x, x^2, x^3의 계수는 각각 ${}_nC_1$, ${}_nC_2$, ${}_nC_3$이고

이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2\times{}_nC_2={}_nC_1+{}_nC_3$$

$$2\times\frac{n(n-1)}{2}=n+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

정리하면

$$n(n-2)(n-7)=0$$

$n\ge 3$이므로

$$n=7$$

168. 정답 ③

[해설]

파스칼의 삼각형에서 $(n+1)$번째 행에 있는 수의 합은

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n(n\ge 1)$$

이므로 주어진 그림의 모든 수의 합은

$$1+2^1+2^2+\cdots+2^8=\frac{2^9-1}{2-1}=511$$

169. 정답 ③

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10}(1+x)^k=(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$$

ㄱ. $(1+x)^k$의 상수항이 1이므로 주어진 식의 상수항은

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{10\text{개}}=10\ (\text{참})$$

ㄴ. 주어진 식의 모든 계수의 합은 x대신 1을 대입하여 계산한 것과 같다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(1+x)^n=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2046(\text{거짓})$$

ㄷ. $k\ge n$일 때 $(1+x)^k$의 전개식에서 x^n의 계수는 ${}_kC_n$이다.

그러므로 주어진 식에서 x^n의 계수는

$${}_nC_n+{}_{n+1}C_n+\cdots+{}_{10}C_n$$

그런데 ${}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}$이고 ${}_nC_n={}_{n+1}C_{n+1}$이므로

$${}_nC_n+{}_{n+1}C_n+\cdots+{}_{10}C_n$$
$$=({}_{n+1}C_{n+1}+{}_{n+1}C_n)+{}_{n+2}C_n+\cdots+{}_{10}C_n$$
$$={}_{n+2}C_{n+1}+{}_{n+2}C_n+\cdots+{}_{10}C_n$$
$$\vdots$$
$$={}_{10}C_{n+1}+{}_{10}C_n={}_{11}C_{n+1}(\text{참})$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

170. 정답 210

[해설]

$$(\text{주어진 식})=\frac{(1+x)\{(1+x)^9-1\}}{(1+x)-1}$$
$$=\frac{\{(1+x)^{10}-(1+x)\}}{x}$$

이므로 구하는 x^3의 계수는 $(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^4의 계수와 같다.

$(1+x)^{10}$의 전개식의 일반항은 ${}_{10}C_rx^r$이므로 x^4의 계수는

$x=4$일 때

$${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

다른 풀이

$(1+x),(1+x)^2$에서는 x^3이 나타나지 않고,

$(1+x)^3,(1+x)^4,\cdots,(1+x)^9$의 전개식에서 x^3의 계수는 각각

${}_3C_3,{}_4C_3,\cdots,{}_9C_3$이다.

따라서 주어진 식에서 x^3의 계수는

$${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3$$
$$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3(\because {}_3C_3={}_4C_4)$$
$$={}_5C_4+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3(\because {}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}={}_nC_r)$$
$$={}_6C_4+\cdots+{}_9C_3=\cdots={}_9C_4+{}_9C_3={}_{10}C_4=210$$

171. 정답 10

[해설]

x^2의 계수는 ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}=45$이므로

$n^2-n-90=0,\ (n+9)(n-10)=0$

$\therefore n=10(\because n$은 자연수)

172. 정답 165

[해설]

$(x-1)^n=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r(-1)^{n-r}x^r$이므로 x^2의 계수는

${}_nC_2(-1)^{n-2}$

즉, ${}_nC_2(-1)^{n-2}=-55$이므로

$$\frac{n(n-1)}{2}\times(-1)^{n-2}=-55\qquad \therefore n=11$$

따라서 구하는 x^3의 계수는

$${}_{11}C_3(-1)^{11-3}=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$$

173. 정답 42

[해설]

전개식의 일반항은

$${}_{500}C_r(\sqrt[3]{5}\,x)^{500-r}(\sqrt[4]{3})^r={}_{500}C_r5^{\frac{500-r}{3}}\cdot3^{\frac{r}{4}}\cdot x^{500-r}$$

계수가 유리수가 되려면 $500-r$는 3의 배수이고 r는 4의 배수이어야 한다. $500-r$는 3의 배수이므로 $r=3k+2$(단, k는 정수)

또, r는 4의 배수이므로 $r=4l$(단, l은 정수)

따라서 위의 두 조건을 모두 만족시키는 r의 값은

8, 20, 32, 44, $\cdots$

이는 첫째항이 8, 공차가 12인 등차수열이므로 일반항을 r_n이라 하면

$r_n=8+(n-1)\times12\le500$

에서 $n\le42$

즉, 계수가 유리수인 항의 개수는 42개다.

174. 정답 ②

[해설]

$\log({}_{41}C_1+{}_{41}C_3+{}_{41}C_5+\cdots+{}_{41}C_{41})$

$=\log2^{41-1}$

$=40\log2$

$=40\times0.3010$

$=12.040$

이므로 13자리 정수이다.

175. 정답 ②

[해설] ㄱ. ${}_{20}C_0+{}_{20}C_1+{}_{20}C_2+\cdots+{}_{20}C_{20}=2^{20}$이므로

${}_{20}C_2+{}_{20}C_3+{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{18}$

$=2^{20}-({}_{20}C_0+{}_{20}C_1+{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{20})=2^{20}-42$ (거짓)

ㄴ. ${}_{20}C_0+{}_{20}C_1+\cdots+{}_{20}C_{20}=2^{20}$ … ㉠

${}_{20}C_0-{}_{20}C_1+{}_{20}C_2-\cdots+{}_{20}C_{20}=0$…㉡

㉠+㉡을 하면

$2({}_{20}C_0+{}_{20}C_2+\cdots+{}_{20}C_{20})=2^{20}$

$\therefore {}_{20}C_0+{}_{20}C_2+\cdots+{}_{20}C_{20}=2^{19}$

㉠－㉡을 하면

$2({}_{20}C_1+{}_{20}C_3+\cdots+{}_{20}C_{19})=2^{20}$

$\therefore {}_{20}C_1+{}_{20}C_3+\cdots+{}_{20}C_{19}=2^{19}$

$\therefore {}_{20}C_0+{}_{20}C_2+{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{20}={}_{20}C_1+{}_{20}C_3+{}_{20}C_5+\cdots+{}_{20}C_{19}$ (참)

ㄷ. ${}_{20}C_r={}_{20}C_{20-r}$이므로 ${}_{20}C_0+{}_{20}C_1+{}_{20}C_2+\cdots+{}_{20}C_{10}=x$이면

${}_{20}C_{20}+{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{18}+\cdots+{}_{20}C_{10}=x$이므로

$({}_{20}C_0+{}_{20}C_1+{}_{20}C_2+\cdots+{}_{20}C_{20})+{}_{20}C_{10}=2x$

$2^{20}+{}_{20}C_{10}=2x \quad \therefore x=2^{19}+\frac{1}{2}\cdot{}_{20}C_{10}$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

176. 정답 ④

[해설] 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 2, 4, 6, 8, 10인 부분집합의 개수는 각각 ${}_{10}C_2$, ${}_{10}C_4$, ${}_{10}C_6$, ${}_{10}C_8$, ${}_{10}C_{10}$이다.

이항계수의 성질에서

${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^9$이므로

구하는 부분집합의 개수의 총합은

${}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^9-1=511$이다.

다른 풀이

${}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}$

$=2\times({}_{10}C_2+{}_{10}C_4)+{}_{10}C_{10}=511$

177. 정답 ④

[해설] $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots+{}_nC_nx^n$이므로

$a_1={}_nC_1$, $a_2={}_nC_2$, $a_3={}_nC_3$이다.

$9a_1$, a_2, $\frac{a_3}{5}$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_2{}^2=9a_1\times\frac{a_3}{5}$

$\therefore ({}_nC_2)^2=\frac{9}{5}\times{}_nC_1\times{}_nC_3$

$\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2=\frac{9}{5}\cdot n\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$이므로 이 식을 정리하면

$5(n-1)=6(n-2) \qquad \therefore n=7$

178. 정정답 ⑤

[해설]

등비수열의 합에서 다음이 성립한다.

$1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$

$=\frac{(1+x)^{11}-1}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^{11}-1}{x}$

따라서 $1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$ 전개식에서

x^k의 계수는 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^{k+1}의 계수와 같으므로

$a_k={}_{11}C_{k+1}$ 이다.

$\therefore a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots a_9-a_{10}$

$={}_{11}C_2-{}_{11}C_3+{}_{11}C_4-{}_{11}C_5+\cdots+{}_{11}C_{10}-{}_{11}C_{11}$

$=({}_{11}C_0-{}_{11}C_1+{}_{11}C_2-{}_{11}C_3+\cdots+{}_{11}C_{10}-{}_{11}C_{11})-{}_{11}C_0+{}_{11}C_1$

$=(1-1)^{11}-1+11$

$=10$

179. 정답 ②

[해설]

$(x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}$ …… ㉢

㉡+㉢을 하면

$2(a_0+a_2+\cdots+a_{2n})=2n$

$\therefore a_0+a_2+\cdots+2_{2n}=2^{n-1}$

주어진 조건에서

$2^{n-1}=512=2^9 \qquad \therefore n=10$

180. 정답 ②

[해설]

$(1+i)^2=2i$이므로

$(1+i)^{12}=(2i)^6=2^6\times(-1)=-64$ …… ㉠

또, $(1+i)^{12}$의 전개식에서

$(1+i)^{12}={}_{12}C_0+{}_{12}C_1i+{}_{12}C_2i^2+{}_{12}C_3i^3+\cdots+{}_{12}C_{12}i^{12}$

$=({}_{12}C_0-{}_{12}C_2+{}_{12}C_4-{}_{12}C_6+{}_{12}C_8-{}_{12}C_{10}+{}_{12}C_{12})$
$+({}_{12}C_1-{}_{12}C_3+{}_{12}C_5-{}_{12}C_7+{}_{12}C_9-{}_{12}C_{11})i$ …… ㉡

㉠과 ㉡의 실수부분을 비교하면

$\therefore {}_{12}C_0-{}_{12}C_2+{}_{12}C_4-{}_{12}C_6+{}_{12}C_8-{}_{12}C_{10}+{}_{12}C_{12}=-64$

181. 정답 ②

[해설]

$(1+i)^{14}={}_{14}C_0+{}_{14}C_1i+{}_{14}C_2i^2+\cdots+{}_{14}C_{14}i^{14}$

$=({}_{14}C_0-{}_{14}C_2+\cdots-{}_{14}C_{14})+i({}_{14}C_1-{}_{14}C_3+\cdots+{}_{14}C_{13})$

그런데 $(1+i)^{14}=\{(1+i)^2\}^7=(2i)^7=-128i$

따라서 구하는 값은 -128이다.

182. 정답 25

[해설]

$\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k = {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - 1$

(ⅰ) n이 짝수일 때, $n = 2a$ (a는 자연수)로 놓으면

$2^n - 1 = 2^{2a} - 1 = (2^a - 1)(2^a + 1)$

이때, 2^a은 3의 배수가 아니므로 앞, 위의 수인

$2^a - 1, 2^a + 1$의 둘

중 하나는 3의 배수이다. 따라서 $2^n - 1$은 3의 배수이다.

(ⅱ) n이 홀수일 때,

$2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$

$= (1+2) + (2^2 + 2^3) + \cdots + (2^{n-3} + 2^{n-2}) + 2^{n-1}$

이때, $1 + 2 = 3$, $2^2 + 2^3 = 3 \cdot 2^2, \cdots, 2^{n-3} + 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-3}$은 3의 배수이고, 2^{n-1}은 3의 배수가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 값을 3의 배수가 되도록 하는 n은 $2, 4, 6, 8, \cdots, 50$의 25개다.

1. 정답 ②	2. 정답 ③	3. 정답 ②
4. 정답 ②	5. 정답 ②	6. 정답 ⑤
7. 정답 ⑤	8. 정답 ④	9. 정답 ④
10. 정답 ②	11. 정답 ②	12. 정답 ⑤
13. 정답 ⑤	14. 정답 ②	15. 정답 ②
16. 정답 ④	17. 정답 23	18. 정답 ②
19. 정답 ①	20. 정답 ③	21. 정답 ①
22. 정답 ①	23. 정답 ②	24. 정답 ①
25. 정답 ⑤	26. 정답 ③	27. 정답 ①
28. 정답 ①	29. 정답 ①	30. 정답 ④
31. 정답 ③	32. 정답 36	33. 정답 10
34. 정답 683	35. 정답 127	36. 정답 10
37. 정답 ③	38. 정답 ②	39. 정답 ④
40. 정답 ②	41. 정답 ④	42. 정답 ③
43. 정답 ②	44. 정답 ④	45. 정답 ⑤
46. 정답 ④	47. 정답 ②	48. 정답 ③
49. 정답 ②	50. 정답 ④	51. 정답 ⑤
52. 정답 ⑤	53. 정답 ④	54. 정답 88
55. 정답 454	56. 정답 ③	57. 정답 ④
58. 정답 ③	59. 정답 ⑤	60. 정답 ③
61. 정답 ④	62. 정답 ⑤	63. 정답 ②
64. 정답 ②	65. 정답 ③	66. 정답 ⑤
67. 정답 ②	68. 정답 ①	69. 정답 ②
70. 정답 ④	71. 정답 ②	72. 정답 ④
73. 정답 47	74. 정답 ①	75. 정답 ③
76. 정답 ④	77. 정답 ③	78. 정답 ⑤
79. 정답 ④	80. 정답 ②	81. 정답 ①
82. 정답 ③	83. 정답 ②	84. 정답 ⑤
85. 정답 ②	86. 정답 62	87. 정답 83
88. 정답 ③	89. 정답 ②	90. 정답 ④
91. 정답 ①	92. 정답 ⑤	93. 정답 13
94. 정답 19	95. 정답 ①	96. 정답 ③
97. 정답 ③	98. 정답 ⑤	99. 정답 ③
100. 정답 ④	101. 정답 ②	102. 정답 ③
103. 정답 ①	104. 정답 ⑤	105. 정답 ⑤
106. 정답 ⑤	107. 정답 ①	108. 정답 ④
109. 정답 ③	110. 정답 ⑤	111. 정답 ④
112. 정답 ③	113. 정답 557	114. 정답 125
115. 정답 10	116. 정답 19	117. 정답 ③
118. 정답 ①	119. 정답 ⑤	120. 정답 60
121. 정답 10		

1. 정답 ②

[해설] 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

이때, 나온 눈의 수의 차가 4 이상인 경우는

(1, 5), (1, 6), (2, 6), (5, 1), (6, 1), (6, 2)

로 6가지이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이다.

2. 정답 ③

[해설] 두 눈의 차가 1이하인 경우는 두 눈의 차가 0 또는 1인 경우이다.

(ⅰ) 두 눈의 차가 0인 경우 : 같은 눈이 나오는 경우 이므로 6가지

(ⅱ) 두 눈의 차가 1인 경우 :

(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)

의 10가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6+10}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

3. 정답 ②

[해설] 11개의 원소 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_{11}C_2=\frac{11\times10}{2}=55$$

뽑힌 두 개의 원소가 연속하는 경우의 수는 (1, 2), (2, 3), (3, 4), $\cdots$, (10, 11)로 모두 10가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{10}{55}=\frac{2}{11}$$

4. 정답 ②

색깔이 다른 세 개의 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는 $3\times3\times3$

세 개의 주머니에 나온 구슬에 적힌 숫자가 다르게 나올 경우의 수는 (1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3), (5, 3, 1)로 6가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{6}{3^3}=\frac{2}{9}$$

Tip 어떤 시행에서 일어나는 모든 경우의 수가 N이고, 어느 경우도 같은 정도로 기대될 때, 그 중 사건 A가 일어나는 경우의 수를 a라고 하면 A가 일어날 확률 $P(A)$는

$$P(A)=\frac{a}{N}$$

5. 정답 ②

[해설] 동전을 6번 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 2^6가지이다.

이때, 앞면이 4번 연속으로 나오는 경우는

오른쪽 그림과 같이 3가지 경우로 나눌 수 있다

여기서 ○는 앞면, ×는 뒷면, △는 어느 쪽이든 상관없는 경우를 뜻한다. 각각의 경우의 수는

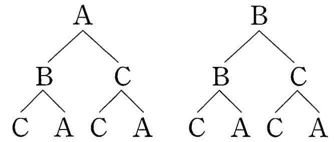
2^2가지, 2가지, 2가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{2^2+2+2}{2^6}=\frac{1}{8}$$

○○○○△△
×○○○○△
△×○○○○

6. 정답 ⑤

[해설] 수형도를 그려 첫 번째, 두 번째, 세 번째 카드에서 나올 수 있는 경우를 조사해 보자.



2장의 카드의 문자가 같게 나오는 경우는 6가지이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$이다.

7. 정답 ⑤

[해설] 3장의 카드를 던져서 나올 수 있는 경우는 $2^3=8$(가지)

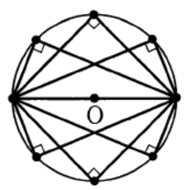
이때, 2장의 카드가 같은 문자인 경우는

(A, B, A), (A, C, A), (B, B, A), (B, B, C), (A, C, C), (B, C, C)

의 6가지이므로 갑이 이길 확률은 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$이다.

8. 정답 ④

[해설] 8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 방법은 모두 ${}_8C_3=56$(가지)이다. 이 중 직각삼각형인 경우는 빗변이 지름인 경우이고 한 개의 지름마다 6개의 직각삼각형이 존재한다.



지름의 양 끝점이 선택되는 경우가 4가지이므로 직각삼각형을 만들 수 있는 경우의 수는 $6\times4=24$(가지)이다.

$$\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

9. 정답 ④

[해설] $\frac{q}{p}$를 약분하였을 때, 분모의 소인수 중 2 또는 5가 아닌 수가 있으면 유한소수로 나타낼 수 없다.

두 주사위를 던져 나오는 36가지의 경우 중에서 유한소수로 나타낼 수 없는 경우는

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{6}$$

의 8가지이므로 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

10. 정답 ②

[해설] 두 개의 주사위를 던질 때 나오는 경우의 수는 36가지 이고, 이 중 $\frac{b}{a}$ 또는 $\frac{a}{b}$가 정수인 경우는 a가 b의 배수이거나 약수인 경우이다.

조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)는

(i) $a=b$일 때, $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$의 6가지이다.

(ii) $a \neq b$일 때

$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,6),(3,6)$인 경우와 그 순서가 바뀐 경우이므로

$8 \times 2 = 16$(가지)

따라서 $\frac{b}{a}$ 또는 $\frac{a}{b}$가 정수일 확률은

$$\frac{6+16}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

***11.* 정답 ②**

[해설] $x^2+y^2=4$는 중심이 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다. $(x-5)^2+y^2=a^2$은 중심이 $(5,\ 0)$이고 반지름의 길이가 a인 원이다. 두 원의 중심거리는 5이고 반지름의 길이의 합은 $2+a$이고, 반지름의 길이의 차는 $a-2$이다.

두 원이 두 점에서 만난다는 것은 $a-2<5<a+2$이므로

$3<a<7$ $\quad \therefore a=4,\ 5,\ 6$

즉, 주사위의 눈의 수의 합이 4, 5, 6일 때, 두 원은 두 점에서 만난다.

눈의 수의 합이 4일 경우 : $(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$

눈의 수의 합이 5일 경우 : $(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,1)$

눈의 수의 합이 6일 경우 : $(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,2),\ (5,\ 1)$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

***12.* 정답 ⑤**

[해설]

5 개의 공을 5 개의 상자에 하나씩 넣는 경우의 수는

$5!=120$ (가지)

상자에 적힌 번호와 공에 적힌 번호가 같은 것이 하나도 없는 경우는 다음과 같다.

(i) 1 번 공은 2 번 상자에, 2 번 공은 3 번 상자에,⋯ ,5 번 공은 1 번 상자에 넣는 것은 $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ 과 같이 표현하면 5명이 원순열을 이루는 경우와 같다.

$(5-1)!=24$ (가지)

(ii) 1 번 공은 2 번 상자에, 2 번 공은 1 번 상자에 넣고, 3 번 공은 4 번 상자에, ⋯ , 5 번 공은 3 번 상자에 넣는 것을

$1 \to 2 \to 1,\ 3 \to 4 \to 5 \to 3$ 과 같이 표현하면 5 개를 2개, 3 개로 나누고 각각을 원순열로 배열하는 경우와 같다.

${}_5C_2 \times {}_3C_3 \times (2-1)! \times (3-1)! = 20$ (가지)

(i),(ii)에서 상자에 적힌 번호와 공에 적힌 번호가 같은 것이 하나도 없는 경우의 수는

$24+20=44$ (가지)

따라서 구하는 확률은

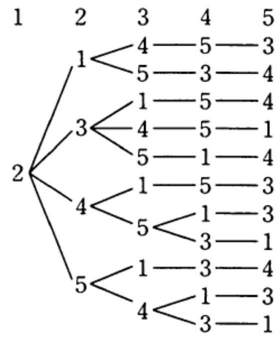
$$\frac{44}{122}=\frac{11}{30}$$

다른 풀이

5 개의 공을 5 개의 상자에 하나씩 넣는 경우의 수는

$5!=120$ (가지)

1 번 공을 2 번 상자에 넣을 때, 나머지 공이 모두 다른 번호의 상자 속에 넣는 경우는 오른쪽 수형도와 같이 11 가지가 있다.



1 번 공을 3 번 상자, 4 번 상자, 5 번 상자에 넣을 때, 나머지 공이 모두 다른 번호의 상자에 넣는 경우도 마찬가지로 11 가지씩 있다.

따라서 모든 공을 다름 번호의 상자에 넣는 경우의 수는

$4 \times 11 = 44$ (가지)이므로 구하는 확률은

$$\frac{44}{120}=\frac{11}{30}$$

***13.* 정답 ⑤**

[해설]

가격이 높은 것부터 1,2,3,4 라고 하면 가격이 서로 다른 4 개의 상품을 배열하는 방법은 1,2,3,4 를 일렬로 나열하는 것과 같이 $4!=24$ (가지)의 경우가 있다.

(i) A 전략으로 가장 높은 가격의 상품을 선택하는 경우는

$(1,2,3,4),\ (1,2,4,3),\ (1,3,2,4),\ (1,3,4,2),$
$(1,4,2,3),\ (1,4,3,2)$

(ii) B 전략으로 가장 높은 가격의 상품을 선택하는 경우는

$(2,1,3,4),\ (2,1,4,3),\ (3,1,2,4),\ (3,1,4,2)$
$(4,1,2,3),\ (4,1,3,2),\ (2,3,1,4),\ (2,4,1,3),$
$(3,4,1,2),\ (2,3,4,1),\ (2,4,3,1)$

(iii) C 전략으로 가장 높은 가격의 상품을 선택하는 경우는

$(2,3,1,4),\ (2,4,1,3),\ (3,2,1,4),\ (3,4,1,2),$
$(4,2,1,3),\ (4,3,1,2),\ (2,3,4,1),\ (2,4,3,1),$
$(3,2,4,1),\ (4,2,3,1)$

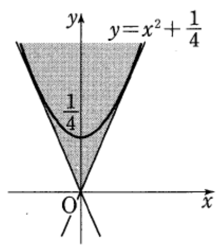
(i),(ii),(iii)에서

$$P(A)=\frac{6}{24},\ P(B)=\frac{11}{24},\ P(C)=\frac{10}{24}$$

$$\therefore P(A)<P(B)<P(C)$$

***14.* 정답 ②**

[해설] $m=\tan x^\circ$ 라 하면 기울기가 m이므로 직선의 방정식은 $y=mx$이다. (단, $x=90^\circ$ 인 경우 x축에 수직인 직선이 된다.)



이 직선과 이차함수 $y=x^2+\frac{1}{4}$의 그래프가 만나기 위해서는 방정식 $x^2+\frac{1}{4}=mx$가 실근을 가져야 한다.

$4x^2-4mx+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4m^2-4$$
$$=4(m+1)(m-1) \geq 0 \qquad \therefore m \leq -1 \text{ 또는 } m \geq 1$$

$\tan x^\circ \leq -1$ 또는 $\tan x^\circ \geq 1$에서

$45 \leq x \leq 135$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{135-44}{180}=\frac{91}{180}$$

15. 정답 ②

[해설]

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$의 중심 $C(2,1)$에 대하여

$\overline{CP}-1 \le \overline{PQ} \le \overline{CP}+1$이므로 $\overline{PQ}$의 최댓값은

$\overline{CP}+1=\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}+1$

즉, $\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}+1 \ge 5$에서

$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} \ge 4$

양변을 제곱하면 $(a-2)^2+(b-1)^2 \ge 16$

$a=1$ 또는 $a=3$ 일 때, $(b-1)^2 \ge 15$에서 $b=5,6$

$a=2$ 일 때, $(b-1)^2 \ge 16$에서 $b=5,6$

$a=4$ 일 때, $(b-1)^2 \ge 12$에서 $b=5,6$

$a=5$ 일 때, $(b-1)^2 \ge 7$에서 $b=4,5,6$

$a=6$ 일 때, $(b-1)^2 \ge 0$에서 $b=1,2,3,4,5,6$

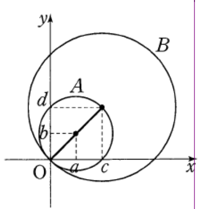
따라서 구하는 확률은

$\dfrac{4+2+2+3+6}{36}=\dfrac{17}{36}$

16. 정답 ④

[해설] 두 원 A, B는 모두 원점을 지나므로 원점 이외의 공유점을 가지지 않으려면 두 원이 내접하여야 한다.

즉, 두 원의 중심 $(a,b),(c,d)$가 원점을 지나는 직선 위에 존재 하여야 한다.



$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}=k$

(단, $a \ne c$, $b \ne d$, k는 상수)

이 조건을 만족시키는 두 순서쌍 $(a,b),(c,d)$의 개수는

(i) $k=1$일 때, $(1,1),(2,2),\cdots,(6,6)$ 중에서 서로 다른 2개를 택하여 배열하는 경우의 수이므로

$_6\mathrm{P}_2=30$(가지)

(ii) $k=2$일 때, $(1,2),(2,4),(3,6)$ 중에서 서로 다른 2개를 택하여 배열하는 경우의 수이므로

$_3\mathrm{P}_2=6$(가지)

(iii) $k=3$일 때, $(1,3),(2,6)$ 중에서 서로 다른 2개를 택하여 배열하는 경우의 수이므로

$_2\mathrm{P}_2=2$(가지)

(iv) $k=\dfrac{1}{2}$일 때, $(2,1),(4,2),(6,3)$ 중에서 서로 다른 2개를 택하여 배열하는 경우의 수이므로

$_3\mathrm{P}_2=6$(가지)

(v) $k=\dfrac{1}{3}$일 때, $(3,1),(6,2)$ 중에서 서로 다른 2개를 택하여 배열하는 경우의 수이므로

$_2\mathrm{P}_2=2$(가지)

(vi) $k=\dfrac{3}{2}$일 때, $(2,3),(4,6)$ 중에서 서로 다른 2개를 택하여 배열하는 경우의 수이므로

$_2\mathrm{P}_2=2$(가지)

(vii) $k=\dfrac{2}{3}$일 때, $(3,2),(6,4)$ 중에서 서로 다른 2개를 택하여 배열하는 경우의 수이므로

$_2\mathrm{P}_2=2$(가지)

(i)~(vii)에서 두 순서쌍 $(a,b),(c,d)$의 개수는

$30+2(6+2+2)=50$(개)

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{50}{6^4}=\dfrac{25}{648}$

17. 정답 23

[해설]

$i^m \cdot (-i)^n=(-i)^n \cdot i^{m+n}$이므로

$i^m \cdot (-i)^n$의 값이 1 되는 경우는

n 이 짝수이고 $m+n=4,8,12$

또는 n 이 홀수이고 $m+n=2,6,10$ 인 경우이다.

(i) n 이 짝수이고 $m+n=4,8,12$ 인 경우는

$(2,2),(2,6),(4,4),(6,2),(6,6)$의 5 가지

(ii) n 이 홀수이고 $m+n=2,6,10$ 인 경우는

$(1,1),(1,5),(3,3),(5,1),(5,5)$의 5 가지

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{5+5}{36}=\dfrac{5}{18}$ 이므로

$p+q=18+5=23$

18. 정답 ②

[해설]

맨 앞자리는 0 이 아니어야 하므로 나열할 수 있는 5 자리 자연수 전체의 개수는 $4\times 4!=96$ (개)

이고, 구하는 수가 짝수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 일의 자리의 수가 0 일 때, $4!=24$ (개)

(ii) 일의 자리의 수가 2 일 때, $3\times 3!=18$ (개)

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{24+18}{96}=\dfrac{42}{96}=\dfrac{7}{16}$

19. 정답 ①

[해설] 6칸에 6개의 수를 배열하는 방법의 수는 $6!$

1, 2, 4, 6, 8, 9를 합이 같은 두 개의 묶음으로 나누려면 총합이 30이므로 각 묶음의 합이 15이어야 한다. 이러한 경우는 (1, 6, 8), (2, 4, 9)의 1가지뿐이고 (1, 6, 8)을 배열하는 경우의 수는 $3!$, (2, 4, 9)를 배열하는 경우의 수는 $3!$

이때, 윗줄과 아랫줄을 바꾸는 방법이 있으므로 합이 같은 두 개의 묶음으로 나누어지는 경우의 수는 $3!\times 3!\times 2=72$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{72}{6!}=\dfrac{1}{10}$

20. 정답 ③

[해설] 눈의 합이 6인 경우는 $(1,1,4),(1,2,3),(2,2,2)$의 3가지가 있고 순서가 바뀌는 경우의 수는

$(1,1,4)\rightarrow \dfrac{3!}{2!}=3$(가지)

$(1,2,3)\rightarrow 3!=6$(가지)

$(2,2,2)\rightarrow 1$(가지)

주사위 3개를 던질 때 나오는 경우는 모두 6^3이므로 구하는 확률은

$$\frac{3+6+1}{6^3}=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$$

21. 정답 ①

[해설]

7개의 문자 M, O, R, N, I, N, G를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $\frac{7!}{2!}$(가지)이고, 양 끝에 같은 문자가 오는 것은 양끝의 문자가 N인 경우의 수 $5!$(가지)이므로 구하는 확률은

$$\frac{5!}{\frac{7!}{2!}}=\frac{1}{21}$$

22. 정답 ①

[해설]

$1,1,1,1,2,3,3$ 을 임의로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!2!}=105$ (가지)

2 와 3 이 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우는 다음과 같다.

(i) 21□□□□□ 의 경우

$1,1,1,3,3,$ 을 5 개의 □에 넣는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!}=10$ (가지)

(ii) □□□□□12의 경우

$1,1,1,3,3,$ 을 5 개의 □에 넣는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!}=10$ (가지)

(iii) $\boxed{121}$, 1, 1, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$ (가지)

(i),(ii),(iii)에서 2 와 3 이 이웃하지 않도록 나열하는 모든 경우의 수는

$10+10+30=50$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{50}{105}=\frac{10}{21}$$

23. 정답 ②

[해설] 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 경우는

(짝, 짝, 홀, 홀)이 배열되는 경우 : $\frac{4!}{2!2!}=6$(가지)

이때, 점 $A(-1)$을 들러 왔을 경우는

(홀, ×, ×, ×) : $\frac{3!}{2!}=3$(가지),

(짝, 홀, 홀, 짝) : 1가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{3+1}{6}=\frac{2}{3}$

24. 정답 ①

[해설]

전체 6 개의 공이 들어 있는 주머니에서 3 개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_3=20$ (가지)

꺼낸 3 개의 공의 색깔이 모두 다른 경우는 흰 공 2 개 중에서 1 개, 노란 공 2 개 중에서 1 개, 파란 공 2 개 중에서 1 개를 꺼낸 경우이므로 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1=8$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

다른 풀이

공을 순서대로 꺼낸다고 생각해도 확률은 변하지 않는다.

3 개의 공의 색이 모두 다르려면 첫 번째는 어떤 공을 꺼내도 되고, 두 번째는 첫 번째와 두 번째에 꺼낸 두 개의 공과 다른 색깔의 공을 꺼내야 한다.

따라서 공의 색깔이 모두 다를 확률은

$$1\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$$

25. 정답 ⑤

[해설] 8개의 바둑돌 중 4개를 꺼냈을 때

흰 바둑돌이 3개, 검은 바둑돌이 1개 나올 확률 : $\frac{{}_4C_3\times{}_4C_1}{{}_8C_4}$

흰 바둑돌이 4개, 검은 바둑돌이 0개 나올 확률 : $\frac{{}_4C_4}{{}_8C_4}$

흰 바둑돌이 0개, 검은 바둑돌이 4개 나올 확률 : $\frac{{}_4C_4}{{}_8C_4}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_4C_3\times{}_4C_1+{}_4C_4+{}_4C_4}{{}_8C_4}=\frac{9}{35}$

26. 정답 ③

[해설] 선택된 3개의 열쇠 중에서 자물쇠 A를 열 수 있는 열쇠의 개수를 a, 자물쇠 B를 열 수 있는 열쇠의 개수를 b라 하면

(i) $a=2,\ b=1$인 경우 ${}_5C_2\times{}_3C_1=30$(가지)

(ii) $a=1,\ b=2$인 경우 ${}_5C_1\times{}_3C_2=15$(가지)

따라서 자물쇠 A와 자물쇠 B는 모두 열리고 자물쇠 C는 열리지 않는 경우의 수는 45가지이고 전체 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$(가지)이므로 구하는 확률은 $\frac{45}{120}=\frac{3}{8}$

27. 정답 ①

[해설] 10개의 동전 중에서 5개의 동전을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_5=252$ (가지)

이때, 금액의 합이 400원 이상인 경우는

100원짜리 동전 4개, 50원짜리 또는 10원짜리 동전 1개 :

${}_4C_4\cdot{}_6C_1=6$

100원짜리 동전 3개, 50원짜리 동전 2개 : ${}_4C_3\cdot{}_4C_2=24$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6+24}{252}=\frac{30}{252}=\frac{5}{42}$$

28. 정답 ①

[해설] 5회째 검사에서 검사가 끝나는 경우는 4회째까지 불량품이 2개 나오고 5회째에 3번째 불량품이 나오는 경우이다.

4회째까지 불량품이 2개 나올 확률은 $\dfrac{{}_3C_2 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_4} = \dfrac{3}{10}$이고, 5회째에 나머지 한 개의 불량품을 뽑을 확률은 $\dfrac{1}{6}$이므로 구하는 확률은

$$\frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{20}$$

29. 정답 ①

[해설]

함수 f 의 개수는 6^5(개)

$f(2) < f(3) < f(4)$를 만족하는 f 는 집합 A 의 원소 2,3,4 에 집합 B 의 원소 중 서로 다른 3 개를 뽑아 작은 수부터 차례로 대응시키고 집합 A 의 원소 중 1,5 는 집합 B 의 임의의 원소에 대응시키면 되므로

$${}_6C_3 \times 6 \times 6 = 720 \text{ (개)}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{720}{6^5} = \frac{5}{54}$$

30. 정답 ④

[해설]

(ⅰ) 첫 번째 꺼낸 공이 2개 모두 흰 공인 경우

두 번째 공을 꺼낼 때 주머니 속에 흰 공 6개, 검은 공 3개가 있으므로 두 번째 꺼낸 공이 2개 모두 흰 색일 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2} \times \frac{{}_6C_2}{{}_9C_2} = \frac{5}{42}$$

(ⅱ) 첫 번째 꺼낸 공이 1개는 흰 공, 1개는 검은 공인 경우

두 번째 공을 꺼낼 때 주머니 속에 흰 공 5개, 검은 공 4개가 있으므로 두 번째 꺼낸 공이 2개 모두 흰 색일 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_3C_1}{{}_7C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{10}{63}$$

(ⅲ) 첫 번째 꺼낸 공이 2개 모두 검은 공인 경우

두 번째 공을 꺼낼 때 주머니 속에 흰 공 4개, 검은 공 5개가 있으므로 두 번째 꺼낸 공이 2개 모두 흰 색일 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2} \times \frac{4C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{42}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5}{42} + \frac{10}{63} + \frac{1}{42} = \frac{15+20+3}{126} = \frac{19}{63}$$

31. 정답 ③

[해설]

10 장의 카드 중에서 세 장의 카드를 뽑는 방법의 수는

$${}_{10}C_3 = 120 \text{ (가지)}$$

세 장의 카드에 적힌 수가 등차수열을 이룰 때, 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$a \geq 1,\ d \geq 1,\ a + 2d \leq 10$ 을 만족한다.

$d=1$ 일 때, $a = 1,2,3,\ \cdots\ ,8$ 의 8 가지

$d=2$ 일 때, $a = 1,2,3,\ \cdots\ ,6$ 의 6 가지

$d=3$ 일 때, $a = 1,2,3,4$ 의 4 가지

$d=4$ 일 때, $a = 1,2$ 의 2 가지

그러므로 등차수열이 되는 경우의 수는

$$8+6+4+2 = 20 \text{ (가지)}$$

따라서 등차수열이 될 확률은

$$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

32. 정답 36

[해설] 1부터 30까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 택하는 경우의 수는 ${}_{30}C_2 = 435$(가지)이다.

한편, 1부터 30까지의 자연수를 4로 나누었을 때 나머지가 k인 수의 집합을 $N_k\ (k = 0, 1, 2, 3)$라 하면

$N_1 = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29\}$

$N_2 = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30\}$

$N_3 = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$

$N_0 = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$

이때, 서로 다른 두 수의 합이 4의 배수가 되는 경우는 다음의 세 가지 경우이다.

(ⅰ) N_1에서 1개, N_3에서 1개의 수를 택하는 경우

$${}_8C_1 \times {}_7C_1 = 56 \text{(가지)}$$

(ⅱ) N_2에서 2개의 수를 택하는 경우

$${}_8C_2 = 28 \text{(가지)}$$

(ⅲ) N_0에서 2개의 수를 택하는 경우

$${}_7C_2 = 21 \text{(가지)}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 두 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$$56 + 28 + 21 = 105 \text{(가지)}$$

따라서 두 수의 합이 4의 배수가 될 확률은

$$\frac{105}{435} = \frac{7}{29}$$

$$\therefore p + q = 7 + 29 = 36$$

33. 정답 10

[해설]

주어진 조건에 따라 식을 세우면

$$\frac{{}_nC_2}{{}_{n+5}C_2} = \frac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{(n+5)(n+4)}{2}} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)} = \frac{3}{7}$$

$$3(n^2 + 9n + 20) = 7(n^2 - n)$$

$$2n^2 - 17n - 30 = 0,\ (2n+3)(n-10) = 0$$

n은 2이상의 정수이므로 $n = 10$

34. 정답 683

[해설]

한 개의 주사위를 4번 던져 나오는 눈의 모든 경우의 수는 $6^4 = 1296$(가지)이므로 부등식 $a < b \leq c \leq d$가 성립하는 경우는 다음 네 가지로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $a < b < c < d$인 경우

1부터 6까지의 6개의 정수 중에서 4개를 뽑아 크기 순으로 배열하

면 되므로 ${}_6C_4 = \dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 15$(가지)

(ii) $a < b < c = d$인 경우

1부터 6까지의 6개의 정수 중에서 3개를 뽑아 크기 순으로 배열하면 되므로 ${}_6C_3 = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$(가지)

(iii) $a < b = c < d$인 경우

1부터 6까지의 6개의 정수 중에서 3개를 뽑아 크기 순으로 배열하면 되므로 ${}_6C_3 = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$(가지)

(iv) $a < b = c = d$인 경우

1부터 6까지의 6개의 정수 중에서 2개를 뽑아 크기 순으로 배열하면 되므로 ${}_6C_2 = \dfrac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15$(가지)

(i)~(iv)에서 $a < b \le c \le d$가 성립하는 경우의 수는

$15 + 20 + 20 + 15 = 70$(가지)

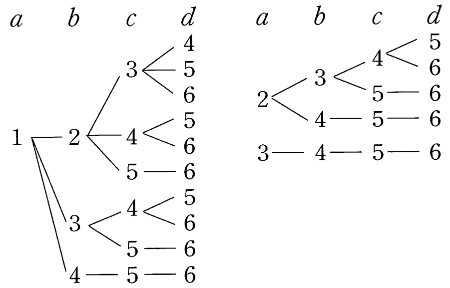
따라서 구하는 확률은

$\dfrac{70}{1296} = \dfrac{35}{648}$

$\therefore p + q = 648 + 35 = 683$

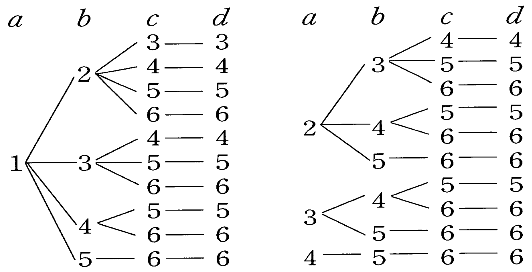
다른 풀이

(i) $a < b < c < d$인 경우



$\therefore 15$(가지)

(ii) $a < b < c = d$인 경우



$\therefore 20$(가지)

같은 방법으로 수형도를 이용하면

(iii) $a < b = c < d$ 인 경우: 20(가지)

(iv) $a < b = c = d$ 인 경우: 15(가지)

(i)~(iv)에서 $a < b \le c \le d$가 성립하는 경우의 수는

$15 + 20 + 20 + 15 = 70$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{70}{1296} = \dfrac{35}{648}$

$\therefore p + q = 648 + 35 = 683$

35. 정답 127

[해설] 20장의 카드에 적힌 수를 모두 더하면 $\dfrac{20\cdot21}{2} = 210$이다.

이는 3의 배수이므로 선택한 17장의 카드의 수의 합이 3의 배수가 되려면 남은 3장의 카드의 수의 합도 3의 배수가 되어야 한다.

1부터 20까지의 자연수 중에서 3으로 나눈 나머지가 $r\,(r = 0, 1, 2)$인 수의 집합을 A_r라 하면 $n(A_0) = 6$, $n(A_1) = n(A_2) = 7$

3장의 카드의 수의 합이 3의 배수가 되려면 3개의 수 모두 같은 집합에 있거나 또는 모두 다른 집합에 있어야 한다. 따라서 그 확률은

$\dfrac{{}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_7C_3 + {}_6C_1\cdot{}_7C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{20}C_3} = \dfrac{20 + 35 + 35 + 6\cdot7\cdot7}{1140} = \dfrac{32}{95}$

$\therefore p + q = 95 + 32 = 127$

36. 정답 10

[해설]

집합 A의 부분집합의 개수는 $2^4 = 16$(개)이므로 서로 다른 두 집합을 택하는 모든 경우의 수는

${}_{16}C_2 = 120$(가지)

(i) 선택된 두 집합 중 한 집합이 공집합인 경우

나머지 집합은 집합 A의 부분집합 중 공집합을 제외한 집합이므로 그 경우의 수는

$2^4 - 1 = 15$(가지)

(ii) 선택된 두 집합의 원소가 각각 1개씩인 경우

4개에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_4C_2 = 6$(가지)

(iii) 선택된 두 집합의 원소가 1개, 2개인 경우

선택된 두 집합 중 한 집합의 원소가 1개인 집합은 4개이고 그 각각에 대하여 서로소인 집합의 개수는 ${}_3C_2$이므로 그 경우의 수는

$4 \times {}_3C_2 = 12$(가지)

(iv) 선택된 두 집합의 원소가 1개, 3개인 경우

$4 \times {}_3C_3 = 4$(가지)

(v) 선택된 두 집합의 원소가 각각 2개씩인 경우

${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \dfrac{1}{2!} = 3$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{15 + 6 + 12 + 4 + 3}{120} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore m^2 + n^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

37. 정답 ③

[해설]

6명을 2명, 2명, 2명으로 조를 편성하는 방법의 수는

${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \dfrac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \dfrac{1}{6} = 15$(가지)

A, B가 같은 조에 편성되고, C, D가 서로 다른 조에 편성하려면 E, F를 각각 C, D와 짝을 이루도록 해야 하므로 그 방법의 수는 $2! = 2$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{2}{15}$이다.

38. 정답 ②

[해설] 12명을 4명씩 3개 팀으로 나누는 모든 경우의 수는

$_{12}C_4 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{3!}$

A, B, C, D가 한 팀으로 되는 경우의 수는

$_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{_{12}C_4} \times 3 = \frac{1}{165}$

39. 정답 ④

[해설] 수정이와 승민이가 도착한 시각(분)을 각각 x, y라 하면

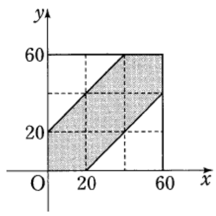
$0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$

이고 두 사람이 만나기 위해서는

$|x-y| \le 20$

이어야 한다.

이를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 어두운 부분이다.



따라서 두 사람이 만나는 사건 A의 확률 $P(A)$는

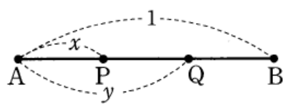
$$P(A) = \frac{(\text{어두운 영역의 넓이})}{(\text{전체 영역의 넓이})}$$

$$= \frac{5 \times 20^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

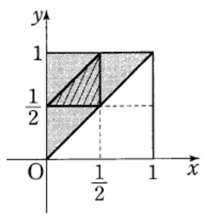
40. 정답 ②

[해설] 길이가 1인 선분 AB 위의 두 점을 차례로 P, Q라 하고, $\overline{\mathrm{AP}} = x$, $\overline{\mathrm{AQ}} = y$라 하자.

그러면 $0 < x < y < 1$ ...... ㉠ 이고 이를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



또, ㉠을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림의 어두운 부분이다.



이때, 세 선분의 길이는 $\overline{\mathrm{AP}} = x$, $\overline{\mathrm{PQ}} = y - x$, $\overline{\mathrm{QB}} = 1 - y$이다.

이 세 선분이 삼각형의 세 변이 되려면

$$\begin{cases} x < (y-x) + (1-y) \\ y - x < x + (1-y) \\ 1 - y < x + (y-x) \end{cases}$$

이고 ㉠으로부터 $x < \frac{1}{2}$, $y < x + \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$ ...... ㉡을 동시에 만족시켜야 한다. ㉡을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림의 빗금친 부분이다.

따라서 구하는 확률은 $p = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

41. 정답 ④

[해설] 한 개의 주사위를 던질 때, 2의 배수가 나오는 경우는 2, 4, 6으로 3가지이고 3의 배수가 나오는 경우는 3, 6으로 2가지이다.

따라서 2의 배수가 나오는 사건을 A, 3의 배수가 나오는 사건을 B라고 하면 구하는 확률은

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

42. 정답 ③

A가 자신의 교과를 선택하는 사건을 A, B가 자신의 교과서를 선택하는 사건을 B라고 하면 5명의 학생들이 교과서를 선택하는 모든 경우의 수는 $5!$이므로

$P(A) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$

이때, A와 B가 동시에 자신의 교과서를 선택하는 경우의 수가 $3!$이므로

$P(A \cap B) = \frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은 $P(A \cup B)$이므로

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{7}{20}$

Tip 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 B가 일어날 확률은

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

세 사건 A, B, C에 대하여 사건 A 또는 B 또는 C가 일어날 확률은

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$- P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

43. 정답 ②

[해설] 면접시험에 합격할 사건을 A, 인성검사에 합격할 사건을 B라고 하면

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{2}{3} = \frac{13}{30}$

44. 정답 ④

[해설] $f(1) = 1$인 함수일 사건을 A, $f(2) = 2$인 함수일 사건을 B라고 하면 일대일 함수의 총 개수는 $5! = 120$(개)이므로

$P(A) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$

이때, $f(1) = 1$이고 $f(2) = 2$인 경우는 $3!$가지이므로

$P(A \cap B) = \frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은 $P(A \cup B)$이므로

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{7}{20}$

45. 정답 ⑤

[해설]

뽑힌 사람이 남자일 사건을 A, 40 세 이상일 사건을 B 라 하면

$P(A)=\frac{200}{500}=\frac{2}{5},\ P(B)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

$P(A\cap B)=\frac{2}{5}\times\frac{40}{100}=\frac{4}{25}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{4}{25}=\frac{37}{50}$

46. 정답 ④

[해설] 표본공간을 S, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 4의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$n(S)=100$, $n(A)=33$, $n(B)=25$

또, $A\cap B$는 12의 배수의 눈이 나오는 사건이므로

$n(A\cap B)=8$

따라서

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=33+25-8=50$

이고

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(S)-n(A\cup B)$

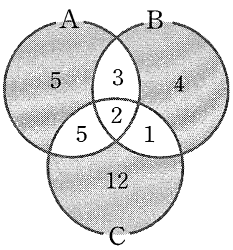
$=100-50=50$

이므로 구하는 확률은

$P(A^C\cap B^C)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

47. 정답 ②

[해설] A, B, C 세 은행에 대하여 각 가정에서 가지고 있는 통장의 실태를 오른쪽 벤 다이어그램에서와 같이 생각하자. 따라서 뽑힌 한 가정이 세 은행 중 한 은행의 통장만 가지고 있을 확률은



$\frac{5}{100}+\frac{4}{100}+\frac{12}{100}=\frac{21}{100}$

48. 정답 ③

[해설] 9개의 제품 중에서 2개를 택하는 모든 경우의 수는 ${}_9C_2$이고

2개 모두 불량품이 아닐 확률은 $\frac{{}_6C_2}{{}_9C_2}=\frac{\frac{6\times5}{2}}{\frac{9\times8}{2}}=\frac{5}{12}$이므로

적어도 1개가 불량품이 확률은 $1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$이다.

49. 정답 ②

[해설]

적어도 1 개의 불량품이 나올 확률이 $\frac{9}{20}$ 이므로

$1-\frac{{}_{16-n}C_2}{{}_{16}C_2}=\frac{9}{20},\ \frac{{}_{16-n}C_2}{{}_{16}C_2}=\frac{11}{20}$

$\frac{(16-n)(15-n)}{16\times15}=\frac{11}{20}$

$(16-n)(15-n)=\frac{11}{20}\times16\times15=12\times11$

$\therefore n=4$

50. 정답 ④

[해설] 적어도 한 사람이 합격할 확률은

$1-$(모두 합격하지 못할 확률)이므로

$1-\left(1-\frac{2}{5}\right)(1-p)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{10}$

$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times(1-p)=\frac{1}{10},\ 1-p=\frac{1}{4}$

$\therefore p=\frac{3}{4}$

51. 정답 ⑤

[해설] 10개의 양말 중에서 4개를 뽑는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_4=210$(가지)

4개의 모두 다른 짝을 뽑는 경우는 먼저 5종류의 양말 중 4종류를 고르고

그 중 한 개씩 뽑는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_4\times2\times2\times2\times2=80$(가지)

따라서 4개 모두 다른 짝을 뽑을 확률은

$\frac{80}{210}=\frac{8}{21}$

구하는 확률은 그 여사건의 확률이므로

$1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$

52. 정답 ⑤

[해설] 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리 정수의 개수는 $4\times5\times5\times5=500$(개)이고, 각 자리의 숫자가 모두 다른 네 자리 정수의 개수는 $4\times4\times3\times2=96$(개)이므로 구하는 확률은

$1-\frac{96}{100}=\frac{404}{500}=\frac{101}{125}$

53. 정답 ④

[해설]

영미가 10 개의 인형 중에서 3 개의 인형을 고르는 모든 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$ (가지)

영미가 고른 3 개의 인형 중에서 적어도 1 개의 곰인형이 있는 사건의 여사건은 3 개가 모두 강아지인형인 사건이고, 적어도 1 개의 큰 인형이 있는 사건의 여사건은 3 개가 모두 작은 인형인 사건이다.

3 개가 모두 강아지인형인 사건을 A , 3 개가 모두 작은 인형인 사건을 B 라고 하자.

(i) A 는 강아지 인형5 개 중에서 3 개를 고른 경우이므로 A 가 일어나 는 경우의 수는

${}_5C_3=10$ (가지)

(ii) B 는 작은 인형 6 개 중에서 3 개를 고른 경우이므로 B 가 일어나는 경우의 수는

${}_6C_3=20$ (가지)

(iii) $A\cap B$ 는 작은 강아지인형 4 개 중에서 3 개를 고른 경우이므로 $A\cap B$ 가 일어나는 경우의 수는

${}_4C_3=4$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A^c \cap B^c) &= P((A\cup B)^c) = 1-(A\cup B)\\ &= 1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}\\ &= 1-\left(\frac{10}{120}+\frac{20}{120}-\frac{4}{120}\right)\\ &= \frac{47}{60}\end{aligned}$$

54. 정답 88

[해설]

지호가 쏜 화살이 두 번 모두 실패할 확률은

$0.4\times0.3=0.12$

이므로 적어도 한 번은 명중할 확률은 $1-0.12=0.88$

즉, $p=0.88$ 이므로

$100p=88$

55. 정답 454

[해설] 길이가 5인 단어의 개수는 3^5이다. x가 적어도 1개 이상 포함될 사건은 x가 한 개도 포함되지 않은 사건의 여사건이므로 여사건의 확률을 이용한다.

x가 한 개도 포함되지 않는 것은 y, z만을 중복한 것이므로

2^5(가지)

따라서 x가 한 개도 포함되지 않을 확률은 $\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{243}$이므로

x가 적어도 1개 이상 포함될 확률은

$1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$

$\therefore p+q=243+211=454$

56. 정답 ③

[해설] 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 최솟값이 2이상인

경우는 2, 3, 4, 5, 6만 나오는 경우이므로 그 경우이므로 그 경우의 수는 5^3(가지)이다. 또, 최솟값이 3 이상인 경우는 3, 4, 5, 6만 나오는 경우이므로 그 경우의 수는 4^3(가지)이다.

따라서 최솟값이 2인 경우는 최솟값이 2이상인 경우에서 최솟값이 3이상인 경우를 빼면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{5^3-4^3}{6^3}=\frac{61}{216}$$

57. 정답 ④

[해설] $2^3\times2^{10}=2^{13}$이므로 A가 이기거나 비기는 사건의 여사건, 즉 B가 이기는 사건을 생각하면 지수가1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 두 수의 합이 13보다 커지는 경우이므로 다음과 같이 6가지이다.

$9+5=14$, $9+6=15$, $9+7=16$, $9+8=17$,

$8+6=14$, $8+7=15$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{6}{{}_8C_2}=1-\frac{3}{14}=\frac{11}{14}$$

58. 정답 ③

[해설] $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{3}{5}$에서

$P(A\cap B)=\frac{3}{5}P(A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$

$$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{25}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{5}$$

59. 정답 ⑤

[해설] $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{2}$

$P(A)=2P(A\cap B)=\frac{2\times1}{9}=\frac{2}{9}$

$\therefore P(A^C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

60. 정답 ③

[해설] $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=0.2$ 이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=0.8$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$0.8=0.5+0.6-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.3$

따라서 구하는 확률 $\mathrm{P}(B|A)$는

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.5}=\frac{3}{5}$

61. 정답 ④

[해설] $P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{5}$이므로

$P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

$$\therefore P(A^C|B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{15}}{\frac{1}{2}}=\frac{11}{15}$$

62. 정답 ⑤

[해설]

$P(A)=1-P(A^c)=\frac{3}{4}$ 이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{P(B)}=\frac{2}{3}$$ 이므로

$P(B)=\frac{3}{8}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$

63. 정답 ②

[해설]

ㄱ. $P(A|B)=P(B|A)$이므로

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 에서

$P(A\cap B)=0$인 경우는 $P(A)$, $P(B)$가 같지 않더라도 위의 식이 성립한다.(거짓)

ㄴ. $A^c\cup B=S$ 에서 $A\subset B$ 이므로 $(A\cap C)=(B\cap C)$

$\therefore \frac{P(A\cap C)}{P(C)}\le\frac{P(B\cap C)}{P(C)}$

$\therefore P(A|C)\le P(B|C)$ (참)

ㄷ. [반례] 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 홀수의 눈이 나오는 사건을 A , 5 이상의 눈이 나오는 사건을 B 짝수의 눈이 나오는 사건을 C 라 하면

$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{3},\ P(C)=\frac{1}{2}$

에서 $P(A\cap C)=0,\ P(B\cap C)=\frac{1}{6}$ 이므로

$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=0$

$P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

이때, $P(A|C)\le P(B|C)$ 이지만

$P(A)>P(B)$(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ 이다.

64. 정답 ②

[해설] $A_2=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $A_4=\{4,\ 8\}$이므로

$P(A_4|A_2)=\frac{P(A_4\cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}}=\frac{2}{5}$

65. 정답 ③

인문사회과정의 학생이 뽑히는 사건을 A, 자연과학과정의 학생이 뽑히는 사건을 B, 확률과 통계 과목을 선택한 학생이 뽑히는 사건을 C라 하면

$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$이고,

$P(C|A)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$, $P(C|B)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$이므로

따라서 구하는 확률은 $P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{25}}{\frac{4}{25}}=\frac{1}{4}$

Tip 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A\cap B^C)}$

66. 정답 ⑤

[해설] 두 주사위를 던져 나온 눈의 수의 최솟값이 3인 사건을 A, 두 눈의 합이 7보다 큰 사건을 B라 하자.

사건 A가 일어나는 경우의 수는 나오는 눈이 3 두 개인 경우와 3 하나와 4, 5, 6 중 하나인 경우이므로 순서를 고려하면

$1+{}_3C_1\times 2!=7$(가지) $\quad\therefore P(A)=\frac{7}{36}$

사건 A가 일어났을 때 두 눈의 합이 7보다 큰 경우는

$(3,5),(3,6),(5,3),(6,3)$

의 4가지이므로 $P(A\cap B)=\frac{4}{36}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{7}{36}}=\frac{4}{7}$

67. 정답 ②

[해설] 행렬 M의 역행렬 M^{-1}이 존재하려면 $a-2b\neq 0$이다.

이때, $a-2b=0$이 성립하는 순서쌍 (a,b)는 $(2,1),(4,2),(6,3)$의 3가지 이다.

따라서 $a-2b\neq 0$일 때 $M^{-1}=\frac{1}{a-2b}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -b & a\end{pmatrix}$의 모든 성분이 정수이기 위해서는 $a-2b=\pm 1$이어야 한다.

이를 만족시키는 순서쌍 (a,b)는 $(1,1),(3,1),(3,2),(5,2),(5,3)$의 5가지이다.

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{33}{36}}=\frac{5}{33}$

68. 정답 ①

[해설] 갑, 을 모두 당첨 제비를 뽑을 확률은 $\frac{3}{15}\times\frac{2}{14}=\frac{1}{35}$

69. 정답 ②

[해설] 4명의 남학생과 3명의 여학생으로 이루어진 모임에서 처음 한 명을 임의로 뽑을 때 남학생이 뽑히는 경우와 여학생이 뽑히는 경우를 나누어서 생각한다.

(ⅰ) 처음에 남학생이 뽑히고 두 번째 여학생이 뽑힐 확률은

$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$

(ⅱ) 처음에 여학생이 뽑히고 두 번째 여학생이 뽑힐 확률은

$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

70. 정답 ④

[해설] 동전 2개를 던질 때 나오는 앞면의 개수가 2, 1, 0일 확률은 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이다.

(ⅰ) 앞면의 개수가 2일 때 : 상자에 검은 공 $3+2=5$(개), 흰 공 2개가 들어 있으므로 구하는 확률은 $\frac{1}{4}\times\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{5}{42}$

(ⅱ) 앞면의 개수가 1일 때 : 상자에 검은 공 $3+1=4$(개), 흰 공 $2+1=3$(개)가 들어 있으므로 구하는 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$

(ⅲ) 앞면의 개수가 0일 때 : 상자에 검은 공 3개, 흰 공 $2+2=4$(개)가 들어 있으므로 구하는 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{28}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 $\frac{5}{42}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}=\frac{25}{84}$

71. 정답 ②

[해설]

(ⅰ) 상자 A에서 파란 구슬 2개를 꺼낸 경우

상자 B에는 파란 구슬 5개, 빨간 구슬 3개가 들어 있게 된다.
따라서 상자 B에서 빨간 구슬을 꺼낼 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{224}$

(ⅱ) 상자 A에서 파란 구슬 1개, 빨간 구슬 1개를 꺼낸 경우

상자 B에는 파란 구슬 4개, 빨간 구슬 4개가 들어 있게 된다.
따라서 상자 B에서 빨간 구슬을 꺼낼 확률은

$\frac{{}_3C_1\times{}_5C_1}{{}_8C_2}\times\frac{4}{8}=\frac{60}{224}$

(ⅲ) 상자 A에서 빨간 구슬 2개를 꺼낸 경우

상자 B에는 파란 구슬 3개, 빨간 구슬 5개가 들어 있게 된다.
따라서 상자 B에서 빨간 구슬을 꺼낼 확률은

$\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}\times\frac{5}{8}=\frac{50}{224}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{9}{224}+\frac{60}{224}+\frac{50}{224}=\frac{119}{224}=\frac{17}{32}$

72. 정답 ④

(ⅰ) 처음 꺼낸 공이 모두 노란 공인 경우, 꺼낸 노란 공을 흰색으로 칠하여 넣으면 주머니 안에는 노란 공 2개와 흰 공 8개가 들어 있게 된다. 따라서 두 번째 흰 공이 나올 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_8C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{8}{75}$

(ⅱ) 처음 꺼낸 공이 모두 흰 공인 경우, 꺼낸 흰 공을 노란색으로 칠하여 넣으면 주머니 안에는 노란 공 6개와 흰 공 4개가 들어 있게 된다. 따라서 두 번째 흰 공이 나올 확률은 $\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_4C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{2}{15}$

(ⅲ) 처음 꺼낸 공이 노란 공 1개와 흰 공 1개인 경우에 두 번째 흰 공이 나올 확률은 $\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_6C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{8}{25}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{75}+\frac{2}{15}+\frac{8}{25}=\frac{14}{25}$

Tip 두 사건 A, B에 대하여 두 사건이 동시에 일어날 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$

73. 정답 47

[해설] 15개의 수 중에서 제 5행에 15가 들어 있을 확률은 $\frac{5}{15}$이다. 15와 그 밖의 4개의 수를 제외한 10개의 수 중에서 제 4행에 가장 큰 수가 들어 있을 확률은 $\frac{4}{10}$이다. 같은 방법으로 나머지 6개의 수 중에서 가장 큰 수가 제3행에 들어 있을 확률은 $\frac{3}{6}$이다.

a_1
a_2 a_3
a_4 a_5 a_6
a_7 a_8 a_9 a_{10}
a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15}

또 나머지 3개의 수 중에서 가장 큰 수가 제2행에 들어 있을 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 마지막으로 남은 한 개의 수는 제1행에 놓인다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{15}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{1}=\frac{2}{45}$

$\therefore p+q=45+2=47$

74. 정답 ①

[해설]

'여행' 이라는 단어를 포함하는 사건을 A, 광고일 사건을 B라고 하자.

(ⅰ) '여행'이라는 단어를 포함하고, 광고일 확률은

$P(A\cap B)=0.1\times0.5=0.05$

(ⅱ) '여행'이라는 단어를 포함하지 않고, 광고일 확률은

$P(A^c\cap B)=0.9\times0.2=0.18$

$\therefore P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$

$=0.05+0.18=0.23$

따라서 구하는 확률은

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.05}{0.23}=\frac{5}{23}$

75. 정답 ③

[해설] 수학능력시험에 응시한 학생 중 남학생이 뽑히는 사건을 A, 여학생이 뽑히는 사건을 B, 수리영역 가형을 지원한 학생이 뽑히는 사건을 C라 하면

$P(A)=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$, $P(B)=\frac{3}{10}$이고

$P(C|A)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$, $P(C|B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$이므로

$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$

$=\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}}{\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}}=\frac{2}{9}$$

76. 정답 ④

[해설] 주머니 안의 공 13개 중에서 2개의 공을 꺼낼 때 두 공이 같은 색인 사건을 A, 두 공이 검은 색인 사건을 B라 하자. 이때,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4C_2+{}_3C_2+{}_6C_2}{{}_{13}C_2}=\frac{6+3+15}{78}=\frac{24}{78}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_6C_2}{{}_{13}C_2}=\frac{15}{78}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{15}{78}}{\frac{24}{78}}=\frac{5}{8}$$

77. 정답 ③

[해설]

소형차를 구입할 사건을 E 라 하면

$$P(E)=0.5\times0.1+0.2\times0.1+0.3\times0.2=0.13$$

A 사의 자동차를 구입할 사건을 F 라 하면

$$P(E\cup F)=0.5\times0.1=0.05$$

$$P(F|E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}=\frac{0.05}{0.13}=\frac{5}{13}$$

78. 정답 ⑤

[해설] 사건 A를 양성반응이 나온 사건, 사건 B를 보균자인 사건이라고 하면 $P(A)$는 보균자가 양성반응 또는 비보균자가 양성반응인 확률이므로

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$

$$=\frac{4}{100}\times\frac{95}{100}+\frac{96}{100}\times\frac{10}{100}=\frac{67}{500}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{19}{500}}{\frac{67}{500}}=\frac{19}{67}$$

79. 정답 ④

[해설] 기계 A, B, C에서 생산된 제품을 선택하는 사건을 각각 A, B, C라 하고, 선택된 제품이 불량품인 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$$

$$=\frac{25}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{45}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{30}{100}\cdot\frac{3}{100}$$

$$=\frac{125+90+90}{10000}=\frac{305}{10000}$$

따라서 선택된 제품이 불량품이었을 때, 그것이 B 기계에서 생산된 것이었을 확률은

$$\mathrm{P}(B\mid E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{45}{100}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{305}{10000}}$$

$$=\frac{90}{305}=\frac{18}{61}$$

80. 정답 ②

[해설]

주머니 A 에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 짝수인 사건을 A 라고 하면

$$P(A)=\frac{2}{5},\ P(A^c)=\frac{3}{5}$$

꺼낸 2 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 홀수인 사건을 C 라고 하자.

꺼낸 2 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 홀수이려면 주머니 A 에서 꺼낸 카드가 짝수인 경우에는 주머니 B 에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 홀수이어야 하고, 주머니 A 에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 홀수인 경우에는 주머니 B 에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 짝수이어야 한다.

$$\therefore P(C\mid A)=\frac{2}{5},\ P(C\mid A^c)=\frac{3}{5}$$

$$P(A\mid C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)}{P(A\cap C)+P(A^c\cap C)}$$

$$=\frac{P(A)P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(A^c)P(C\mid A^c)}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{4}{13}$$

81. 정답 ①

[해설] 감기에 걸리는 사건을 A, 감기에 걸렸다고 진단하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A^C\mid B)$이다.

$$\mathrm{P}(A^C\mid B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A^C\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^C\cap B)}$$

$$=\frac{\frac{9}{10}\times\frac{5}{100}}{\frac{1}{10}\times\frac{90}{100}+\frac{9}{10}\times\frac{5}{100}}=\frac{1}{3}$$

82. 정답 ③

[해설] 두 사격선수 A, B가 사격을 하여 명중시키는 사건을 각각 A, B라 하고, 4발의 사격을 하여 2발을 명중시키는 사건을 C라 하자. 이때,

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C\mid A)=\frac{1}{2}\times{}_4C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{256}$$

$$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C\mid B)=\frac{1}{2}\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B\mid C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{27}{256}+\frac{3}{16}}=\frac{16}{25}$$

83. 정답 ②

[해설] (ⅰ) A가 붉은 공을 2개를 꺼낼 때

B는 흰 공 1개, 붉은 공 1개를 꺼내거나 또는 흰 공 2개를 꺼내야 하므로 A가 이길 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_6C_1}{{}_8C_2}+\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}=\frac{{}_4C_2({}_2C_1\times{}_6C_1+{}_6C_2)}{{}_{10}C_2\times{}_8C_2}$$

(ⅱ) A가 붉은 공 1개와 흰 공 1개를 꺼낼 때

B는 흰 공 2개를 꺼내야 하므로 A가 이길 확률은

$$\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1{}_5C_2}{{}_{10}C_2\times{}_8C_2}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{\dfrac{{}_4C_2({}_2C_1\times{}_6C_1+{}_6C_2)}{{}_{10}C_2\times{}_8C_2}}{\dfrac{{}_4C_2({}_2C_1\times{}_6C_1+{}_6C_2)}{{}_{10}C_2\times{}_8C_2}+\dfrac{{}_4C_1\times{}_6C_1\times{}_5C_2}{{}_{10}C_2\times{}_8C_2}}=\frac{27}{67}$$

84. 정답 ⑤

[해설]

한 사람을 임의로 택할 때, 중국을 선택한 사람인 사건을 A, 남자인 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(B\mid A)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

$$P(A^c\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

인도를 선택한 직원의 $\frac{1}{2}$은 여자이므로

$$P(A^c\cap B^c)=P(A^c\cap B)=\frac{4}{15}$$

$$\therefore P(A\cap B^c)=P(B^c)-P(A^c\cap B^c)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{15}=\frac{1}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^c\cap B^c)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{15}}=\frac{6}{7}$$

85. 정답 ②

[해설]

k번이 적힌 상자가 선택되는 사건을 A_k라 하고, 흰 공이 나오는 사건을 B라 하면

$$P(A_k)=\frac{1}{6},\ P(B|A_k)=\frac{k}{12}(k=1,2,3,4,5,6)$$

$$\therefore P(B)=\sum_{k=1}^{6}P(A_k\cap B)=\sum_{k=1}^{6}P(A_k)\cdot P(B|A_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{k}{12}\right)=\frac{1}{72}\cdot\frac{6\cdot7}{2}=\frac{7}{24}$$

구하는 확률은 사건 B가 일어났을 때의 사건 A_5의 조건부확률이므로

$$P(A_5|B)=\frac{P(A_5\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_5)\cdot P(B|A_5)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{12}}{\frac{7}{24}}=\frac{5}{21}$$

86. 정답 62

[해설]

두 번째 화살과 세 번째 화살이 10점 과녁을 맞추는 사건을 각각 A, B라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$이다.

(i) 두 번째 화살과 세 번째 화살이 모두 10점 과녁을 맞출 확률은

$$P(A\cap B)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

(ii) 두 번째 화살이 10점 과녁을 맞추지 못하고, 세 번째 화살이 10점 과녁을 맞출 확률은

$$P(A^c\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^c\cap B)}=\frac{\frac{9}{16}}{\frac{9}{16}+\frac{1}{6}}=\frac{27}{35}$$

$$\therefore p+q=35+27=62$$

87. 정답 83

[해설] 한 명의 학생을 임의로 택했을 때 가군의 합격생일 사건을 A, 나군의 합격생일 사건을 B, 다군의 합격생일 사건을 C라 하고 남학생일 사건을 M이라 하면

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{3}{10}$, $P(C)=\frac{1}{5}$이고

$P(M|A)=\frac{3}{5}$, $P(M|B)=\frac{1}{2}$, $P(M|C)=\frac{2}{5}$이므로

$$P(M)=P(A)P(M|A)+P(B)P(M|B)+P(C)P(M|C)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|M)=\frac{P(A\cap M)}{P(M)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}}=\frac{30}{53}$$

$$\therefore p+q=53+30=83$$

88. 정답 ③

[해설]

두 사건 A와 B는 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$$\frac{4}{5}=P(A)+P(B)\qquad\cdots\cdots ㉠$$

또, 두 사건 B 와 C 는 서로 독립이므로

$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B)P(C)$에서

$$\frac{2}{3}=P(B)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}P(B)$$

$$\frac{5}{12}=\frac{3}{4}P(B)$$

$$\therefore P(B)=\frac{5}{9}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠을 대입하면

$$p(A)=\frac{11}{45}$$

89. 정답 ②

[해설] A와 B는 서로 배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$이고

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)+P(B)=\frac{3}{4}$$

또, A와 C는 서로 독립이므로 $P(A\cap C)=P(A)P(C)$이고

$P(A\cap C)=P(A)P(C)=\frac{1}{3}$

이때, $P(C)=\frac{1}{2}$이므로 $P(A)=\frac{2}{3}$

$\therefore P(B)=\frac{3}{4}-P(A)=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$

90. 정답 ④

[해설]

주어진 조건에서 $P(B|A)=P(A)$

이때, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $P(B|A)=P(B)$

$\therefore P(A)=P(B)$ …… ㉠

또, $P(A\cup B)=\frac{7}{16}$에서 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{7}{16}$ …… ㉡

㉠을 ㉡을 대입하면

$2P(A)-\{P(A)\}^2=\frac{7}{16}$

$16\{P(A)\}^2-32P(A)+7=0$

$\{4P(A)-1\}\{4P(A)-7\}=0$

$P(A)=\frac{1}{4}\,(\because 0\le P(A)\le 1)$

$\therefore P(A^c)=1-P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

91. 정답 ①

[해설]

세 번 던져 나온 수를 차례로 (a, b, c)라 표시하면

(ⅰ) $(1, 3, \text{홀수})$가 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{18}$

(ⅱ) $(2, 2, \text{홀수})$가 나올 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$

(ⅲ) $(3, 1, \text{홀수})$가 나올 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{18}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 의 사건은 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{18}+\frac{2}{27}+\frac{1}{18}=\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\frac{5}{27}$

92. 정답 ⑤

[해설]

$M(n, 5)$는 주사위를 n번 던졌을 때 나온 눈의 최댓값이 5가 되는 확률이므로 주사위를 n번 던져 5이하의 눈이 나올 확률에서 4이하의 눈이 나올 확률을 빼면 된다.

$\therefore M(n, 5)=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} M(n, 5)=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}-\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=3$

93. 정답 13

[해설]

병우와 현수가 덩크 슛을 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사람 중 한 명만 덩크슛을 성공하는 사건은

$(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$이다.

두 사건 A, B는 독립이므로 A, B^c도 독립이고, A^c, B도 독립이다.

$\therefore P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{15}$

$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

그런데 $A\cap B^c, A^c\cap B$는 배반사건이므로 구하는 확률은

$P((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B))=P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)$

$=\frac{2}{15}+\frac{1}{6}=\frac{3}{10}$

$\therefore p+q=10+3=13$

94. 정답 19

[해설]

영역 A에 색을 칠하게 될 확률은 $\frac{3}{4}$, 영역 B에 색을 칠하게 될 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

이때, 3번째 시행에서 마치는 경우는 A, A, B의 순서로 칠하거나 B, B, A 의 순서로 칠하는 경우이다.

(ⅰ) A, A, B의 순서로 칠하는 경우

$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$

(ⅱ) B, B, A 의 순서로 칠하는 경우

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{64}+\frac{3}{64}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$

$\therefore p+q=16+3=19$

95. 정답 ①

[해설]

$A^c\cap B^c=(\boxed{(A\cup B)})^c$이므로

$P(A^c\cap B^c)=P((A\cup B)^c)=1-P(\boxed{(A\cup B)})$

$=1-\{P(A)+P(B)-P(\boxed{(A\cap B)})\}$

$=\{1-P(A)\}-P(B)\{1-P(\boxed{A})\}$

$(\because\ P(A\cap B)=P(A)P(B))$

$=\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}$

$=P(A^c)P(B^c)$

따라서 A^c와 B^c가 서로 독립이다.

96. 정답 ③

[해설] $(A\cap B)\cap(A^C\cap B)=\varnothing$이므로 사건 $(A\cap B)$와 $(A^C\cap B)$는

$\boxed{\text{배반사건}}$ 이다.

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)\boxed{+}\ \mathrm{P}(A^C\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$= (\boxed{1-\mathrm{P}(A)}) \times \mathrm{P}(B)$

$= \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

97. 정답 ③

[해설]

ㄱ. A와 B가 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$ 이다.

$\therefore \mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0$ (참)

ㄴ. A와 B가 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 1$

$\therefore \mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A^C)$

즉, B는 A의 여사건이다. (참)

ㄷ. [반례] $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$이면

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3}$

이므로 A와 B는 서로 독립이다. 그런데

$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{6} > 1$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

98. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. $P(E) = \dfrac{1}{2}$ 이므로

$I(E) = -\log_2 P(E) = -\log_2 \dfrac{1}{2} = 1$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$\therefore I(A \cap B) = -\log_2 P(A \cap B)$

$= -\log_2 P(A)P(B)$

$= -\{\log_2 P(A) + \log_2 P(B)\}$

$= -\log_2 P(A) - \log_2 P(B)$

$= I(A) + I(B)$ (참)

ㄷ. $2I(A \cup B) = -2\log_2 P(A \cup B)$

$= -\log_2 \{P(A \cup B)\}^2$

$I(A) + I(B) = -\log_2 P(A) - \log_2 P(B)$

$= -\log_2 P(A) \log_2 P(B)$

$P(A \cup B) \geq P(A) > 0$, $P(A \cup B) \geq P(B) > 0$

이므로

$P\{(A \cup B)\}^2 \geq P(A)P(B)$

즉, $\log_2 P\{(A \cup B)\}^2 \geq \log_2 P(A)P(B)$ 이므로

$-\log_2 P\{(A \cup B)\}^2 \leq -\log_2 P(A)P(B)$

$\therefore 2I(A \cup B) \leq I(A) + I(B)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ. ㄴ. ㄷ 이다.

99. 정답 ③

[해설] 5개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 1개 이하로 나올 확률은 앞면이 1개 나오거나 1개도 나오지 않는 경우의 확률이므로

$${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{16}$$

100. 정답 ④

[해설]

B 팀이 5 : 4 로 이기기 위해서는 A 팀은 5 명의 선수 중에서 4 명이 성공하고, B 팀은 5 명의 선수가 모두 성공해야 한다.

A 팀의 5 명의 선수 중에서 4 명이 성공할 확률은

$${}_5C_4 \times 0.8^4 \times (1-0.8)^{5-4} = 0.8^4$$

B 팀의 5 명의 선수가 모두 성공할 확률은

$${}_5C_5 \times 0.8^5 = 0.8^5$$

따라서 구하는 확률은 $0.8^4 \times 0.8^5 = 0.8^9$

101. 답 ②

[해설]

A팀이 5번째 경기에서 우승하려면 4번째 경기까지는 3승 1패를 하고, 5번째 경기에서 이겨야 한다.

A팀이 4번째 경기까지는 3승 1패를 할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{32}{81} \times \frac{2}{3} = \frac{64}{243}$$

102. 정답 ③

[해설] 4회의 시행에서 흰 공이 2번 나오고 5번째에는 반드시 흰 공이 나와야 한다.

이때, 한 번의 시행에서 흰 공이 나올 확률은 $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$이므로 구하는 확률은 ${}_4C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{81}$

103. 정답 ①

[해설] $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 확률은 동전 2개를 동시에 4번 던질 때 모두 앞면이 나오는 횟수가 3번, 그렇지 않은 경우가 1번 나오는 독립시행의 확률이다.

따라서 동전 2개를 동시에 던질 때 모두 앞면이 나올 확률은 $\dfrac{1}{4}$이므로 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{3}{4} = 4 \times \frac{3}{256} = \frac{3}{64}$$

Tip 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p, 일어나지 않을 확률을 q라고 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은 ${}_nC_r p^r q^{n-r}$ $(r = 0, 1, 2, \cdots, n)$

104. 정답 ⑤

[해설] 3번 중 3, 6의 눈이 나오는 횟수를 a, 그 이외의 눈이 나오는 횟수를 b라 하면 $a + b = 3$, $4a - 2b > 0$

이때, $2a - (3-a) > 0$에서 $a > 1$

$\therefore a=2,\ b=1$ 또는 $a=3,\ b=0$
따라서 구하는 확률은
$${}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{27}$$

105. 정답 ⑤

[해설]
주사위를 5 번 던질 때, 점수의 합이 음수인 경우는 3 의 배수의 눈이 1 번 나오는 경우와 0 번 나오는 경우이다.
(i) 3 의 배수의 눈이 1 번, 그 외의 눈이 4 번 나오는 확률
$${}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$$
(ii) 5 번 모두 3 의 배수가 아닌 눈이 나오는 확률
$${}_5C_0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$$
따라서 구하는 확률은
$$\frac{80}{243}+\frac{32}{243}=\frac{112}{243}$$

106. 정답 ⑤

[해설] 주머니에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{5}$, 빨간 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{5}$이다.
(ⅰ) 흰 공을 꺼낼 때 동전의 앞면이 3회 이상 나올 확률은
$$\frac{3}{5}\times\left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}=\frac{3}{16}$$
(ⅱ) 빨간 공을 꺼낼 때 동전의 앞면이 3회 이상 나올 확률은
$$\frac{2}{5}\times\left\{{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}=\frac{1}{5}$$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은
$$\frac{3}{16}+\frac{1}{5}=\frac{31}{80}$$

107. 정답 ①

[해설] 동전을 9번 던질 때 앞면이 n번, 뒷면이 $(9-n)$번 나오면 A, B의 좌표는 $A(9-n,\ n)$, $B(8-(9-n),\ 10-n)$이므로 A, B가 만나려면 $n=10-n$ $\quad\therefore n=5$
즉, A, B가 만나려면 동전을 9번 던져 앞면이 5번, 뒷면이 4번 나와야 한다.
따라서 구하는 확률은 ${}_9C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{63}{256}$

108. 정답 ④

[해설] 점 P가 한 번에 이동할 수 있는 거리는 3 이하이므로 $x=2$와 $x=4$에 모두 멈춰 서지 않으면 반드시 $x=3$인 위치에 멈춰서야 한다.
$x=2$인 위치에 멈춰 서지 않고 $x=3$인 위치에 멈춰 서는 경우는
(ⅰ) 1칸, 2칸 (ⅱ) 3칸 이동하는 2가지이고 그 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$이다.
이때, 다음으로 2칸 또는 3칸을 이동하면 $x=4$인 위치에 멈춰 서지 않으므로 그 확률은 $\frac{2}{3}$이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

109. 정답 ③

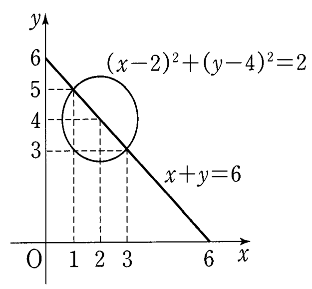
[해설]
3의 배수의 눈이 나오는 사건을 H, 3의 배수의 눈이 나오지 않는 사건을 T라 하면 주사위를 4번 던지고 게임이 종료되는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) $HHTT$인 경우
$$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$
(ⅱ) $HTTT$ 또는 $THTT$ 인 경우
$$2\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{81}$$
따라서 구하는 확률은
$$\frac{1}{81}+\frac{16}{81}=\frac{17}{81}$$

참고

H가 1번, T가 3번 나오는 경우의 수는
$$\frac{4!}{3!}=4(\text{가지})$$
인데, $TTHT$. $TTTH$는 2번 만에 게임이 끝나므로 4번 던지고 게임이 종료되는 경우는
$$4-2=2(\text{가지})$$

110. 정답 ⑤

[해설]



3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 x, 3의 배수의 눈이 나오지 않는 횟수를 y라고 하면
$x+y=6\,(x\ge 0, y\ge 0)$ …… ㉠
부등식 $(x-2)^2+(y-4)^2\le 2$가 나타내는 영역은
원 $(x-2)^2+(y-4)^2=2$의 경계선을 포함한 내부이므로
㉠과 공통 부분을 구하면 점 $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$이다.
따라서 구하는 확률은
$${}_6C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5+{}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_6C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$=\frac{192+240+160}{3^6}=\frac{592}{729}$$

111. 정답 ④

[해설] 2보다 작은 값을 가질 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 2 이상인 값을 가질 확률은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이다.

x가 2보다 작은 값을 가질 횟수를 a, 그 이상인 값을 가질 횟수를 b라고 하면 $a+b=5,\ 2a-b=1$ 　　$\therefore a=2,\ b=3$

따라서 구하는 확률은 ${}_5C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{243}$

112. 정답 ③

[해설]

독립시행의 확률에서 $P_k={}_{10}C_k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$ 이다.

ㄱ. $P_1+P_2+P_3+\cdots\ P_{10}=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$

$=\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)^{10}=1$ (참)

ㄴ. $P_0=\left(\frac{3}{5}\right)^{10}$, $P_{10}=\left(\frac{2}{5}\right)^{10}$ 이므로 $P_0\neq P_{10}$ 이다.

$\therefore P_k\neq P_{10-k}$ (거짓)

ㄷ. 부등식 $P_k<P_{k+1}$ 이 성립하는 k 의 값의 범위를 구하면

$${}_{10}C_k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}<{}_{10}C_{k+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{k+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{10-k-1}$$

$${}_{10}C_k\cdot\frac{3}{5}<{}_{10}C_{k+1}\cdot\frac{2}{5}$$

$$\frac{10!}{k!(10-k)!}\cdot\frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}\cdot 2$$

양변에 $\frac{(k+1)!(10-k)!}{10!}$ 을 곱하여 정리하면

$3(k+1)<2(10-k)$

$5k<17$ 　$\therefore k<\frac{17}{5}=3.4$

이때, $k\le 3$ 이면 $P_k<P_{k+1}$ 이고, $k\ge 4$ 이면 $P_k>P_{k+1}$ 이다.

$P_0<P_1<P_2<P_3<P_4$ 이고, $P_4>P_5>P_6>\cdots\ P_{10}$

이므로 P_k 중 최대인 것은 P_4 이다.(참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄷ 이다.

113. 정답 557

[해설] 정사면체를 던져 정사면체의 바닥에 깔린 면의 수가 4가 될 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

이때, 철수가 이기는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 4회까지 철수가 1번, 영희가 0번 4가 나오고, 5회 째에 철수가 4가 나오는 경우

철수	영희	철수	영희	철수
○	×	×	×	○
×	×	○	×	○

$$2\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\frac{1}{4}=\frac{27}{512}$$

(ⅱ) 4회까지 철수가 1번, 영희가 1번 4가 나오고, 5회 째에 철수가 4가 나오는 경우

철수	영희	철수	영희	철수
○	○	×	×	○
○	×	×	○	○
×	○	○	×	○
×	×	○	○	○

$$4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{256}$$

(ⅰ), (ⅱ) 는 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{27}{512}+\frac{9}{256}=\frac{45}{512}$$

$\therefore p+q=512+45=557$

114. 정답 125

[해설] 주머니 속에 있는 공의 개수는

$1+2+3+\cdots+8=\frac{8\times 9}{2}=36$(개)

숫자 6이 적혀 있는 공이 6개이므로 주머니 속에서 1개의 공을 꺼낼 때, 숫자 6이 적혀 있는 공이 나올 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 주머니에서 공을 꺼내는 독립시행을 5회 반복할 때, 숫자 6이 적혀 있는 공이 3번 나올 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{125}{2^4\times 3^5}$$

$a=125$

115. 정답 10

[해설]

$P(A)=x,\ P(B)=y$ 라 하면

사건 A, B 가 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}$ 에서 $xy=\frac{1}{6}$

또, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 에서

$\frac{2}{3}=x+y-\frac{1}{6}$ 　$\therefore\ x+y=\frac{5}{6}$

이때, x, y 는 $t^2-\frac{5}{6}t+\frac{1}{6}=0$ 의 두 근이므로

$6t^2-5t+1=0,\ (2t-1)(3t-1)=0$

그런데 $P(A)<P(B)$ 이므로 $P(A)=\frac{1}{3}$, 　$P(B)=\frac{1}{2}$

따라서 병우가 농구공을 네 번 던질 때, 세 번 이상 골대에 들어갈 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)+{}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{9}$$

즉, $m=9,\ n=1$ 이므로 $m+n=10$

116. 정답 19

[해설] 검은 공을 x개라고 하면 흰 공은 $(10-x)$개다. 검은 공이 2개인 경우는 동전 2개가 모두 앞면이 나오고, 꺼낸 2개의 공이 모두 검은 공인 경우이므로 그 확률은 ${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{{}_xC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{{}_xC_2}{180}$

조건에서 $\frac{{}_xC_2}{180}=\frac{1}{60}$이므로 ${}_xC_2=3$

$\frac{x(x-1)}{2}=3$에서 $x=3$ $(\because x>0)$

즉, 검은 공은 3개이고 흰 공은 7개다. 따라서 검은 공이 1개 나오는 경우는

(ⅰ) 동전의 앞면이 1개 나오고, 꺼낸 1개의 공이 검은 공인 경우

(ⅱ) 동전 2개가 모두 앞면이 나오고, 꺼낸 2개의 공 중 1개가 검은 공인 경우

$$\therefore {}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{{}_3C_1}{{}_{10}C_1} + {}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{{}_7C_1 \times {}_3C_1}{{}_{10}C_2} = \frac{4}{15}$$

$\therefore m+n = 15+4 = 19$

117. 정답 ③

[해설] 승민이가 첫 번째에 주사위를 던지므로 $p_1 = 1$

주사위를 던져 5 이상의 눈이 나와야 2번째에도 승민이가 던지게 되므로

$p_2 = \frac{1}{3}$

$(n-1)$번째 승민이가 주사위를 던질 확률은 p_{n-1}, 윤희가 주사위를 던질 확률은 $1-p_{n-1}$이다.

n번째 승민이가 주사위를 던질 확률은

$(n-1)$번째에 승민이가 주사위를 던진 경우 : $\frac{1}{3}p_{n-1}$

$(n-1)$번째에 윤희가 주사위를 던진 경우 : $\frac{2}{3}(1-p_{n-1})$

이므로

$$p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}(1-p_{n-1}) = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}$$

이를 변형하면

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = \frac{1}{2}$$

118. 정답 ①

[해설] 점P가 움직이지 않을 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 다른 한 꼭짓점으로 이동할 확률은 각각 $\frac{1}{6}$이다.

주사위를 n번 던져 이동한 점P가 꼭짓점A_1위에 있을 확률을 p_n이라 하면 $p_1 = \frac{1}{2}$이다.

$(n-1)$번 던졌을 때 점P가 A_1 위에 있을 확률은 p_{n-1}, 다른 꼭짓점에 있을 확률은 $1-p_{n-1}$이므로

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{6}(1-p_{n-1}) = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{6}$$

이를 변형하면

$$p_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(p_{n-1} - \frac{1}{4}\right)$$

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(p_1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

따라서 주사위를 5번 던져 점P가 A_1위에 있을 확률 p_5는

$$p_5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{41}{162}$$

119. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. 동전을 3번 던져 P_4에 도착하는 경우는 (앞, 앞, 앞) 또는 (뒤, 뒤, 뒤)이므로

$$b_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$a_2 + b_2 = 1$ 이므로 $a_2 = 1 - b_2 = \frac{3}{4}$ (참)

ㄴ. 점P_1에서 $(2n-1)$회의 이동으로는 점P_2, P_4, P_6 중 어느 한 점에 도착하고, 정육각형이 대칭이므로 $n \geq 2$일 때, P_2, P_6에 도착할 확률 은 같다. $(2n-1)$회의 이동으로 P_4에 도착하지 않을 확률(게임이 끝 나지 않을 확률)이 a_n이므로 P_2, P_6에 도착할 확률은 각각 $\frac{1}{2}a_n$이다. 동전을 2번 더 던져 P_4에 도착할 확률은 $(2n-1)$회 던져 P_2에 있는 경우 (앞, 앞) 또는 $(2n-1)$회 던져 P_6에 있는 경우 (뒤, 뒤)인 경우이므로

$$b_{n+1} = \left(\frac{1}{2}a_n\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}a_n\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a_n \text{ (참)}$$

ㄷ. $(2n-1)$회 동전을 던져 이동하여도 게임이 끝나지 않을 확률 a_n은 $(2n+1)$회 시행으로 끝날 확률 b_{n+1}과 끝나지 않을 확률 a_{n+1}의 합이므로 $a_n = a_{n+1} + b_{n+1}$

$a_{n+1} = a_n - b_{n+1} = a_n - \frac{1}{4}a_n = \frac{3}{4}a_n$, $a_1 = 1$ 이므로

$$a_n = a_1\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

또, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ 에서

$$b_n = \frac{1}{4}a_{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = \frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$(n = 2, 3, 4, \cdots)$

따라서 $b_1 = 0$, $b_n = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 4 + 1 = 5 \text{ (참)}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

120. 정답 60

[해설] 준성이가 $(n-1)$번째 판을 이길 확률이 p_{n-1}, 질 확률이 $1-p_{n-1}$이다. 준성이가 $(n-1)$번째 판을 이기고 n번째 판을 이길 확률은 $0.8p_{n-1}$이고, $(n-1)$번째 판을 지고 n번째 판을 이길 확률은 $0.3(1-p_{n-1})$이므로

$$p_n = 0.8p_{n-1} + 0.3(1-p_{n-1})$$
$$= 0.5p_{n-1} + 0.3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠을 변형하면

$$p_n - 0.6 = 0.5(p_{n-1} - 0.6)$$

$$p_n - 0.6 = (p_1 - 0.6)0.5^{n-1}$$
$$\therefore p_n = 0.6 + (p_1 - 0.6)0.5^{n-1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} 100p_n = 100 \lim_{n\to\infty} p_n$$
$$= 100 \lim_{n\to\infty} \left\{0.6 + (p_1 - 0.6)0.5^{n-1}\right\}$$
$$= 100 \times 0.6 = 60$$

다른풀이

$\lim_{n\to\infty} p_n = p$에 수렴하면

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} p_{n-1} = p$$

이고, ㉠에서

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}(0.5p_{n-1} + 0.3)$$

즉, $p = 0.5p + 0.3$

$$\therefore p = 0.6$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} 100p_n = 100p = 60$$

***121.* 정답** 10

[해설]

주사위를 한 번 던져 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

$n+1$ 개의 숫자의 합이 홀수가 되려면 n 개의 숫자의 합이 홀수일 때, 나머지 한 개의 수가 짝수이거나 n 개의 숫자의 합이 짝수일 때, 나머지 한 개의 수가 홀수이어야 하므로

$$P_{n+1} = P_n \times \frac{1}{3} + (1 - P_n) \times \frac{2}{3}$$
$$P_{n+1} = -\frac{1}{3}P_n + \frac{2}{3}$$

이때, $\lim_{n\to\infty} P_n = x$ 라 하면 $\lim_{n\to\infty} P_{n+1} = x$

$$x = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3},\ x = \frac{1}{2}$$
$$\therefore 20\lim_{n\to\infty} P_n = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

참고

$\lim_{n\to\infty} P_n = x$ 라 하면 $\lim_{n\to\infty} P_{n+1} = x$ 이므로

$$x = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3},\ x = \frac{1}{2}$$

1. 정답 ③ 2. 정답 ⑤ 3. 정답 ②
4. 정답 ① 5. 정답 ③ 6. 정답 $\frac{2}{3}$
7. 정답 ③ 8. 정답 ③ 9. 정답 ④
10. 정답 ③ 11. 정답 ③ 12. 정답 ④
13. 정답 ② 14. 정답 ② 15. 정답 ⑤
16. 정답 ② 17. 정답 ③ 18. 정답 ⑤
19. 정답 ④ 20. 정답 ④ 21. 정답 ②
22. 정답 ② 23. 정답 ⑤ 24. 정답 ⑤
25. 정답 ⑤ 26. 정답 107 27. 정답 26
28. 정답 ③ 29. 정답 ② 30. 정답 ⑤
31. 정답 ③ 32. 정답 ④ 33. 정답 ③
34. 정답 ⑤ 35. 정답 ① 36. 정답 ③
37. 정답 ④ 38. 정답 ③ 39. 정답 ①
40. 정답 ② 41. 정답 ⑤ 42. 정답 ④
43. 정답 ③ 44. 정답 13 45. 정답 384
46. 정답 ⑤ 47. 정답 ④ 48. 정답 ②
49. 정답 ⑤ 50. 정답 ④ 51. 정답 ①
52. 정답 ④ 53. 정답 ③ 54. 정답 ①
55. 정답 50 56. 정답 5 57. 정답 9
58. 정답 ③ 59. 정답 ⑤ 60. 정답 3
61. 정답 ③ 62. 정답 ③ 63. 정답 ②
64. 정답 ③ 65. 정답 ④ 66. 정답 ⑤
67. 정답 ② 68. 정답 ③ 69. 정답 ⑤
70. 정답 ③ 71. 정답 360 72. 정답 425
73. 정답 512 74. 정답 47 75. 정답 40
76. 정답 ③ 77. 정답 ③ 78. 정답 ⑤
79. 정답 ① 80. 정답 ① 81. 정답 ⑤
82. 정답 ② 83. 정답 ⑤ 84. 정답 ③
85. 정답 ③ 86. 정답 ④ 87. 정답 23
88. 정답 20 89. 정답 ④ 90. 정답 ①
91. 정답 ② 92. 정답 ③ 93. 정답 ⑤
94. 정답 ② 95. 정답 ③ 96. 정답 ①
97. 정답 ③ 98. 정답 ⑤ 99. 정답 ①
100. 정답 ④ 101. 정답 ② 102. 정답 ⑤
103. 정답 ⑤ 104. 정답 ③ 105. 정답 ⑤
106. 정답 108 107. 정답 ③ 108. 정답 ②
109. 정답 ② 110. 정답 7 111. 정답 ④
112. 정답 ④ 113. 정답 ⑤ 114. 정답 ②
115. 정답 ④ 116. 정답 ① 117. 정답 ⑤
118. 정답 ⑤ 119. 정답 ⑤ 120. 정답 ⑤
121. 정답 ② 122. 정답 ⑤ 123. 정답 ④
124. 정답 ② 125. 정답 ① 126. 정답 ②
127. 정답 ① 128. 정답 ④ 129. 정답 114
130. 정답 16 131. 정답 ④ 132. 정답 ⑤
133. 정답 ④ 134. 정답 ④ 135. 정답 30
136. 정답 8 137. 정답 ③ 138. 정답 ④
139. 정답 ① 140. 정답 ① 141. 정답 ④
142. 정답 ① 143. 정답 ④ 144. 정답 ④
145. 정답 ④ 146. 정답 ③ 147. 정답 ②
148. 정답 ⑤ 149. 정답 ④ 150. 정답 ②
151. 정답 ④ 152. 정답 50 153. 정답 933
154. 정답 60 155. 정답 ① 156. 정답 11
157. 정답 16 158. 정답 400 159. 정답 ②
160. 정답 ③ 161. 정답 460 162. 정답 58
163. 정답 ③ 164. 정답 ② 165. 정답 4
166. 정답 ③ 167. 정답 ③ 168. 정답 ④
169. 정답 ⑤ 170. 정답 ① 171. 정답 ③
172. 정답 ③ 173. 정답 ③ 174. 정답 ⑤
175. 정답 ④ 176. 정답 256 177. 정답 385
178. 정답 ④ 179. 정답 ③

1. 정답 ③

[해설]

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	a	b	$\frac{1}{12}$

$P(X)$의 합이 1이므로

$\frac{1}{24}+\frac{1}{8}+\frac{5}{24}+a+b+\frac{1}{12}=1$

$\therefore a+b=\frac{13}{24}$ ··· ㉠

이때, X의 평균이 $\frac{67}{24}$이므로

$E(X)=\frac{1}{24}\times 0+\frac{1}{8}\times 1+\frac{5}{24}\times 2+a\times 3+b\times 4+\frac{1}{12}\times 5$

$=\frac{67}{24}$

$\therefore 3a+4b=\frac{11}{6}$ ··· ㉡

㉠,㉡에서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{5}{24}$

$\therefore P(X=3)=\frac{1}{3}$

2. 정답 ⑤

[해설]

X	1	2	3	4	5	계
P(X=x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	a	$\frac{1}{10}$	1

확률의 합이 1이므로

$\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+a+\frac{1}{10}=1$

$\therefore a=\frac{3}{10}$

$\therefore P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$

3. 정답 ②

[해설] $P(1\leq X\leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=1-P(X=4)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

다른 풀이

확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+a+\frac{1}{5}=1$ $\quad\therefore\ a=\frac{13}{60}$

$P(1\leq X\leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{13}{60}=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$

4. 정답 ①

[해설] 확률의 합은 1이므로 $\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8}+b=1$

$\therefore\ a+b=\frac{5}{8}$ ...... ㉠

확률변수 X의 평균이 5이므로

$E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times a+4\times\frac{1}{8}+8\times b=5$

$\therefore\ 2a+8b=\frac{17}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 X의 분산은

$V(X)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+4^2\times\frac{1}{8}+8^2\times\frac{1}{2}-5^2=9.75$

5. 정답 ③

[해설] 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$ $\qquad\therefore a=\frac{3}{8}$

$\therefore P(X^2-4X+3\leq 0)=P(1\leq X\leq 3)$

$=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

6. 정답 $\frac{2}{3}$

확률변수 X는 3,4,5,6이고 X의 확률분포를 표로 만들면 오른쪽과 같으므로

X	3	4	5	6	계
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$m=3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{2}{6}+5\cdot\frac{2}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{9}{2}$

$\therefore\ P(m-1\leq X\leq m+1)$

$=P\left(\frac{7}{2}\leq X\leq\frac{11}{2}\right)$

$=P(X=4)+P(X=5)$

$=\frac{2}{6}+\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$

7. 정답 ③

[해설] 앞면이 나오는 횟수를 a, 뒷면이 나오는 횟수를 b라 하면 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 5)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,2)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 0)$의 경우이다.

$X=|a-b|$이고

$P(X=1)={}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=\frac{5}{8}$

$P(X=3)={}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2=\frac{5}{16}$

$P(X=5)={}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5\times 2=\frac{1}{16}$

이므로 X에 대한 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	3	5	계
P(X=x)	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{5}{8}+3\times\frac{5}{16}+5\times\frac{1}{16}=\frac{15}{8}$

8. 정답 ③

[해설] 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때 나오는 경우는
(흰 공, 흰 공), (흰 공, 검은 공), (흰 공, 파란 공), (검은 공, 검은 공), (파란 공, 검은 공), (파란 공, 파란 공)이므로 확률변수 X는 2, 3, 4, 5, 6이다.

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{15}$

$P(X=3)=\frac{{}_5C_1\times{}_3C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{3}$

$P(X=4)=\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}+\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{16}{45}$

$P(X=5)=\frac{{}_5C_1\times{}_2C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{9}$

$P(X=6)=\frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{45}$

따라서 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{45}$	1

$\therefore E(X)=\frac{1}{15}\times2+\frac{1}{3}\times3+\frac{16}{45}\times4+\frac{2}{9}\times5+\frac{1}{45}\times6$

$=\frac{19}{5}$

9. 정답 ④

[해설] 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 $0,\ 1,\ \sqrt{3},\ 2$이므로 확률분포표를 만들면 다음과 같다.

X	0	1	$\sqrt{3}$	2	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{3}+\sqrt{3}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

10. 정답 ③

[해설]

전체카드의 수는 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	$\cdots$	n	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$	$\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}$	$\frac{3}{\frac{n(n+1)}{2}}$	$\cdots$	$\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}$	1

$$\therefore E(X)=\frac{1^2}{\frac{n(n+1)}{2}}+\frac{2^2}{\frac{n(n+1)}{2}}+\frac{3^2}{\frac{n(n+1)}{2}}+\cdots+\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n+1}{3}$$

11. 정답 ③

[해설] $P(X=0)={}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

$P(X=2)={}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$

$P(X=4)={}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X의 확률분포표가 다음과 같다.

X	0	2	4	계
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X의 평균과 분산은

$E(X)=0\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$V(X)=0\times\frac{3}{8}+4\times\frac{1}{2}+16\times\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$

12. 정답 ④

[해설] 공에 적혀 있는 수의 최솟값은 1, 2, 3이므로 확률변수 X는 1, 2, 3이고 확률변수 X가 1, 2, 3일 확률은 각각 다음과 같다.

$P(X=1)=\frac{{}_4C_2}{{}_5C_3}=\frac{6}{10}$

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$

따라서 확률변수 X의 기댓값은

$1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$

13. 정답 ②

[해설]

확률의 합은 1이므로

$c+2c+3c+\cdots+nc=1$

$\frac{n(n+1)c}{2}=1 \qquad \therefore\ c=\frac{2}{n(n+1)}$

따라서 확률변수 X의 평균은

$a_n=E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot ck=c\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3}$

이므로 구하는 극한값은

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}$

14. 정답 ②

[해설] 확률의 합은 1이므로 $b+a+a^2=1$ ……㉠

$P(|X-3| \leq 1)=\frac{3}{4}$이므로

$$P(|X-3| \leq 1)=P(2 \leq X \leq 4)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=a+a^2=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $b=\frac{1}{4}$

$a^2+a-\frac{3}{4}=0$, $4a^2+4a-3=0$, $(2a+3)(2a-1)=0$

a는 양수이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

확률변수 X의 평균과 분산은

$$E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2$$
$$V(X)=1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{2}+9\times\frac{1}{4}-2^2$$
$$=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$$

15. 정답 ⑤

[해설] 정육각형의 한 변의 길이가 X라 하면

$E(6X)=6E(X)=60$, $\sigma(6X)=6\sigma(X)=12$

$\therefore E(X)=10$, $\sigma(X)=2$

따라서 구하는 정육각형의 넓이의 평균은

$$E\left(6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}X^2\right)=E\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}X^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}E(X^2)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}[V(X)+\{E(X)\}^2]$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}(4+100)=156\sqrt{3}$$

16. 정답 ②

[해설] (i) 남학생 3명과 여학생 3명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $6!$(가지)이다.

(ii) 제일 앞에 서 있는 남학생의 번호가 k일 때, 그 남학생 앞에는 3명의 여학생 중 $(k-1)$명이 서 있어야 하므로 ${}_3P_{k-1}$(가지)

이 때, k번째에 서 있을 남학생을 선택하는 방법의 수는 3(가지)이고 나머지 $(6-k)$명의 학생을 세우는 방법의 수가 $(6-k)!$이므로 제일 앞에 서 있는 남학생의 번호가 k일 경우의 수는 ${}_3P_{k-1}\times3\times(6-k)!$(가지)

즉, $P(X=k)=\frac{{}_3P_{k-1}\times3\times(6-k)!}{6!}$이므로

X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	계
$P(X=x)$	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

따라서 X의 평균은

$$E(X)=\frac{1\times10+2\times6+3\times3+4\times1}{20}=\frac{7}{4}$$

17. 정답 ③

[해설]

확률변수 X가 취하는 값은 0, 1, 2, 3이고

$$P(X=0)=\frac{2}{5}$$
$$P(X=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$
$$P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$$
$$P(X=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

이므로 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 X의 평균과 분산은

$$E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{10}=1$$
$$V(X)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{10}-1^2=1$$

18. 정답 ⑤

[해설] $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$에서

$x=a+b$, $y=a-b$

$\overline{OP}\leq 4$이면 $(a+b)^2+(a-b)^2\leq16$, $a^2+b^2\leq8$

(a, b)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$이므로 $P(x, y)$와 원점 $O(0, 0)$ 사이의 거리가 4 이하일 확률은 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$이다.

따라서 두 개의 주사위를 한 번 던져 얻을 수 있는 점수를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	30	15	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	1

$$\therefore E(X)=30\times\frac{1}{9}+15\times\frac{8}{9}=\frac{50}{3}$$

19. 정답 ④

[해설] $P(X=k)$ $(k\geq2)$는 $(k-1)$번째까지의 검사에서 $(k-2)$개의 정상품과 한 개의 불량품이 나오고 k번째의 검사에서 불량품이 나올 확률이므로

$$P(X=k)=\frac{{}_2C_1\times{}_{18}C_{k-2}}{{}_{20}C_{k-1}}\times\frac{1}{20-(k-1)}=\frac{k-1}{190}$$
$$\therefore E(X)=\sum_{k=2}^{20}\left(k\times\frac{k-1}{190}\right)=\frac{1}{190}\sum_{k=1}^{20}(k^2-k)$$
$$=\frac{1}{190}\left(\frac{20\cdot21\cdot41}{6}-\frac{20\cdot21}{2}\right)=14$$

20. 정답 ④

[해설]

ㄱ. $G(3)=P(X>3)=1-P(0\leq X\leq3)=1-F(3)$ (참)

ㄴ. $P(3\leq X\leq8)=P(0\leq X\leq8)-P(0\leq X<3)$
$=P(0\leq X\leq8)-P(0\leq X\leq2)$

$= F(8) - F(2)$ (거짓)

ㄷ. $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \geq 3) - P(X > 8)$

$= P(X > 2) - P(X > 8)$

$= G(2) - G(8)$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

21. 정답 ②

[해설] 주머니 속의 구슬의 총 개수는

$1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$

$E(X) = \sum_{k=1}^{n}\left(k \cdot \frac{2k-1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$= \frac{1}{n^2}\left\{2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= \frac{4n^2+3n-1}{6n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{E(X)}{n+3} = \lim\frac{4n^2+3n-1}{6n^2+18n} = \frac{2}{3}$

22. 정답 ②

[해설]

ㄱ. 공차를 d라 하면 양수 a에 대하여

$p_1 = a-d,\ p_2 = a,\ p_3 = a+d$로 놓을 수 있다.

$a-d+a+a+d = 1$이므로 $a = \frac{1}{3}$

$\therefore p_1 + p_3 = 2a = \frac{2}{3}$(참)

ㄴ. $0 \leq \frac{1}{3} - d \leq 1$에서 $0 < d \leq \frac{1}{3}$ …… ㉠

$0 \leq \frac{1}{3} + d \leq 1$에서 $0 < d \leq \frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0 < d \leq \frac{1}{3}$

따라서 공차 d의 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다. (참)

ㄷ. $P(X=1) = \frac{1}{3} - d,\ P(X=2) = \frac{1}{3},$

$P(X=3) = \frac{1}{3} + d$이므로

$E(X) = 1 \times \left(\frac{1}{3} - d\right) + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \left(\frac{1}{3} + d\right) = 2 + 2d$

$\therefore V(X) = 1^2 \times \left(\frac{1}{3} - d\right) + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \left(\frac{1}{3} + d\right) - (2+2d)^2$

$= \frac{2}{3} - 4d^2$

따라서 공차 d가 클수록 분산은 작아진다. (거짓)

그러므로 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23. 정답 ⑤

[해설] $P(X \leq 1) = P(X=1) = \frac{11}{200}$이므로

$a + b = \frac{11}{200}$ …… ㉠

$P(X \leq 10) = 1$이므로 $100a + 10b = 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a = \frac{1}{200},\ b = \frac{1}{20}$

$\therefore P(X \leq k) = \frac{1}{200}k^2 + \frac{1}{20}k$

ㄱ. $P(X=2) = P(X \leq 2) - P(X=1)$

$= \frac{24}{200} - \frac{11}{200} = \frac{13}{200}$(거짓)

ㄴ. $P(X \leq k) = \frac{1}{200}k^2 + \frac{1}{20}k$이므로

$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$

$= \frac{1}{200}k^2 + \frac{1}{20}k - \left\{\frac{1}{200}(k-1)^2 + \frac{1}{20}(k-1)\right\}$

$= \frac{2k+9}{200}\ (k = 2, 3, 4, \cdots, 10)$

$P(X=1) = \frac{11}{200}$이므로

$P(X=k) = \frac{2k+9}{200}\ (k = 1, 2, 3, 4, \cdots, 10)$

$\therefore E(X) = \sum_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k+9}{200} = \frac{1}{200}\left(2\sum_{k=1}^{10}k^2 + 9\sum_{k=1}^{10}k\right)$

$= \frac{1}{200}\left(2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 9 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}\right)$

$= \frac{1}{200}(770 + 495) = \frac{1265}{200} = \frac{253}{40}$(참)

ㄷ. $i < j$이면

$P(X=j) - P(X=i) = \frac{2j+9}{200} - \frac{2i+9}{200}$

$= \frac{2(j-i)}{200} > 0$

$\therefore P(X=i) < P(X=j)$(참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24. 정답 ⑤

[해설] 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수를 2로 나눈 나머지가 0일 확률은 $\frac{1}{2}$이고, $X_k\ (k = 1, 2, 3, 4)$가 취할 수 있는 값은 0, 1이므로 $P(Y=k) = {}_4C_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{4-k}\ (k = 0, 1, 2, 3, 4)$이고 Y의 확률분포표는 다음과 같다.

Y	0	1	2	3	4	계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$\therefore E(Y) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{6}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16}$

$= \frac{32}{16} = 2$

25. 정답 ⑤

[해설]

최댓값이 k이 확률은 2회 모두 k 이하인 카드가 뽑힐 확률에서 2회 모두 $k-1$이하의 카드가 뽑힐 확률을 빼서 구한다.

이때, $P(X \leq k) = \left(\frac{k}{10}\right)^2$이고

$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$

$$=\left(\frac{k}{10}\right)^2-\left(\frac{k-1}{10}\right)^2$$

$$=\frac{2k-1}{100}$$

ㄱ. $P(X\le 3)=\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$ (참)

ㄴ. $P(X=5)=\frac{2\times5-1}{100}=\frac{9}{100}$ (참)

ㄷ. X의 기댓값 $E(X)$는

$$E(X)=\sum_{k=1}^{10}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{10}k\times\frac{2k-1}{100}$$

$$=\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k)$$

$$=\frac{1}{100}\left(2\times\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{10\cdot11}{2}\right)$$

$$=\frac{143}{20}\text{ (참)}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

26. 정답 107

[해설] 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	10	50	100	500	계
$P(X=x)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 구하는 평균은

$$E(X)=\frac{10\times2+50\times3+100\times4+500\times1}{10}=107$$

27. 정답 26

[해설] 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

$X=0$인 경우는 숫자가 다른 6개의 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(X=0)=\frac{2^6}{_{12}C_6}=\frac{16}{231}$$

$X=1$인 경우는 숫자가 같은 2개의 공과 숫자가 다른 4개의 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(X=1)=\frac{_6C_1\times{_5C_4}\times2^4}{_{12}C_6}=\frac{120}{231}$$

같은 방법으로 $X=2$, $X=3$일 확률을 각각 구하면

$$P(X=2)=\frac{_6C_2\times{_4C_2}\times2^2}{_{12}C_6}=\frac{90}{231}$$

$$P(X=3)=\frac{_6C_3}{_{12}C_6}=\frac{5}{231}$$

따라서 X의 평균은

$$E(X)=\frac{0\times16+1\times120+2\times90+3\times5}{231}=\frac{315}{231}=\frac{15}{11}$$

$\therefore\ m+n=11+15=26$

28. 정답 ③

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	계
$P(X=x)$	$\frac{_4C_3}{_6C_3}=\frac{1}{5}$	$\frac{_4C_2\cdot{_2C_1}}{_6C_3}=\frac{3}{5}$	$\frac{_4C_1\cdot{_2C_2}}{_6C_3}=\frac{1}{5}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{3}{5}+5\cdot\frac{1}{5}=3$$

$$V(X)=1\cdot\frac{1}{5}+9\cdot\frac{3}{5}+25\cdot\frac{1}{5}-3^2=\frac{8}{5}$$

$$\therefore\ V(5X-10)=5^2V(X)=25\times\frac{8}{5}=40$$

29. 정답 ②

[해설] 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

나온 눈	1, 2, 3	1, 2, 4	1, 3, 4	2, 3, 4	계
X	6	7	8	9	
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=\frac{6+7+8+9}{4}=\frac{15}{2}$이므로

$$E(2X+5)=2E(X)+5=2\times\frac{15}{2}+5=20$$

30. 정답 ⑤

[해설] $b+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$$E(X)=2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{4}=1+1+\frac{a}{4}=4$$

$\therefore a=8$

$$V(X)=4\cdot\frac{1}{2}+16\cdot\frac{1}{4}+64\cdot\frac{1}{4}-16=6$$

$\therefore V(2X-3)=2^2V(X)=24$

31. 정답 ③

[해설] X의 평균 $E(X)$와 분산 $V(X)$에 대하여

$E\left(\frac{X-3}{3}\right)=\frac{1}{3}E(X)-1=2\qquad\therefore E(X)=9$

$V\left(\frac{X-3}{3}\right)=\frac{1}{9}V(X)=2\qquad\therefore V(X)=18$

$\therefore E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=18+9^2=99$

32. 정답 ④

[해설] 꺼낸 2개의 공에 포함되어 있는 흰 공의 개수는 0, 1, 2이므로

$$P(X=0)=\frac{_4C_0\cdot{_2C_2}}{_6C_2}=\frac{1}{15}$$

$$P(X=1)=\frac{_4C_1\cdot{_2C_1}}{_6C_2}=\frac{8}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{_4C_2\cdot{_2C_0}}{_6C_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

따라서 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{3}$ 이므로

$E(9X+1)=9E(X)+1=9\cdot\frac{4}{3}+1=13$

33. 정답 ③

[해설] 주어진 확률변수 X의 평균 $E(X)$는

$$E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{2}{7}=1$$

이므로 X의 분산 $V(X)$는

$$V(X)=0^2\times\frac{2}{7}+1^2\times\frac{3}{7}+2^2\times\frac{2}{7}-1^2$$
$$=\frac{3}{7}+\frac{8}{7}-1=\frac{4}{7}$$

따라서 확률변수 $7X$의 분산 $V(7X)$는

$$V(7X)=49\,V(X)=49\times\frac{4}{7}=28$$

[다른풀이]

$$V(X)=E\{(X-m)^2\}=E\{(X-1)^2\}$$
$$=(0-1)^2\times\frac{2}{7}+(1-1)^2\times\frac{3}{7}+(2-1)^2\times\frac{2}{7}$$
$$=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$$

34. 정답 ⑤

[해설] $E(aX+b)=70$이므로

$aE(X)+b=70$에서 $20a+b=70$ …… ㉠

$\sigma(aX+b)=30$, $a>0$이므로

$a\sigma(X)=30$에서 $10a=30$ $\therefore\ a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=10$ $\therefore\ ab=30$

35. 정답 ①

[해설] $V(2X+1)=20$에서

$4V(X)=20$ $\therefore V(X)=5$

$\therefore E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=5+4^2=21$

36. 정답 ③

[해설] 확률변수 X는 0, 10, 20이므로

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{5}$$

$$P(X=10)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=20)=\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$$

따라서 X의 기댓값(평균) m은

$$m=0\times\frac{3}{5}+10\times\frac{3}{5}+20\times\frac{1}{10}=5$$

$\therefore P(-5\le X-m\le 5)=P(-5\le X-5\le 5)$

$=P(0\le X\le 10)=P(X=0)+P(X=10)$

$=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$

37. 정답 ④

[해설]

세 개의 상자에 세 가지 색의 볼펜을 한 자루씩 넣는 경우는 다음과 같다.

상자의 색	검정	빨강	초록
볼펜의 색	검정	빨강	초록
	검정	초록	빨강
	빨강	검정	초록
	빨강	초록	검정
	초록	검정	빨강
	초록	빨강	검정

$\therefore\ P(X=0)=\frac{2}{6},\ P(X=1)=\frac{3}{6},\ P(X=3)=\frac{1}{6}$

따라서 X의 평균과 분산은

$$E(X)=\frac{0\times2+1\times3+3\times1}{6}=1$$

$$V(X)=\frac{0^2\times2+1^2\times3+3^2\times1}{6}-1^2=1$$

이므로 구하는 확률변수 $Y=2X+1$의 분산은

$V(Y)=2^2\,V(X)=4$

38. 정답 ③

[해설]

정사각형 넓이 X는

$X=1$인 것이 9개, $X=2$인 것이 4개,

$X=4$인 것이 4개, $X=5$인 것이 2개, $X=9$인 것이 1개이므로 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	4	5	9	계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	1

따라서 기댓값 $E(X)$는

$$E(X)=1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{10}+9\times\frac{1}{20}=\frac{13}{5}$$

39. 정답 ①

[해설]

나오는 붉은 공의 수 X의 확률은 $X=k$일 때, $\frac{{}_3C_k\times{}_3C_{3-k}}{{}_6C_3}$이므로 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

$$E(X)=\frac{1}{20}\times0+\frac{9}{20}\times1+\frac{9}{20}\times2+\frac{1}{20}\times3=\frac{3}{2}$$

$$V(X)=\frac{1}{20}\times0+\frac{9}{20}\times1^2+\frac{9}{20}\times2^2+\frac{1}{20}\times3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$$

$\therefore V(Y)=V\left(\frac{X+1}{3}\right)=\frac{1}{9}V(X)=\frac{1}{9}\times\frac{9}{20}=\frac{1}{20}$

40. 정답 ②

[해설]

확률의 합은 1이므로 $\frac{1}{8}+p+p+\frac{3}{8}=1$

$2p=\frac{1}{2}\qquad \therefore p=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 평균과 분산은

$E(X)=(-2)\times\frac{1}{8}+(-1)\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

$V(X)=(-2)^2\times\frac{1}{8}+(-1)^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{3}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$\therefore E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b$

$=\frac{1}{2}a+b=5 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$V(Y)=V(aX+b)=a^2V(X)=\frac{9}{4}a^2=36 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4\ (\because a>0),\ b=3$

$\therefore a+b=7$

41. 정답 ⑤

[해설] X가 정규분포 $N(60,\ 8^2)$을 따르므로 $E(X)=60,\ \sigma(X)=8$이다.

그런데 표준점수 $Y=aX+b$는 정규분포 $N(50,\ 10^2)$을 따르므로

$E(Y)=60a+b=50,\ \sigma(Y)=8a=10$

$\therefore a=\frac{5}{4},\ b=-25$

따라서 $Y=\frac{5}{4}X-25$이므로 원점수가 80점인 학생의 표준점수는

$\frac{5}{4}\times 80-25=75$

42. 정답 ④

[해설]

검은 공을 x개라고 하면 흰 공은 $(10-x)$개다. $X=2$인 경우는 동전 2개가

모두 앞면이 나오고, 꺼낸 2개의 공이 모두 검은 공일 경우이므로

$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{{}_xC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{{}_xC_2}{180}$

조건에서 $\frac{{}_xC_2}{180}=\frac{1}{30}$이므로 ${}_xC_2=6$

$\frac{x(x-1)}{2}=6$에서 $x=4\ (\because x>0)$

따라서 $X=0$인 경우는 다음 세 사건의 합사건이다.

(i) 동전 2개가 모두 뒷면이 나오는 경우

(ii) 동전의 앞면이 1개 나오고 꺼낸 공 1개가 흰 공인 경우

(iii) 동전 2개가 모두 앞면이 나오고, 꺼낸 공 2개가 모두 흰 공인 경우

$\therefore P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{{}_6C_1}{{}_{10}C_1}+{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{19}{30}$

따라서 $X=0,1,2$이므로 $P(X=1)=1-\left(\frac{19}{30}+\frac{1}{30}\right)=\frac{1}{3}$

$E(X)=0\times\frac{19}{30}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{30}=\frac{2}{5}$

$\therefore E(5X+2)=5E(X)+2=5\times\frac{2}{5}+2=4$

43. 정답 ③

[해설] ㄱ. $P(Y=k)=P(X=10-k)$이므로

$P(5\le X\le 7)=P(3\le X\le 5)$ (참)

ㄴ. 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=10\times\frac{1}{2}=5$

$Y=10-X$에서

$E(Y)=E(10-X)=10-E(X)=5$

$\therefore E(Y)=E(X)$ (참)

ㄷ. $Y=10-X$에서

$V(Y)=V(10-X)=V(X)$

$\therefore V(Y)=V(X)$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ 이다.

44. 정답 13

[해설] 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고

$P(X=k)=\frac{{}_4C_k\,{}_5C_{3-k}}{{}_9C_3}$

이므로 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{2}{42}$	1

따라서 X의 평균은

$E(X)=\frac{0\times5+1\times20+2\times15+3\times2}{42}=\frac{4}{3}$

이므로 구하는 $6X+5$의 평균은

$E(6X+5)=6E(X)+5=13$

45. 정답 384

[해설] 세 꼭짓점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는 ${}_8C_3=56$(개)

(i) 세 변의 길이가 2, 2, $2\sqrt{2}$인 삼각형은 24개이며 이 삼각형의 넓이는 2이다.

(ii) 세 변의 길이가 2, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$인 삼각형은 24개이며 이 삼각형의 넓이는 $2\sqrt{2}$이다.

(iii) 세 변의 길이가 $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$인 삼각형은 8개이며 이 삼각형의 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

따라서 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	4	8	12	계
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

확률변수 X의 평균과 분산은

$E(X)=4\times\frac{3}{7}+8\times\frac{3}{7}+12\times\frac{1}{7}=\frac{48}{7}$

$$V(X)=4^2\times\frac{3}{7}+8^2\times\frac{3}{7}+12^2\times\frac{1}{7}-\left(\frac{48}{7}\right)^2=\frac{384}{49}$$

이므로 $7X$의 분산은

$$V(7X)=7^2V(X)=384$$

46. 정답 ⑤

한 개의 주사위를 던질 때 k 이상의 눈이 나오는 사건을 A라고 하면 A의 여사건은 k 미만의 눈이 나오는 사건이므로 $P(A^c)=\frac{k-1}{6}$이다. 따라서 k 이상의 눈이 나올 확률은

$$1-P(A^c)=1-\frac{k-1}{6}=\frac{7-k}{6}\quad(k=1,2,\cdots,6)$$

그런데 주사위를 던지는 것은 독립시행이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36,\frac{7-k}{6}\right)$를 따른다.

$$V(X)=36\times\frac{7-k}{6}\times\frac{k-1}{6}=9$$에서 $k=4$

이때, $E(X)=36\times\frac{1}{2}=18$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=9+18^2=333$$

47. 정답 ④

[해설] X의 확률분포가 $P(X=x)={}_{100}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{100-x}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$$\therefore\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=4$$

48. 정답 ②

[해설] $E(X)=30$이므로 $\frac{1}{3}n=30$ $\quad\therefore n=90$

따라서 확률변수 X의 분산은

$$V(X)=90\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20$$

$$\therefore V\left(\frac{1}{2}X+3\right)=\frac{1}{4}V(X)=\frac{1}{4}\times20=5$$

49. 정답 ⑤

[해설] 확률변수 X는 이항분포 $B(3,\ p)$를 따르므로

$P(X=3)={}_3C_3p^3(1-p)^{3-3}=p^3$

확률변수 Y는 이항분포 $B(4,\ 2p)$를 따르므로

$P(Y\geq3)=P(Y=3)+P(Y=4)$

$={}_4C_3(2p)^3(1-2p)+{}_4C_4(2p)^4$

$=32p^3(1-2p)+16p^4$

$10P(X=3)=P(Y\geq3)$이므로

$10p^3=32p^3(1-2p)+16p^4$

$10=32(1-2p)+16p\qquad\therefore p=\frac{11}{24}$

$$\therefore E(Y)-E(X)=8p-3p=5p=5\times\frac{11}{24}=\frac{55}{24}$$

50. 정답 ④

[해설] 확률변수 X의 확률분포가

$$\mathrm{P}(X=k)={}_{192}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{3}{4}\right)^{192-k}$$

$$={}_{192}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{192-k}\quad(k=0,\ 1,\ 2,3,\ \cdots,\ 192)$$

이므로 X는 이항분포 $B\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서 확률변수 X의 표준편차는

$$\sigma(X)=\sqrt{192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=6$$

51. 정답 ①

[해설] $V(X)=V(Y)$에서

$4p(1-p)=6\cdot2p(1-2p)$

$20p^2-8p=0\quad\therefore p=\frac{2}{5}\quad(\because p>0)$

$$\therefore\frac{P(Y=2)}{P(X=2)}=\frac{{}_6C_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^4}{{}_4C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{2}{45}$$

52. 정답 ④

[해설]

$q=1-p$라 하면

$$E(X)=\sum_{r=0}^{n}\boxed{r}\cdot P(X=r)=\sum_{r=0}^{n}\boxed{r}\cdot{}_nC_rp^rq^{n-r}$$

그런데

$$\boxed{r}\cdot{}_nC_r=r\cdot\frac{n!}{(n-r)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}$$

$$=n\cdot\boxed{{}_{n-1}C_{r-1}}$$

이므로

$$E(X)=\sum_{r=1}^{n}n\cdot\boxed{{}_{n-1}C_{r-1}}\cdot p^rq^{n-r}$$

$$=np\sum_{r=1}^{n}\boxed{{}_{n-1}C_{r-1}}\cdot p^{r-1}q^{n-1-(r-1)}$$

$$=np\boxed{(p+q)^{n-1}}=np$$

53. 정답 ③

[해설] 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르므로

$P(X=1)=8P(X=0)$에서

${}_nC_1p^1(1-p)^{n-1}=8\ {}_nC_0(1-p)^n$

$1-p>0$ ($\because P(X=0)>0$)이므로 양변을 $(1-p)^{n-1}$으로 나누어 정리하면 $\quad np=8(1-p)$ ⋯ ㉠

$P(X=2)=3P(X=1)$에서

${}_nC_2p^2(1-p)^{n-2}=3\cdot{}_nC_1p(1-p)^{n-1}$

이 식을 정리하면

$\frac{1}{2}(n-1)p=3(1-p)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $p=\frac{2}{3}$, $n=4$

$\therefore P(X=2)={}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

54. 정답 ①

[해설] 확률변수 X는 이항분포 $B(5,\ p)$를 따르므로

$p_k={}_5C_kp^k(1-p)^{5-k}$

p_k중 최대인 값이 p_3이므로 $p_3\geqq p_2$에서

${}_5C_3p^3(1-p)^2\geqq {}_5C_2p^2(1-p)^3$

$10p\geqq 10(1-p)\qquad \therefore p\geqq\frac{1}{2}$

또, $p_3\geqq p_4$에서

${}_5C_3p^3(1-p)^2\geqq {}_5C_4p^4(1-p)$

$10(1-p)\geqq 5p\qquad \therefore p\leqq\frac{2}{3}$

따라서 구하는 p의 값의 범위는

$\frac{1}{2}\leqq p\leqq\frac{2}{3}$

55. 정답 50

[해설] $P(X=4)=\frac{1}{3}P(X=5)$에서

${}_{10}C_4\,p^4\,(1-p)^6=\frac{1}{3}\,{}_{10}C_5\,p^5\,(1-p)^5$

$1-p=\frac{1}{3}p\cdot\frac{6}{5}$

$1-p=\frac{2}{5}p$

$\therefore p=\frac{5}{7}$

$\therefore E(X)=10\times\frac{5}{7}=\frac{50}{7}$

$\therefore E(7X)=7E(X)=50$

56. 정답 5

[해설] 확률변수 X는 이항분포 $B(4,\ p)$를 따르므로

$P(X\geqq 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^4=\frac{65}{81}$

$(1-p)^4=\frac{16}{81},\ (1-p)^2=\frac{4}{9},\ 1-p=\frac{2}{3}\ (\because 1-p>0)$

$\therefore p=\frac{1}{3}$

$E(X)=4p=\frac{4}{3}$이므로

$\sum_{k=0}^{4}(3k+1)\,{}_4C_k\,p^k(1-p)^{4-k}$

$=3\sum_{k=0}^{4}k\,{}_4C_k\,p^k(1-p)^{4-k}+\sum_{k=0}^{4}{}_4C_k\,p^k(1-p)^{4-k}$

$=3E(X)+1=4+1=5$

57. 정답 9

[해설]

$E(X)=100\times\frac{1}{10}=10$이고 $V(X)=100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=9$이므로

$f(x)=\sum_{k=0}^{100}(x-k)^2p_k$

$=x^2\sum_{k=0}^{100}p_k-2x\sum_{k=0}^{100}kp_k+\sum_{k=0}^{100}k^2p_k$

$=x^2-2xE(X)+E(X^2)$

$=x^2-20x+[V(X)+\{E(X)\}^2]$

$=x^2-20x+109$

$=(x-10)^2+9$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 9이다.

58. 정답 ③

[해설] 씨앗이 발아될 확률이 $\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$이므로

확률변수 X는 이항분포 $B\left(10000,\ \frac{9}{10}\right)$를 따른다.

따라서 X의 표준편차는

$\sigma(X)=\sqrt{10000\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}}=30$

$\therefore \sigma(-2X+100)=2\sigma(X)=2\times 30$

$=60$

59. 정답 ⑤

[해설] 20개의 5지선다형 문항에 임의로 답할 때, 답이 맞는 문항 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B\left(20,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서 Y의 분산과 표준편차는

$V(Y)=20\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25},\quad \sigma(X)=\sqrt{\frac{16}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

이때, 맞은 문항은 5점을 주고, 틀린 문항은 1점을 감점하므로 X와 Y의 관계는

$X=5Y-(20-Y)=6Y-20$

이므로 X의 표준편차는

$\sigma(X)=6\sigma(Y)=6\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{24\sqrt{5}}{5}$

60. 정답 3

[해설] 한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

이때, 확률변수 $(X-a)^2$의 확률분포표는 다음과 같다.

$(X-a)^2$	a^2	$(1-a)^2$	$(2-a)^2$	$(3-a)^2$	$(4-a)^2$	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$\therefore f(a)=\frac{1}{16}\{a^2+4(1-a)^2+6(2-a)^2+4(3-a)^2+(4-a)^2\}$

$=\frac{1}{16}(16a^2-64a+80)$

$=a^2-4a+5=(a-2)^2+1$

따라서 $f(a)$는 $a=2$일 때 최솟값 1을 가지므로 $\alpha=2,\ \beta=1$이다.

$\therefore \alpha+\beta=3$

다른 풀이

한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=4\times\frac{1}{2}=2,\ \ V(X)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$

즉, $E(X^2)=\{E(X)\}^2+V(X)=2^2+1=5$이므로

$f(a)=E((X-a)^2)=E(X^2-2aX+a^2)$

$=E(X^2)-2aE(X)+a^2$

$=a^2-4a+5=(a-2)^2+1$

따라서 $f(a)$는 $a=2$일 때 최솟값 1을 가지므로 $\alpha=2,\ \beta=1$이다.

$\therefore \alpha+\beta=3$

61. 정답 ③

[해설] 한 개의 주사위를 3번 던져서 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라고 하면 Y는 이항분포 $B\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

이때, 확률변수 X는 $X=-Y+2(3-Y)=6-3Y$이므로 $X\ge 3$일 때 $6-3Y\ge 3,\ Y\le 1$이다.

$\therefore P(X\ge 3)=P(Y\le 1)=P(Y=1)+P(Y=0)$

$={}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$

62. 정답 ③

[해설] ㄱ. $Y=20-X$이므로

$P(10\le Y\le 12)=P(10\le 20-X\le 12)$

$=P(8\le X\le 10)$ (참)

ㄴ. 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=\frac{1}{2}\cdot 20=10$

$Y=20-X$에서 $E(Y)=E(20-X)=20-E(X)=10$

$\therefore E(Y)=E(X)$ (참)

ㄷ. $Y=20-X$에서 $V(Y)=V(20-X)=V(X)$

$\therefore V(Y)=V(X)$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

63. 정답 ②

[해설] 확률변수 $X+Y$는 x축의 방향 또는 y축의 방향으로 이동한 횟수를 나타낸다.

따라서 주사위를 한 번 던졌을 때, x축의 방향으로 이동할 확률은 $\frac{1}{3}$이고 y축의 방향으로 이동할 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 x축 또는 y축의 방향으로 이동할 확률은 $\frac{2}{3}$가 된다.

따라서 확률변수 $X+Y$의 값은 주사위에서 1, 2, 5, 6의 눈이 나오는 횟수와 같으므로 이항분포 $B\left(30,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\therefore V(X+Y)=30\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{20}{3}$

64. 정답 ③

[해설] 3개의 제품과 상자가 모두 합격품일 확률은

$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{48}{125}$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(500,\ \frac{48}{125}\right)$을 따르므로

$E(X)=500\times\frac{48}{125}=192$

65. 정답 ④

[해설]

방정식 $ax^2+bx+1=0$이 유리수의 근을 가지려면 b^2-4a가 제곱수가 되어야 한다.

따라서 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5)$ 이므로

$P(C)=\frac{7}{36}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(144,\ \frac{7}{36}\right)$을 따르므로

$V(X)=144\times\frac{7}{36}\times\frac{29}{36}=\frac{203}{9}$

66. 정답 ⑤

[해설] 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르고

$f(x)=P(X\le 5x+50)=P(X\le [5x+50])$

$=\sum_{n=0}^{[5x+50]}{}_{100}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

(단, $[5x+50]$은 $5x+50$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

ㄱ. $V(X)=100\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=25$ (참)

ㄴ. $f(-0.9)=P(X\le 45)=\sum_{n=0}^{45}{}_{100}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=\sum_{n=55}^{100}{}_{100}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

$f(0.9)+f(-0.9)=\sum_{n=0}^{54}{}_{100}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+\sum_{n=55}^{100}{}_{100}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=1$ (참)

ㄷ. $x_1\le x_2$이면 $[5x_1+50]\le[5x_2+50]$이므로

$f(x_1)=\sum_{n=0}^{[5x_1+50]}{}_{100}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\le\sum_{n=0}^{[5x_2+50]}{}_{100}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=f(x_2)$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

67. 정답 ②

[해설] 확률변수 X는 이항분포 $B\left(30,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(X)=\sum_{r=0}^{30}rP(X=r)$

$=30\times\frac{1}{6}$

$=5$

$\therefore \sum_{r=3}^{30}rP(X=r)=5-0.025-0.146$

$=4.829$

68. 정답 ③

[해설] 두 개의 주사위를 400회 던져 상금을 받는 횟수를 확률변수 X라 하고, 매 회 두 눈의 수의 곱이 a이하가 될 확률을 p라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B(400,\ p)$를 따른다.

$\therefore E(X)=400p,\ \ V(X)=400p(1-p)$

상금의 총액을 Y라 하면 $Y=20X$이므로

$m=E(Y)=E(20X)=20E(X)=8000p$

$\sigma^2=V(Y)=V(20X)=20^2V(X)=160000p(1-p)$

이때, $\sigma^2\leqq 15m$이므로 $160000p(1-p)\leqq 120000p$

$1-p\leqq \frac{3}{4}\qquad \therefore p\geqq \frac{1}{4}$

즉, $p\geqq \frac{1}{4}$이어야 하므로

$a=1$일 때, $p=\frac{1}{36}<\frac{1}{4}$

$a=2$일 때, $p=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}=\frac{1}{12}<\frac{1}{4}$

$a=3$일 때, $p=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}=\frac{5}{36}<\frac{1}{4}$

$a=4$일 때, $p=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{2}{9}<\frac{1}{4}$

$a=5$일 때, $p=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}=\frac{5}{18}\geqq\frac{1}{4}$

따라서 구하는 a의 최솟값은 5이다.

69. 정답 ⑤

[해설]

확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다.

$$P(X=r)={}_{10}C_r\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r}$$

$$\begin{aligned}\therefore E\left(4^X\right)&=\sum_{r=0}^{10}4^rP(X=r)\\&=\sum_{r=0}^{10}4^r\cdot{}_{10}C_r\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r}\\&=\sum_{r=0}^{10}{}_{10}C_r\left(\frac{8}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r}\\&=\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)^{10}\\&=3^{10}\end{aligned}$$

70. 정답 ③

[해설]

앞면이 나온 횟수를 Y라고 할 때 $Y=n$이면 점 A의 좌표는 $A(1+3+5+\cdots+(2n-1))$이다.

이때, $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$이므로 점 A의 좌표는 $A\left(n^2\right)$이다.

따라서 확률변수 Y에 대하여 점 A의 좌표인 확률변수 X는 $X=Y^2$이다.

한편 Y는 이항분포 $B\left(40,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(Y)=40\times\frac{1}{2}=20$

$V(Y)=40\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=10$

$$\begin{aligned}\therefore E(X)&=E\left(Y^2\right)=V(Y)+\{E(Y)\}^2\\&=10+400\\&=410\end{aligned}$$

71. 정답 360

[해설] 매 시행에서 노란 공이 나올 확률은 $\frac{3}{m+3}$이므로

확률변수 X는 이항분포 $B\left(45,\ \frac{3}{m+3}\right)$을 따른다.

이때, $E(X)=15$이므로

$45\times\frac{3}{m+3}=15\qquad \therefore\ m=6$

따라서 X는 이항분포 $B\left(45,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$V(X)=45\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=10$

$\therefore\ V(mX)=V(6X)=6^2V(X)=360$

72. 정답 425

[해설] 두 개의 주사위를 던질 때, 두 눈의 합이 4의 배수일 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(80,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$E(X)=80\times\frac{1}{4}=20,\ \ V(X)=80\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=15$이므로

$E\left(X^2\right)=V(X)+\{E(X)\}^2=15+400=415$

이때, $E\left(5X^2+k\right)=2500$이므로

$5\times 415+k=2500\quad \therefore k=425$

73. 정답 512

[해설] 확률변수 X는 이항분포 $B\left(9,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로 4의 눈이 나오는 횟수 X가 x일 확률 $P(X=x)$는

$P(X=x)={}_9\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{9-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$

이때의 상금은 7^x원 이므로 구하는 기댓값은

$$\begin{aligned}E\left(7^X\right)&=\sum_{x=0}^{9}P(X=x)\cdot 7^x\\&=\sum_{x=0}^{9}{}_9C_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{9-x}\cdot 7^x\\&=\sum_{x=0}^{9}{}_9C_x\left(\frac{7}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{9-x}\\&=\left(\frac{7}{6}+\frac{5}{6}\right)^9=2^9=512(\text{원})\end{aligned}$$

$\therefore a=512$

74. 정답 47

[해설]

사건 E가 일어나는 경우는 순서쌍 $(m,\ n)$이

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4)$

$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4)$

$(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4)$

$(4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)$

일 때 이므로 사건 E가 일어날 확률은 $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(12,\ \frac{5}{12}\right)$를 따르므로

X의 분산은

$V(X)=12\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{35}{12}$

$\therefore\ p+q=12+35=47$

75. 정답 40

[해설]

세 개의 동전을 동시에 던질 때 세 개 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{8}$이므로

k번째 시행에서 처음으로 세 개 모두 앞면이 나올 확률은

$P(X=k)=\left(\frac{7}{8}\right)^{k-1}\frac{1}{8}$

$\therefore P(X\le n)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=n)$

$=\frac{1}{8}\left\{1+\frac{7}{8}+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\cdots+\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\right\}$

$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{7}{8}\right)^n}{1-\frac{7}{8}}$

$=1-\left(\frac{7}{8}\right)^n$

$1-\left(\frac{7}{8}\right)^n\ \ge 0.99,\ \left(\frac{7}{8}\right)^n\ \le\frac{1}{100}$

양변에 상용로그를 취하면

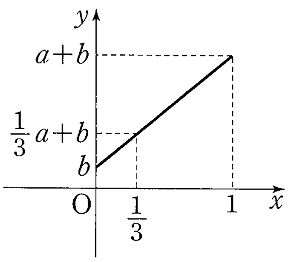
$n\log\frac{7}{8}\le -2$

$\therefore n\ge\frac{2}{\log 8-\log 7}=40$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 40이다.

76. 정답 ③

[해설] $0\le X\le 1$인 범위에서 $f(x)=ax+b$이고 $P\left(X\le\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$이므로 오른쪽 그림에서



$P\left(X\le\frac{1}{3}\right)$

$=\left(b+\frac{1}{3}a+b\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$

$\therefore a+6b=4\ \cdots$ ㉠

한편, $0\le X\le 1$인 범위에서 x축과 $f(x)$로 이루어진 도형의 넓이는 1이므로 $(b+a+b)\times 1\times\frac{1}{2}=1$

$\therefore a+2b=2\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1,\ b=\frac{1}{2}$이고 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{6}$이므로

$P\left(X\le\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{6}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{9}$

77. 정답 ③

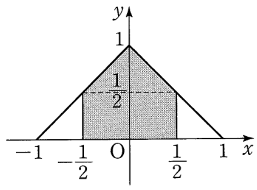
[해설] $f(x)$**의** 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 6\times a=1\qquad\therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore f(1)=\frac{1}{3}$

78. 정답 ⑤

[해설]



$P\left(|X|\le\frac{1}{2}\right)=P\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)$은 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-\frac{1}{2},x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$P\left(|X|\le\frac{1}{2}\right)=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\frac{1}{2}\right\}=\frac{3}{4}$

79. 정답 ①

[해설] $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 3\times 2a=1\qquad\therefore\ a=\frac{1}{3}$

$f(b)=\frac{b}{3},\ f(2)=\frac{2}{3}$이고, $P(b\le X\le 2)$는 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=b,\ x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

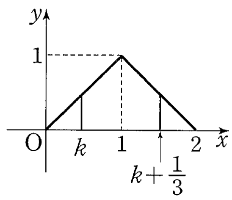
$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{3}+\frac{2}{3}\right)(2-b)=\frac{1}{2}$

$\frac{4-b^2}{3}=1\qquad\therefore\ b^2=1$

$\therefore\ a+b^2=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

80. 정답 ①

확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이때



$P\left(k\le X\le k+\frac{1}{3}\right)$이 최대가 되려면 k, $k+\frac{1}{3}$이 직선 $x=1$에 대하여 대칭이 되어야 한다.

즉, $k,\ k+\frac{1}{3}$의 중점의 x좌표가 1이 되어야 한다.

$\frac{k+k+\frac{1}{3}}{2}=1,\quad 2k+\frac{1}{3}=2$

$\therefore\ k=\frac{5}{6}$

81. 정답 ⑤

[해설] $P(X\le k)=P(X\ge k)$이면 $P(X\le k)+P(X\ge k)=1$이므로 $P(X\ge k)=\frac{1}{2}$ (단, $0<k<3$)

$x \geq 0$일 때, $f(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$이므로

$P(X \geq k) = P(k \leq X \leq 3) = \frac{1}{2}(3-k)\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$(3-k)^2 = 6$에서 $k = 3 \pm \sqrt{6}$

이때, $0 < k < 3$이므로 $k = 3 - \sqrt{6}$

82. 정답 ②

[해설] $6x^2 - 5x + 1 = 0$에서

$(2x-1)(3x-1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{1}{3}$

$P(X \leq 1) < P(X \leq 2)$이므로

$P(X \leq 1) = \frac{1}{3}, P(X \leq 2) = \frac{1}{2}$

$\therefore P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

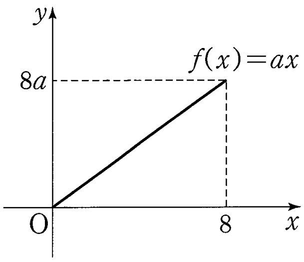
83. 정답 ⑤

[해설] $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times 8 \times 8a = 1$

$\therefore a = \frac{1}{32}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{32}x$



직선 $y = 2x + X$와 포물선 $y = x^2 + 2Xx + 5 - X$가 서로 만나려면 방정식 $x^2 + 2Xx + 5 - X = 2x + X$

즉, $x^2 + 2(X-1)x + 5 - 2X = 0$이 실근을 가져야 한다.

$\frac{D}{4} = (X-1)^2 - (5-2X) \geq 0$에서

$X^2 - 4 \geq 0, \ (X+2)(X-2) \geq 0$

$\therefore X \leq -2$ 또는 $X \geq 2$

이때, $0 \leq X \leq 8$이므로 $2 \leq X \leq 8$이다.

따라서 구하는 확률은

$$P(2 \leq X \leq 8) = 1 - P(0 \leq X \leq 2) = 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

84. 정답 ③

[해설] 확률변수 X의 평균을 m, 표준편차를 σ라고 하면

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

ㄱ. $f(x)$는 지수함수의 함숫값이므로 $f(x) > 0$(참)

ㄴ. [반례] $\sigma = \frac{1}{2\pi}, x = m$ 이면 $f(m) = \sqrt{2\pi} > 1$(거짓)

ㄷ. 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때,

$P(X \leq m) = \frac{1}{2}$

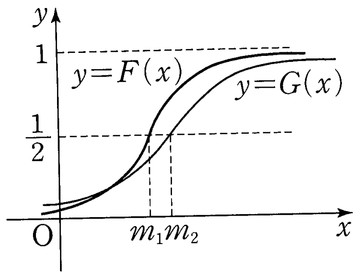
따라서 오른쪽 그림에서

$E(X) = m_1, E(Y) = m_2$

라 하면 $m_1 < m_2$이므로

$E(X) < E(Y)$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



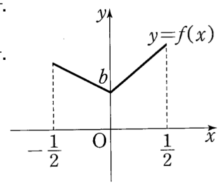
85. 정답 ③

[해설]

구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$에서 $f(x) \geq 0$이므로 $b \geq 0$이다.

따라서 $y = f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, $y = f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left\{f\left(-\frac{1}{2}\right) + b\right\} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left\{b + f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = 1$

$\frac{1}{4}\left\{f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 2b\right\} = 1$

$\frac{1}{4}\left\{\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} + b\right) + \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} + b\right) + 2b\right\} = 1$

$\frac{1}{4}(1 + 4b) = 1$

$\therefore b = \frac{3}{4}$

86. 정답 ④

[해설]

$P(X \leq 1) = P(X \geq 1) = \frac{1}{2}$이므로

$P(1 \leq X \leq b) = p$라 하면 $P(X \leq a) = p$이므로

$P(a \leq X \leq 1) = \frac{1}{2} - p$

이때, $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X \leq 1) + P(1 \leq X \leq b)$

$= \left(\frac{1}{2} - p\right) + p = \frac{1}{2}$

이므로

$P(a \leq X \leq b) = 4P(X \leq a)$에서

$\frac{1}{2} = 4p \quad \therefore p = \frac{1}{8}$

$\therefore P(X \geq b) = \frac{1}{2} - P(1 \leq X \leq b) = \frac{1}{2} - p$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

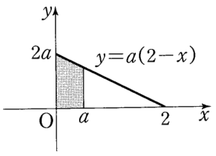
87. 정답 23

[해설]

$0 \leq x \leq 2$에서 $f(x) \geq 0$이고, 직선 $y = a(2-x)$ 및 직선 $x = 0, x = 2$로 둘러싸인 도형의 넓이가

1이므로 $a>0$이고, $\frac{1}{2}\times 2\times 2a=1$에서

$a=\frac{1}{2}$이다.



이때, $P(0\le X\le a)$는 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로

$$P(0\le X\le a)=\frac{1}{2}\times a\times\{2a+f(a)\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{7}{16}$$

$\therefore m+n=16+7=23$

88. 정답 20

[해설] 확률밀도함수의 정의에 의해

$$\frac{1}{2}\times 1\times a+\frac{1}{2}\times 3\times 3a=1\quad\therefore a=\frac{1}{5}$$

또한, 두 점 $(1,0),\left(4,\frac{3}{5}\right)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{5}(x-1)$이므로

$x=2$에서의 함숫값은 $\frac{1}{5}$이다.

$\therefore P(0\le X\le 2)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

$\therefore 100P(0\le X\le 2)=100\times\frac{1}{5}=20$

89. 정답 ④

[해설] 확률변수 X는 정규분포를 따르고 $P(X\le 60)=P(X\ge 80)$이므로 X의 평균은 70이다.

따라서 $P(X\ge 70)=0.5$이고 $P(X\ge 80)=P(70\le X\le 80)$이므로 $P(X\ge 80)=P(70\le X\le 80)=0.25$이다.

$\therefore P(X\ge 60)=P(60\le X\le 70)+P(X\ge 70)$

$=P(70\le X\le 80)+P(X\ge 70)=0.25+0.5=0.75$

90. 정답 ①

[해설] 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$m=\frac{10+8}{2}=9$

$P(c\le X\le c+30)$의 값이 최대가 되므로

$\frac{c+c+30}{2}=9\quad\therefore c=-6$

91. 정답 ②

[해설]

ㄱ. $E(X)=m,\ E(Y)=2m$이므로 $2E(X)=E(Y)$ (참)

ㄴ. 정규분포를 따르는 두 확률변수의 확률밀도함수의 최댓값이 같으므로 그래프의 폭이 같다.

그러므로 X와 Y의 분산은 같다. 즉, $V(X)=V(Z)$ (참)

ㄷ. Y의 분산보다 Z의 분산이 더 크다. 그러나 $y=h(x)$의 그래프의 높이가 $y=g(x)$의 그래프의 높이의 $\frac{1}{2}$배라고 하여 분산이 2배인 것은 아니다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

92. 정답 ③

[해설] $P(X\ge 175)=P\left(Z\ge\frac{175-170}{5}\right)=P(Z\ge 1)$

$=0.5-P(0\le Z\le 1)=0.5-0.3413=0.1587$

93. 정답 ⑤

[해설] $P(|X-7|\le 1)=P(-1\le X-7\le 1)=P(6\le X\le 8)$이고

X가 정규분포 $N(10,\ 2^2)$을 따르므로

$P(6\le X\le 8)=P\left(\frac{6-10}{2}\le Z\le\frac{8-10}{2}\right)$

$=P(-2\le Z\le -1)=P(1\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$

94. 정답 ②

[해설] $f(50-x)=f(50+x)$이므로 $f(x)$는 $x=50$에 대하여 대칭이다. $\therefore m=50$

$P(50\le X\le 58)=P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로 $\frac{58-50}{\sigma}=2$

$\therefore\sigma=4$

$\therefore P(44\le X\le 60)=P(-1.5\le Z\le 2.5)$

$=P(0\le Z\le 1.5)+P(0\le Z\le 2.5)$

$=0.4332+0.4938=0.9270$

95. 정답 ③

[해설] ㄱ. $H(2.5)$에서 X는 정규분포 $N(20,2.5^2)$을 따르므로

$$H(2.5)=P(X\le 15)=P\left(\frac{X-20}{2.5}\le\frac{15-20}{2.5}\right)$$
$$=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)\text{(참)}$$

ㄴ. $H(2)$에서 X는 정규분포 $N(20.2^2)$을 따르므로

$H(2)=P(X\le 15)=P\left(\frac{X-20}{2}\le\frac{15-20}{2}\right)$

$=P(Z\le -2.5)=P(Z\ge 2.5)$

ㄱ에서 $H(2.5)=P(Z\ge 2)$이므로

$H(2)<H(2.5)$(참)

ㄷ. $H(5)$에서 X는 정규분포 $N(20,5^2)$을 따르므로

$H(5)=P(X\le 15)=P\left(\frac{X-20}{5}\le\frac{15-20}{5}\right)$

$=P(Z\le -1)=P(Z\ge 1)=0.5-P(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

한편,

$5H(2)=5P(Z\ge 2.5)=5(0.5-P(0\le Z\le 2.5))<5(0.5-P(0\le Z\le 2))$

$=5(0.5-0.4772)=5\times 0.0228=0.1140$

$\therefore H(5)>5H(2)$(거짓)

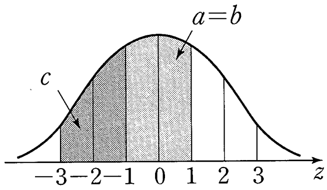
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

96. 정답 ①

[해설] 확률변수 $X,\ Z=\frac{Y-2}{2}$는 모두 표준정규분포 $N(0,1^2)$을 따른

다.

$a = P(-1 \leq X \leq 1)$
$= P(-1 \leq Z \leq 1)$
$b = P(0 \leq Y \leq 4)$
$= P(-1 \leq Z \leq 1)$
$c = P(-4 \leq Y \leq 0)$
$= P(-3 \leq Z \leq -1)$



따라서 오른쪽 그림의 표준정규분포곡선에서 $a = b > c$

97. 정답 ③

[해설] A, B, C의 키를 표준화시킨 값을 각각 z_1, z_2, z_3라고 하면

$$z_1 = \frac{175-172}{4} = 0.75$$

$$z_2 = \frac{172-170}{3} = 0.66\times\times\times$$

$$z_3 = \frac{177-173}{5} = 0.8$$

$z_3 < z_1 < z_3$이므로 번호가 빠른 순서는 B, A, C이다.

98. 정답 ⑤

[해설] 확률변수 X, Y를 각각 표준화한 확률변수 $\frac{X-12}{3}$, $\frac{Y-10}{4}$은 모두 표준정규분포 $N(0, 1^2)$을 따르므로

$P(6 \leq X \leq 15) = P(6 \leq Y \leq k)$에서

$$P\left(\frac{6-12}{3} \leq Z \leq \frac{15-12}{3}\right) = P\left(\frac{6-10}{4} \leq Z \leq \frac{k-10}{4}\right)$$

$$P(-2 \leq Z \leq 1) = P\left(-1 \leq Z \leq \frac{k-10}{4}\right)$$

$$\frac{k-10}{4} = 2 \quad \therefore k = 18$$

99. 정답 ①

[해설] 정규분포곡선은 직선 $x = m$에 대하여 대칭이므로 $f(x) = f(6-x)$에서

$$m = \frac{x+(6-x)}{2}$$

즉, 확률변수 X는 정규분포 $N(3, 2^2)$을 따르므로 $Z = \frac{X-3}{2}$은 표준정규분포$N(0, 1^2)$을 따른다.

$$P(2 \leq X \leq 5) = P\left(\frac{2-3}{2} \leq Z \leq \frac{5-3}{2}\right)$$
$= P(-0.5 \leq Z \leq 1)$
$= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1)$
$= 0.1915 + 0.3413$
$= 0.5328$

100. 정답 ④

[해설] $P(-2 \leq X \leq 4) = P\left(\frac{-2-3}{2} \leq Z \leq \frac{4-3}{2}\right)$

$= P\left(-\frac{5}{2} \leq Z \leq \frac{1}{2}\right) = a$

$P(-2 \leq X \leq 6) = P\left(\frac{-2-3}{2} \leq Z \leq \frac{6-3}{2}\right)$

$= P\left(-\frac{5}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right) = b$에서

$P\left(\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right) = P\left(-\frac{5}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right) - P\left(-\frac{5}{2} \leq Z \leq \frac{1}{2}\right)$

$= b - a$

$\therefore P(4Z^2 - 8Z + 3 \geq 0) = P((2Z-1)(2Z-3) \geq 0)$

$= P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(Z \geq \frac{3}{2}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right)$

$= 1 - (b-a)$

$= 1 + a - b$

101. 정답 ②

[해설] 상우가 등교하는 데 걸리는 시간은 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따르므로 $Z = \frac{X-20}{4}$은 표준정규분포$N(0, 1^2)$을 따른다. 상우가 지각하는 경우는 등교 시간이 25분보다 더 걸릴 때이므로 구하는 확률은

$P(X > 25) = P\left(Z > \frac{25-20}{4}\right)$
$= P(Z > 1.25)$
$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.25)$
$= 0.5 - 0.3944$
$= 0.1056$

102. 정답 ⑤

[해설] $P(X \geq 2) = P\left(Z \geq \frac{2-(m+2)}{2}\right) = P\left(Z \geq -\frac{m}{2}\right)$이므로

ㄱ. $f(0) = P(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f(2) - f(-2) = P(Z \geq -1) - P(Z \geq 1)$
$= P(-1 \leq Z \leq 1)$
$= 1 - 2P(Z \geq 1)$
$= 1 - 2f(-2)$ (참)

ㄷ. $m < n$일 때

$f(n) = P\left(Z \geq -\frac{n}{2}\right)$

$f(m) = P\left(Z \geq -\frac{m}{2}\right)$

이때, $-\frac{n}{2} < -\frac{m}{2}$이므로 $f(m) < f(n)$이다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

103. 정답 ⑤

[해설] 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(0, \sigma^2)$, $N\left(0, \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

ㄱ. 확률변수 X의 평균은 0이므로 $P(1 \leq X \leq 2) > P(2 \leq X \leq 3)$ (참)

ㄴ. $P(-\sigma \leq X \leq 0) = P(-1 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 1)$

$P\left(0 \le Y \le \frac{\sigma}{2}\right) = P(0 \le Z \le 1)$

$\therefore P(-\sigma \le X \le 0) = P\left(0 \le Y \le \frac{\sigma}{2}\right)$ (참)

ㄷ. $P(|X| \le a) = P\left(\left|\frac{X-0}{\sigma}\right| \le \frac{a-0}{\sigma}\right) = P\left(|Z| \le \frac{a}{\sigma}\right)$

$P(|Y| \le b) = P\left(\left|\frac{Y-0}{\frac{\sigma}{2}}\right| \le \frac{b-0}{\frac{\sigma}{2}}\right) = P\left(|Z| \le \frac{2b}{\sigma}\right)$

이므로 $P(|X| \le a) = P(|Y| \le b)$이면 $a = 2b$이다.

$a = 2b$이고 $a > 0,\ b > 0$이므로 $a > b$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

104. 정답 ③

[해설] 확률변수 X를 공장에서 생산되는 병의 내압강도라 놓으면 X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다.

$G = 0.8$이면 $0.8 = \frac{m-40}{3\sigma}$이므로 $m = 40 + 2.4\sigma$

임의로 추출된 한 개의 병이 불량품일 확률은 $P(X < 40)$이므로

$P(X < 40) = P\left(Z < \frac{40-(40+2.4\sigma)}{\sigma}\right)$

$= P(Z \le 2.4) = 0.5 - P(0 \le Z \le 2.4)$

$= 0.5 - 0.4918 = 0.0082$

105. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. $m = 0$일 때, $P(X \ge 0) = P\left(Z \ge \frac{0-0}{1}\right) = (Z \ge 0) = \frac{1}{2}$이다.

$f(0) = \frac{1}{2}$이므로 $y = f(m)$의 그래프는 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$을 지난다. (참)

ㄴ. $P(X \ge 0)$은 $X \ge 0$일 확률이고 m의 값에 따라 $0 < P(X \ge 0) < 1$인 값을 가지므로 함수 $f(m)$의 치역은 $\{y | 0 < y < 1\}$이다. (참)

ㄷ. $f(m) = P(X \ge 0) = P\left(Z \ge \frac{0-m}{1}\right) = P(Z \ge -m)$이다.

$m_1 < m_2$이면 $-m_2 < -m_1$이므로

$P(Z \ge -m_1) < P(Z \ge -m_2)$

$\therefore f(m_1) < f(m_2)$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

106. 정답 108

[해설]

$P(X \ge 3) = P(X \le 21)$이므로 표준화된 정규분포에서

$P\left(Z \ge \frac{3-m}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{21-m}{\sigma}\right)$

이 성립한다.

따라서 $\frac{3-m}{\sigma} + \frac{21-m}{\sigma} = 0$에서 $m = E(X) = 12$

또, $V\left(\frac{1}{4}X + 10\right) = 4$에서 $\frac{1}{16}V(X) = 4$이므로 $V(X) = 64$

$\therefore \sigma = \sqrt{V(X)} = 8$

$\therefore E(\sigma X + m) = E(8X + 12) = 8E(X) + 12$

$= 8 \times 12 + 12 = 108$

107. 정답 ③

[해설] 빵과 우유 한 잔을 같이 식사하는 사람들이 섭취하는 총 열량을 확률변수 X라고 하면 X는 평균이$203 + 84 = 287$이고 표준편차가 13인 정규분포 $N(287,\ 13^2)$을 따른다.

$\therefore P(X \ge 300) = P\left(Z \ge \frac{300-287}{13}\right) = P(Z \ge 1)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

따라서 300칼로리 이상의 열량을 섭취하는 사람은 전체의 15.87%이다.

108. 정답 ②

[해설]

학생들의 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(36, 4^2)$을 따른다.

이때, $P(38 \le X \le 42) = P\left(\frac{38-36}{4} \le Z \le \frac{42-36}{4}\right)$

$= P(0.5 \le Z \le 1.5)$

$= P(0 \le Z \le 1.5) - P(0 \le Z \le 0.5)$

$= 0.43 - 0.19 = 0.24$

이므로 응시 학생 수는 $\frac{84}{0.24} = 350$

109. 정답 ②

[해설]

키가 $170cm$ 이상 $180cm$ 미만인 사원들의 몸무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(72, 4^2)$을 따르므로 키가 $170cm$ 이상 $180cm$ 미만인 사원

중 임의의 한 사람을 선택할 때, 몸무게가 $80kg$ 이상일 확률은

$P(X \ge 80) = P\left(Z \ge \frac{80-72}{4}\right) = P(Z \ge 2)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2) = 0.5 - 0.477$

$= 0.023$

또, 키가 $180cm$ 이상 $190cm$ 미만인 사원들의 몸무게를 확률변수 Y라 하면

Y는 정규분포 $N(74, 6^2)$을 따르므로 키가 $180cm$ 이상 $190cm$ 미만인 사원

중 임의의 한 사람을 선택할 때, 몸무게가 $80kg$ 이상일 확률은

$P(Y \ge 80) = P\left(Z \ge \frac{80-74}{6}\right) = P(Z \ge 1)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 1) = 0.5 - 0.341$

$= 0.159$

따라서 사원 1000명 중 한 명을 택할 때, 키가 $170cm$ 이상 $190cm$ 미만이고

몸무게가 $80kg$ 이상일 확률은

$0.4 \times 0.023 + 0.2 \times 0.159 = 0.041$

이므로 사원의 수는

$1000 \times 0.041 = 41$(명)

110. 정답 7

[해설] 온도계의 눈금을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(40,\ \sigma^2)$을 따르고 이 회사의 불량률이17.7%이므로

$P(|X - 40| \ge 1) = 0.177$

즉, $P(X \le 39) + P(X \ge 41) = 0.177$

한편,

$P(X \leq 39) + P(X \geq 41) = P\left(Z \leq \dfrac{39-40}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \dfrac{41-40}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \leq \dfrac{-1}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \dfrac{1}{\sigma}\right)$

$= 2\left\{0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{1}{\sigma}\right)\right\} = 0.177$

$P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{1}{\sigma}\right) = 0.4115 \quad \therefore \dfrac{1}{\sigma} = 1.35$

$\therefore P(|X-40| \geq 2) = P(X \leq 38) + P(X \geq 42)$

$= P\left(Z \leq \dfrac{38-40}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \dfrac{42-40}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \leq \dfrac{-2}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \dfrac{2}{\sigma}\right)$

$= 2(0.5 - 0.4965) = 0.007$

$\therefore 1000p = 1000 \times 0.007 = 7$

111. 정답 ④

상위 10% 이내에 드는 달걀의 최소 무게를 a g이라 하면 달걀의 무게 X가 a 이상일 때 상위 10% 이내에 들어가므로

$P(X \geqq a) = 0.1,\ P\left(Z \geqq \dfrac{a-55}{6}\right) = 0.1$

$0.5 - P\left(0 \leqq Z \leqq \dfrac{a-55}{6}\right) = 0.1,\ P\left(0 \leqq Z \leqq \dfrac{a-55}{6}\right) = 0.4$

즉, $\dfrac{a-55}{6} = 1.28$이므로 $a = 62.68$

112. 정답 ④

[해설] 수험생의 점수를 X라 하면 X는 정규분포 $N(410,\ 20^2)$을 따른다. 합격자의 최저 점수를 α라 하면 합격할 확률은

$P(X \geq \alpha) = \dfrac{40}{2000} = 0.02$이므로

$P(X \geq \alpha) = P\left(Z \geq \dfrac{\alpha - 420}{20}\right) = 0.02$

$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{\alpha - 410}{20}\right) = 0.02$

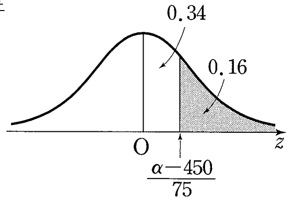
$P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{\alpha - 420}{20}\right) = 0.48$

즉, $\dfrac{\alpha - 420}{20} = 2$이므로 $\alpha = 450$

113. 정답 ⑤

[해설] 성적을 X라 하면 X는 정규분포 $N(450,\ 75^2)$을 따르므로

$Z = \dfrac{X-450}{75}$



한편, 합격자 최저 점수를 α라 하면

$P(X \geq \alpha) = \dfrac{320}{2000} = 0.16$

$P(x \geq \alpha) = P\left(Z \geq \dfrac{\alpha - 450}{75}\right) = 0.16$

즉, $0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{\alpha - 450}{75}\right) = 0.16$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{\alpha - 450}{75}\right) = 0.34$

그런데 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.34$이므로

$\dfrac{\alpha - 450}{75} = 1 \qquad \therefore \alpha = 525$(점)

114. 정답 ②

[해설] 적성 검사의 소요 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(90,\ 5^2)$을 따르므로 $Z = \dfrac{X-90}{5}$

한편, 상위 5% 안에 드는 최대 소요 시간을 α분이라 하면

$P(X \leq \alpha) = 0.05$

$P(X \leq \alpha) = P\left(Z \leq \dfrac{\alpha - 90}{5}\right) = 0.05$

즉, $0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{90 - \alpha}{5}\right) = 0.05$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{90-\alpha}{5}\right) = 0.45$

그런데 표준정규분포에서 $P(0 \leq Z \leq 1.65) = 0.45$이므로

$\dfrac{90-\alpha}{5} = 1.65 \qquad \therefore \alpha = 81.75$

따라서 소요 시간의 최댓값은 81.75분이다.

***115.* 정답 ④**

[해설] 입학시험에서 합격자의 최저 점수를 x라고 하면

$P(X \geq x) = \dfrac{1}{20} = 0.05$

$P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{x-640}{20}\right) = 0.5 - 0.05 = 0.45$에서

$\dfrac{x-640}{20} = 1.64$

$\therefore x = 672.8$

116. 정답 ①

[해설] 우 이상의 평가를 받으려면 상위 15% 이내에 들어야 하므로 국어 성적을 확률변수 X라 하고 상위 15%의 최저 점수를 x라 하면

$P(X \geq x) = P\left(Z \geq \dfrac{x-58}{12}\right) = 0.15$

한편, 주어진 표준정규분포표에서

$0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.04) = 0.5 - 0.35 = 0.15$이므로

$P(Z \geq 1.04) = 0.15$

따라서 $\dfrac{x-58}{12} = 1.04,\ x - 58 = 12.48$

$\therefore x = 70.48$

따라서 최소 71점 이상을 받아야 한다.

117. 정답 ⑤

[해설] 150번 시행 중 흰 공이 나오는 횟수를 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(150,\ \dfrac{2}{5}\right)$를 따른다.

시행 횟수 150은 충분히 큰 수이고 평균 $m = 150 \times \dfrac{2}{5} = 60$, 분산 $\sigma^2 = 150 \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} = 36$이므로 X는 정규분포 $N(60,\ 6^2)$을 따른다.

$\therefore P(45 \leq X \leq 75) = P\left(\dfrac{45-60}{6} \leq Z \leq \dfrac{75-60}{6}\right)$

$= P(-2.5 \le Z \le 2.5) = 2P(0 \le Z \le 2.5) = 0.98$

118. 정답 ⑤

180번의 독립시행에서 $+5$만큼 움직이는 횟수를 X, -1만큼 이동하는 횟수를 Y라 하자.

이때, $\begin{cases} X+Y=180 \\ 5X-Y \ge 60 \end{cases}$이 성립해야 한다. 즉 $X \ge 40$

여기서 확률변수 X의 분포가 이항분포 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(X) = 180 \times \frac{1}{6} = 30,\ \ V(X) = 180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 5^2$

이때, $n = 180$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(30, 5^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(X \ge 40) = P\left(Z \ge \frac{40-30}{5}\right) = P(Z \ge 2)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2) = 0.5 - 0.4772$

$= 0.0228$

119. 정답 ⑤

[해설] A제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(60,\ 10^2)$을 따르므로 X가 80kg 이상일 확률은

$P(X \ge 80) = P\left(Z \ge \frac{80-60}{10}\right) = P(Z \ge 2)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2) = 0.02$

따라서 불량품의 개수를 Y라 하면 Y는 이항분포 $B\left(2500,\ \frac{2}{100}\right)$를 따르고 2500은 충분히 큰 수이므로

$E(Y) = 2500 \times \frac{2}{100} = 50$

$V(Y) = 2500 \times \frac{2}{100} \times \frac{98}{100} = 49$

따라서 Y는 정규분포 $N(50,\ 7^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(Y \ge 57) = P\left(Z \ge \frac{57-50}{7}\right) = P(Z \ge 1)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 1) = 0.16$

120. 정답 ⑤

[해설] 합격자 중 등록한 학생 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(192,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

이때, $E(X) = 192 \times \frac{3}{4} = 144$,

$\sigma(X) = \sqrt{192 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = 6$이고 192는 충분히 큰 수이므로

이항분포 $B\left(192,\ \frac{3}{4}\right)$은 근사적으로 정규분포 $N(144,\ 6^2)$을 따른다.

$\therefore P(X \ge 132) = P\left(Z \ge \frac{132-144}{6}\right) = P(Z \ge -2)$

$= 0.5 + P(0 \le Z \le 2) = 0.9772$

***121.* 정답** ②

[해설] 보험금을 지급받는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B(10000,\ 0.02)$를 따른다.

이때, X의 평균과 분산이 각각

$E(X) = 10000 \times 0.02 = 200$

$V(X) = 10000 \times 0.02 \times 0.98 = 196$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(200,\ 14^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(X \ge 221) \fallingdotseq P\left(Z \ge \frac{221-200}{14}\right)$

$= P(Z \ge 1.5)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 1.5)$

$= 0.5 - 0.4332$

$= 0.0668$

***122.* 정답** ⑤

[해설] 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{9}{10}\right)$를 따른다.

이때, $m = 100 \times \frac{9}{10} = 90,\ \sigma^2 = 100 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = 9$이고,

100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 3^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(X=81) + P(X=82) + \cdots + P(X=96)$

$= P(81 \le X \le 96)$

$\fallingdotseq P\left(\frac{81-90}{3} \le Z \le \frac{96-90}{3}\right)$

$= P(-3 \le Z \le 2)$

$= P(-3 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2)$

$= P(0 \le Z \le 3) + P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.4987 + 0.4772 = 0.9759$

***123.* 정답** ④

[해설] $P(X=r) = {}_{1200}C_r \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{1200-r}$ 이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(1200,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르고, 1200은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(300,\ 15^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(X \ge a) = P\left(Z \ge \frac{a-300}{15}\right)$

$= P\left(\frac{a-300}{15} \le Z \le 0\right) + 0.5$

$= 0.8413$

즉, $P\left(\frac{a-300}{15} \le Z \le 0\right) = 0.3413$이므로

$\frac{a-300}{15} = -1 \qquad \therefore\ a = 285$

***124.* 정답** ②

[해설] 100번의 시행 중 앞면이 나온 횟수를 Y라 하면 P의 위치 X는

$X = 2Y + (-1) \cdot (100 - Y) = 3Y - 100$

$5 \le X \le 65$에서

$5 \le 3Y - 100 \le 65 \qquad \therefore\ 35 \le Y \le 55$

이때, 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르고 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(35 \le Y \le 55) \fallingdotseq P\left(\frac{35-50}{5} \le Z \le \frac{55-50}{5}\right)$

$= P(-3 \le Z \le 1)$

$= P(-3 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1)$
$= P(0 \le Z \le 3) + P(0 \le Z \le 1)$
$= 0.4987 + 0.3413 = 0.8400$

125. 정답 ①

[해설] 8점을 얻는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(1200, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때, 1200은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(300, 15^2)$을 따른다.

1200회의 시행 중 8점을 얻는 횟수를 X라 하면 3점을 잃는 횟수는 $1200 - X$이므로

$8X - 3(1200 - X) \ge 30 \qquad \therefore X \ge 330$

$\therefore P(X \ge 330) \fallingdotseq P\left(Z \ge \frac{330 - 300}{15}\right)$
$= P(Z \ge 2)$
$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2)$
$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

126. 정답 ②

[해설] $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ ……㉠

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$는 주기가 2π인 주기함수이므로

$0 \le x \le 2x$에서만 보면

$\frac{1}{2}\pi \le x \le \pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi$

일 때, ㉠을 만족한다.

따라서 x가 ㉠을 만족할 확률은 $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$이고 실수 하나하나를 뽑는 것은 독립이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따르고 400은 충분히 큰 수 이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$을 따른다.

$\therefore P(195 \le X \le 215)$
$\fallingdotseq P\left(\frac{195 - 200}{10} \le Z \le \frac{215 - 200}{10}\right)$
$= P(-0.5 \le Z \le 1.5)$
$= P(0 \le Z \le 0.5) + P(0 \le Z \le 1.5)$
$= 0.1915 + 0.4332 = 0.6247$

127. 정답 ①

[해설]

한 개의 구슬을 넣을 때 A로 나올 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 192개의 구슬을 넣을 때 A로 나오는 구슬의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(192, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때, $E(X) = 192 \times \frac{1}{4} = 48$, $V(X) = 192 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 36$이고 192는 충분히 큰 수 이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(48, 6^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(X \ge 54) = P\left(Z \ge \frac{54 - 48}{6}\right) = P(Z \ge 1)$
$= 0.5 - P(0 \le Z \le 1) = 0.5 - 0.3413$
$= 0.1587$

128. 정답 ④

[해설]

한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 주사위를 288번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(288, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때, 288은 충분히 큰 수이고

$E(X) = 288 \times \frac{1}{3} = 96$, $V(X) = 288 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 64$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(96, 8^2)$을 따른다.

또, 288번 중 3의 배수의 눈이 x번 나올 때, 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $P(2x)$, $Q(288 - x)$이므로 $|288 - x - 2x| \ge 12$에서

$x \ge 100$ 또는 $x \le 92$이다.

따라서 구하는 확률은

$P(X \ge 100) + P(X \le 92)$
$= P\left(Z \ge \frac{100 - 96}{8}\right) + P\left(Z \le \frac{92 - 96}{8}\right)$
$= P(Z \ge 0.5) + P(Z \le -0.5)$
$= 2\{0.5 - P(0 \le Z \le 0.5)\}$
$= 2(0.5 - 0.1915)$
$= 0.6170$

129. 정답 114

[해설] 과자 1봉지의 무게를 확률변수 Y라고 하면 Y는 정규분포 $N(210, 5^2)$을 따르므로 $Z = \frac{Y - 210}{5}$은 표준정규분포 $N(0, 1^2)$을 따른다.

과자 1봉지가 불량품으로 판정될 확률은

$P(Y < 200) = P\left(Z < \frac{200 - 210}{5}\right) = P(Z < -2)$
$= P(Z > 2) = 0.5 - P(0 \le Z \le 2)$
$= 0.5 - 0.4772$
$= 0.0228$

따라서 과자 5000봉지를 검사할 때, 불량품으로 판정되는 과자의 봉지 수 X는 이항분포 $B(5000, 0.0228)$을 따르므로 X의 평균은

$E(X) = 5000 \times 0.0228 = 114$

130. 정답 16

[해설] 회사에서 생산된 축구공의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(420, 5^2)$을 따른다.

이때, 축구 경기에서 사용할 수 없는 공의 무게를 410g 미만이거나 430g을 초과한 것이므로 불량품이 나올 확률은

$P(X < 410$ 또는 $X > 430)$
$= P(X < 410) + P(X > 430)$
$= P\left(Z < \frac{410 - 420}{5}\right) + P\left(Z > \frac{430 - 420}{5}\right)$

$= P(Z<-2)+P(Z>2) = P(Z>2)+P(Z>2)$

$= 2\{0.5-P(0 \le Z \le 2)\}$

$= 2(0.5-0.48) = 0.04$

따라서 불량품의 개수를 확률변수 Y라고 하면 Y는 이항분포 $B\left(3750,\ \frac{1}{25}\right)$을 따르고 평균 $E(Y) = 3750\times\frac{1}{25} = 150$, 분산 $V(Y) = 3750\times\frac{1}{25}\times\frac{24}{25} = 144$이다.

이때, 시행횟수 3750은 충분히 큰 수이므로 Y는 정규분포 $N(150,\ 12^2)$을 따른다.

$\therefore P(Y\ge 162) = P\left(Z \ge \frac{162-150}{12}\right) = P(Z\ge 1)$

$= 0.5-P(0\le Z\le 1) = 0.16$

$\therefore 100p = 16$

131. 정답 ④

[해설] 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 4인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균은

$E(\overline{X}) = m = 1\times0.1+2\times0.6+3\times0.3 = 2.2$

이때, $V(X) = 1\times0.1+4\times0.6+9\times0.3-2.2^2 = 0.36$

이므로 $V(\overline{X}) = 0.36\times\frac{1}{4} = 0.09$

132. 정답 ⑤

[해설] 모표준편차를 σ, $\overline{X}$의 표준편차를 $\sigma(\overline{X})$라 하면

$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = \frac{4}{10} = 0.4$이므로

$\sigma(3-2\overline{X}) = |-2|\sigma(\overline{X}) = 2\times0.4 = 0.8$

***133.* 정답** ④

[해설]

$E(\overline{X}) = 12,\ V(\overline{X}) = \frac{16}{4} = 4$이므로

$E\left(\overline{X}^2\right) = V(\overline{X}) + \{E(\overline{X})\}^2$

$= 4+144$

$= 148$

***134.* 정답** ④

[해설] 모집단 X의 평균을 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 같으므로

$E(X) = 10\times\frac{1}{2}+20\times a+30\times\left(\frac{1}{2}-a\right) = 18$

$\therefore a = \frac{1}{5}$

$\overline{X} = 20$인 경우는 $(10, 30), (20, 20), (30, 10)$일 때이므로 구하는 확률은

$P(\overline{X} = 20) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2} = \frac{17}{50}$

135. 정답 30

[해설] 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균은

$E(\overline{X}) = m = -1\times0.2+0\times0.3+1\times0.5 = 0.3$

$\therefore E(100\overline{X}) = 100E(\overline{X}) = 30$

***136.* 정답** 8

[해설] $E(X) = (-1)\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

$= 1\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}-\frac{1}{4} = 1$에서

$E(\overline{X}) = E(X) = \frac{1}{2}\quad \therefore m = \frac{1}{2}$

$V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{16}\quad \therefore n = 16$

137. 정답 ③

[해설] 모평균이 230, 모표준편차가 30이고 표본의 크기가 100이므로 표본의 평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(230,\ \frac{30^2}{100}\right)$, 즉 $N(230,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $P(\overline{X}\ge k) = P\left(Z\ge\frac{k-230}{3}\right) = 0.02$이므로

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-230}{3}\right) = 0.02$

$P\left(0\le Z\le\frac{k-230}{3}\right) = 0.48$

$\frac{k-230}{3} = 2,\ k-230 = 6\quad \therefore k = 236$

138. 정답 ④

[해설] 모평균이 n, 모표준편차가 $\frac{n}{2}$이고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(n,\ \left(\frac{n}{16}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $P(n\le\overline{X}\le 34) = P\left(0\le Z\le\frac{34-n}{\frac{n}{16}}\right) = P(0\le Z\le 1)$

에서 $\frac{34-n}{\frac{n}{16}} = 1$, $n = 34\times16-16n$

$\therefore n = 32$

139. 정답 ①

[해설] 캔 음료 한 개의 용량 X는 $m = 355$, $\sigma = 5$인 정규분포를 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(355,\ \left(\frac{5}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$, 즉 $N\left(355,\ \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 한 단위는 $4\overline{X}$의 확률분포와 같으므로 $Y = 4\overline{X}$라고 하면

$E(4\overline{X}) = 4E(\overline{X}) = 1420,\ \sigma(4\overline{X}) = 4\sigma(\overline{X}) = 10$이므로

Y는 정규분포 $N(1420,\ 10^2)$을 따른다.

$\therefore P(Y<1400) = P\left(Z<\frac{1400-1420}{10}\right)$

$= P(Z<-2) = 0.5-P(0\le Z\le 2) = 0.5-0.48 = 0.02$

$\therefore \frac{100000}{4}\times0.02 = 500$

따라서 하루에 평균 500단위의 불량품이 생긴다.

140. 정답 ①

[해설] 확률변수 X를 '○ ○ 뉴스'의 방송시간이라 하면 X는 정규분포 $N(50, 2^2)$을 따르므로 크기가 9인 표본을 임의추출하여 조사한 방송시간의 표본평균 $\overline{X}$는 $N\left(50, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

$P(49 \le \overline{X} \le 51) = P\left(\frac{49-50}{\frac{2}{3}} \le Z < \frac{51-50}{\frac{2}{3}}\right)$

$= \left(-\frac{3}{2} \le Z \le \frac{3}{2}\right)$

$= 2 \times P(0 \le Z \le 1.5)$

$= 2 \times 0.4332 = 0.8664$

141. 정답 ④

[해설] 환자 4명의 진료대기시간의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(12, \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $N(12, 2^2)$을 따른다.

$\therefore P(13 \le \overline{X} \le 16) = P\left(\frac{13-12}{2} \le Z \le \frac{16-12}{2}\right)$

$= P(0.5 \le Z \le 2)$

$= P(0 \le Z \le 2) - P(0 \le Z \le 0.5)$

$= 0.4772 - 0.1915$

$= 0.2857$

142. 정답 ①

[해설] $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $N\left(180, \left(\frac{12}{\sqrt{36}}\right)^2\right)$, 즉 $N(180, 2^2)$을 따르고, $Z = \frac{\overline{X}-180}{2}$이라 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1^2)$을 따른다.

$\therefore P(\overline{X} \le 175) = P\left(Z \le \frac{175-180}{2}\right)$

$= P(Z \le -2.5) = P(Z \ge 2.5)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2.5)$

$= 0.5 - 0.4938$

$= 0.0062$

143. 정답 ④

[해설] 모평균은 $180g$, 모표준편차는 σg이므로 이회사에서 생산되는 과자 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(180, \frac{\sigma^2}{4}\right)$를 따르고 임의추출한 9개의 무게의 평균을 $\overline{Y}$라 하면 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(180, \frac{\sigma^2}{9}\right)$을 따른다.

이때, $P(\overline{X} \ge 240) = P(\overline{Y} \le a)$이므로

$P\left(Z \ge \frac{240-180}{\frac{\sigma}{2}}\right) = P\left(Z \le \frac{a-180}{\frac{\sigma}{3}}\right)$

$\frac{120}{\sigma} + \frac{3(a-180)}{\sigma} = 0$

$3a = 420 \qquad \therefore a = 140$

144. 정답 ④

[해설] 부품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(42, 5^2)$을 따른다.

임의 추출한 100개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라고 하면

$E(\overline{X}) = 42,\ \sigma(\overline{X}) = \frac{5}{\sqrt{100}} = \frac{1}{2}$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(42, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$P(\overline{X} \le k) = P\left(Z \le \frac{k-42}{\frac{1}{2}}\right) \le 0.2$

이어야 하므로

$P(-0.84 \le Z \le 0) = 0.3$에서

$\frac{k-42}{\frac{1}{2}} \le -0.84$

$\therefore k \le 41.58$

따라서 k의 최댓값은 41.58이다.

145. 정답 ④

[해설]

모집단은 정규분포 $N(8, 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n = 16$이므로 표본평
균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X}) = m = 8,\ V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

즉, $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(8, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$\therefore P(7 \le \overline{X} \le 9) = P\left(\frac{7-8}{\frac{1}{2}} \le Z \le \frac{9-8}{\frac{1}{2}}\right)$

$= P(-2 \le Z \le 2)$

$= 2P(0 \le Z \le 2)$

$= 2 \times 0.4772$

$= 0.9544$

146. 정답 ③

[해설]

비누의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(100, 2^2)$을 따르므로 크기가 4인 표본을 임의로 추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(100, 1^2)$을
따른다.

이때, $Z = \frac{\overline{X}-100}{1}$으로 치환하면 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.

한 세트의 무게가 $392g$ 미만이면 표본평균이 $98g$ 미만인 경우이므로

$P(\overline{X} < 98) = P(Z < -2)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 - 0.477$

$= 0.023$

147. 정답 ②

[해설] 모평균 m은 200만원, 모표준편차 σ는 20만원이므로 표본평균

을 $\overline{X}$라고 하면

$E(\overline{X})=200$(만원)

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{200000}{\sqrt{100}}=20000$(원)

즉, $\overline{X}$는 정규분포 $N(200$만, $(2$만$)^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(|\overline{X}-m|\ge 40000)$

$=P(\overline{X}\ge 2040000)+P(\overline{X}\le 1960000)$

$=P(Z\ge 2)+P(Z\le -2)$

$=2\{0.5-P(0\le Z\le 2)\}$

$=2(0.5-0.48)=0.04$

148. 정답 ⑤

[해설] 부품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(40,8^2)$을 따르므로 임의추출한 16개의 평균 무게 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(40,\dfrac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(40,2^2)$을 따른다.

이때, $P(\overline{X}\le 43)=P\left(Z\le\dfrac{43-40}{2}\right)=P(Z\le 1.5)$

$=0.5+P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5+0.43=0.93$이므로

$P(42\le\overline{X}\le 43)=P\left(\dfrac{42-40}{2}\le Z\le\dfrac{43-40}{2}\right)$

$=P(1\le Z\le 1.5)$

$=P(0\le Z\le 1.5)-P(0\le Z\le 1)$

$=0.43-0.34=0.09$

$\therefore P(\overline{X}\ge 42\,|\,\overline{X}\le 43)=\dfrac{P(42\le\overline{X}\le 43)}{P(\overline{X}\le 43)}$

$=\dfrac{0.09}{0.93}=\dfrac{9}{93}=\dfrac{3}{31}$

$\therefore a+b=31+3=34$

149. 정답 ④

[해설] 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(40,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르므로

$f(n,\sigma)=P(\overline{X}\ge 42)=P\left(Z\le\dfrac{2\sqrt{n}}{\sigma}\right)$

ㄱ. $\sigma_1<\sigma_2$이면 $\dfrac{2\sqrt{n}}{\sigma_1}>\dfrac{2\sqrt{n}}{\sigma_2}$

$\therefore f(n,\sigma_1)>f(n,\sigma_2)$ (거짓)

ㄴ. $n_1<n_2$이면 $\dfrac{2\sqrt{n_1}}{\sigma}<\dfrac{2\sqrt{n_2}}{\sigma}$

$\therefore f(n_1,\sigma)<f(n_2,\sigma)$ (참)

ㄷ. $f(4n,\sigma)=P\left(Z\ge\dfrac{2\sqrt{4n}}{\sigma}\right)=P\left(Z\ge\dfrac{4\sqrt{n}}{\sigma}\right)$이고

$f\left(n,\dfrac{1}{2}\sigma\right)=P\left(Z\ge\dfrac{2\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\sigma}\right)=P\left(Z\ge\dfrac{4\sqrt{n}}{\sigma}\right)$이므로

$f(4n,\sigma)=f\left(n,\dfrac{1}{2}\sigma\right)$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

150. 정답 ②

[해설]

$f(n)=P(\overline{X}\ge 50.5)$이므로

$n=16$일 때, 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(50,1)$을 따르므로

$f(16)=P(\overline{X}\ge 50.5)=P\left(Z\ge\dfrac{50.5-50}{1}\right)$

$=P(Z\ge 0.5)=0.3085$

$n=100$일 때, 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(50,0.4^2)$을 따르므로

$f(100)=P(\overline{X}\ge 50.5)=P\left(Z\ge\dfrac{50.5-50}{0.4}\right)$

$=P(Z\ge 1.25)=0.1056$

$\therefore f(16)-f(100)=0.2029$

151. 정답 ④

[해설]

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\dfrac{1}{n}\right)$을 따르므로 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$으로 치환하면 Z는 표준정규분포를 따른다. $\overline{X}=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$를 대입하면

$Z=2-m\sqrt{n}$

따라서 $f(m,n)=P\left(\overline{X}\le\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)=P(Z\le 2-m\sqrt{n})$이 성립한다.

ㄱ. $f(m,4)=P(Z\le 2-2m)\ne P(Z\le 1)$ (거짓)

ㄴ. $n_1>n_2$이면 $m\sqrt{n_1}>m\sqrt{n_2}$이므로

$P(Z\le 2-m\sqrt{n_1})<P(Z\le 2-m\sqrt{n_2})$ (참)

ㄷ. $m=0$이면 $f(m,n)=P(Z\le 2)$, $m\ne 0$이면 n은 자연수이므로

$m\sqrt{n}>0$

$\therefore P(Z\le 2-m\sqrt{n})\le P(Z\le 2)$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

152. 정답 50

[해설] 인터넷 하루 사용 시간의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(52,\dfrac{4^2}{4}\right)$

즉, $N(52,2^2)$을 따른다.

$P(46\le\overline{X}\le 54)-P(k\le\overline{X}\le 58)$에서

$P\left(\dfrac{46-52}{2}\le\overline{X}\le\dfrac{54-52}{2}\right)=P\left(\dfrac{k-52}{2}\le\overline{X}\le\dfrac{58-52}{2}\right)$

$P(-3\le\overline{X}\le 1)=P\left(\dfrac{k-52}{2}\le\overline{X}\le 3\right)$

즉, $\dfrac{k-52}{2}=-1$이므로

$k=50$

153. 정답 933

[해설] 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차는 각각

$E(\overline{X})=251,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{8}{\sqrt{4}}=4$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(251,4^2)$을 따른다.

치약 한 상자의 무게가 $980g$ 이상이면 치약 한 개의 평균 무게는 $245g$ 이상이므로

$P(\overline{X}\ge 245)=P\left(Z\ge\dfrac{245-251}{4}\right)=P(Z\ge -1.5)$

$= 0.5 + P(0 \le Z \le 1.5)$

$= 0.5 + 0.433 + 0.933$

따라서 상품으로 내놓을 수 있는 치약 상자의 수를 확률변수 Y 라고 하면 Y는 이항분포 $B(1000, 0.933)$을 따르므로 Y의 평균은

$E(Y) = 1000 \times 0.933 = 933$

154. 정답 60

[해설]

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{3}{10}\right)^2\right)$을 따르므로

$$f(m) = P\left(\overline{X} \ge \frac{3}{20}\right) = P\left(Z \ge \frac{\frac{3}{20} - m}{\frac{3}{10}}\right)$$

$$= P\left(Z \ge \frac{1}{2} - \frac{10}{3}m\right) \ge \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} - \frac{10}{3}m \le 0$에서 $m \ge \frac{3}{20}$

따라서 $m' = \frac{3}{20}$이므로 $400m' = 60$

155. 정답 ①

모집단이 정규분포 $N(550, 12^2)$을 따르고, 표본의 크기가 n이므로

$E(\overline{X}) = 550, \ V(\overline{X}) = \frac{12^2}{n}$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(550, \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$$P(\overline{X} \leqq 544) = P\left(Z \leqq \frac{544 - 550}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= 0.5 - P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{550 - 544}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right) = 0.0668$$

따라서 $P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{550 - 544}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right) = 0.4332$이므로

$\frac{550 - 554}{\frac{12}{\sqrt{n}}} = 1.5 \qquad \frac{12}{\sqrt{n}} = 4 \qquad \therefore \ n = 9$

156. 정답 11

[해설] 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $N\left(13, \frac{4}{n}\right)$를 따르므로

$P(12 \le \overline{X} \le 14) \ge 0.9$에서

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2} \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \ge 0.9$$

그런데 $P(-1.64 \le Z \le 1.64) = 0.9$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2} \ge 1.64 \qquad \therefore \ n \ge 3.28^2 = 10.7584$

따라서 자연수 n의 최솟값은 11이다.

157. 정답 16

[해설]

$P(|\overline{X} - m| \le 4) = P\left(|Z| \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \ge 0.95$이므로

$$P\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \ge 0.475$$

$\frac{\sqrt{n}}{2} \ge 2$에서 $n \ge 4^2 = 16$

따라서 구하는 n의 최솟값은 16이다.

158. 정답 400

[해설]

$\sigma = 1$이므로 $P\left(|\overline{X} - m| \le 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$에서

$$P\left(|\overline{X} - m| \le \frac{2.58}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

따라서 $\frac{2.58}{\sqrt{n}} \le 0.129$이므로 $\sqrt{n} \ge \frac{2.58}{0.129} = 20$

$\therefore n \ge 400$

따라서 400명 이상의 주민을 추출하면 된다.

159. 정답 ②

[해설] 95%의 신뢰도로 모평균을 추정하면 신뢰구간은

$\overline{X} - 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{n}}$이므로 신뢰구간의 길이는

$2 \times 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{n}} = 11.47 - 8.53 = 2.94$

$\sqrt{n} = \frac{1.96 \times 3}{1.47} = 4 \qquad \therefore n = 16$

160. 정답 ③

[해설] $\sigma = 1.2, n = 25$이고, 표본평균 $\overline{X} = 16$이므로 모평균 m의 신뢰도 99%인 신뢰구간은

$$\left[16 - 3 \times \frac{1.2}{\sqrt{25}}, 16 + 3 \times \frac{1.2}{\sqrt{25}}\right]$$

$\therefore [15.28, 16.72]$

161. 정답 460

[해설] $\overline{X} = 2.3, \ n = 100, \ \sigma = 0.2$이므로

이 학교 학생들의 평균 통학거리를 m이라 하면

$2.3 - 2 \times \frac{0.2}{\sqrt{100}} \le m \le 2.3 + 2 \times \frac{0.2}{\sqrt{100}}$에서

$2.26 \le m \le 2.34$

$\therefore a + b = 4.6$

$\therefore 100(a + b) = 4.6 \times 100 = 460$

162. 정답 58

[해설] 표본평균 $\overline{X} = 20$이므로 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은 $20 - 2 \times \frac{3}{\sqrt{9}} \le m \le 20 + 2 \times \frac{3}{\sqrt{9}}$

$\therefore 18 \le m \le 22$

따라서 $\alpha = 18, \beta = 22$이므로 $2\alpha + \beta = 58$

163. 정답 ③

$\overline{X}=13$, $\sigma=3$, $n=100$이므로 95%의 신뢰도로 모평균을 추정하여 신뢰구간은

$$13-1.96\times\frac{3}{\sqrt{100}}\le m\le 13+1.96\times\frac{3}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore\ \beta-\alpha=2\times1.96\times\frac{3}{\sqrt{100}}=1.176$$

164. 정답 ②

[해설] 모표준편차를 σ라고 하면 표본의 크기가 16일 때, 신뢰도 95%인 신뢰구간의 길이에서

$$2\times2\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=127.7-125.2$$

$$\therefore\ \sigma=2.5$$

따라서 표본의 크기가 100일 때, 신뢰도 99%인 신뢰구간의 길이는

$$2\times3\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=6\times\frac{2.5}{10}=1.5$$

165. 정답 4

[해설] m_1에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$l_1=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고, m_2에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간 길이는

$$l_2=2\times1.96\times\frac{\sigma}{2\sqrt{4n}}=2\times1.96\times\frac{\sigma}{4\sqrt{n}}$$

따라서 $l_2=\frac{1}{4}l_1$이므로 $\frac{l_1}{l_2}=4$

166. 정답 ③

[해설] 신뢰도 95%일 때의 신뢰구간의 길이는 $2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로 $2\times1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=\frac{39.2}{\sqrt{n}}\le4.9$에서 $\sqrt{n}\ge8$

$\therefore n\ge64$

따라서 n의 최솟값은 64이다.

167. 정답 ③

[해설] 신뢰도 95%일 때의 신뢰구간의 길이는 $2\times2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고 $\sigma=350$이므로

$2\times2\times\frac{350}{\sqrt{n}}=\frac{1400}{\sqrt{n}}\le200$에서 $\sqrt{n}\ge7$ $\quad\therefore n\ge49$

따라서 n의 최솟값은 49이다.

168. 정답 ④

[해설] 신뢰도 99%일 때의 신뢰구간의 길이는 $2\times3\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고 $\sigma=3.5$이므로

$2\times3\times\frac{3.5}{\sqrt{n}}=\frac{21}{\sqrt{n}}\le3$에서 $\sqrt{n}\ge7$ $\quad\therefore n\ge49$

따라서 n의 최솟값은 49이다.

참고

25일 동안 임의추출한 불량품의 개수의 표본평균 $\overline{X}=32$, 표본표준편차 $s=3.5$이지만 일반적으로 추정시 표본표준편차 s와 모표준편차 σ는 동일시한다.

169. 정답 ⑤

[해설] 신뢰구간의 길이는 신뢰도가 같은 경우, 표본의 크기가 작을수록 신뢰구간의 길이가 길다. $\quad\therefore l_3<l_1$

또, l_2는 $2\times3\times\frac{\sigma}{\sqrt{1600}}=\frac{3}{20}\sigma$,

l_3은 $2\times2\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=\frac{4}{20}\sigma$이므로 $l_2<l_3$

따라서 구하는 대소 관계는 $l_2<l_3<l_1$

170. 정답 ①

[해설] 표본평균 $\overline{X}=11$이므로 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은 $11-1.96\times\frac{1.5}{\sqrt{9}}\le m\le 11+1.96\times\frac{1.5}{\sqrt{9}}$

$\therefore 10.02\le m\le 11.98$

171. 정답 ③

[해설] n명의 몸무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $P(-2\le Z\le2)=0.95$이므로 전체 학생의 몸무게의 평균 m을 95%의 신뢰도로 추정한 신뢰구간은 $\overline{X}-2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고 $\sigma=4$로 놓을 수 있으므로 $\beta-\alpha=2\times2\times\frac{4}{\sqrt{n}}=2$

$\sqrt{n}=8$

$\therefore n=64$

172. 정답 ③

[해설] 표본의 크기를 n, 신뢰구간의 길이를 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$라 하면

ㄱ. 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도를 높게 하면 k의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이가 길어진다. (참)

ㄴ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기 n의 값을 크게 하면 신뢰구간의 길이는 짧아진다. (참)

ㄷ. 신뢰도가 일정할 때, 신뢰구간의 길이를 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=l$이라 하자.

표본의 크기를 2배 하면

$$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}l$$

이므로 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배가 된다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

173. 정답 ③

[해설]

모표준편차가 σ인 정규분포를 이루는 모집단에서 크기가 n인 표본을 추출

할

때, 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이를 l이라고 하면

$l = 2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로 $l = 2\times1.96\frac{2}{\sqrt{n}} \le 2$에서

$\sqrt{n} \ge 3.92$

$n \ge (3.92)^2 = 15.3664$

따라서 자연수 n의 최솟값은 16이다.

174. 정답 ⑤

[해설] 모평균을 m, 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 모평균 m의 신뢰구간은

$\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$$l_1 = 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = l,\ l_2 = 2k\frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}l$$

$$l_3 = 2k\frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{2}l,\ l_4 = 2k\frac{\sigma}{\sqrt{8n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}l,\ \cdots$$

$l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4,\cdots$는 첫째항이 l이고 공비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k = \frac{l}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = (2+\sqrt{2})l$$

175. 정답 ④

[해설]

신뢰도 α의 신뢰구간의 길이는

$f(n,\ \alpha) = 2k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (단, $P(|Z| \le k) = \alpha$)

ㄱ. $f(4n,\ \alpha) = 2k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}f(n,\ \alpha)$

$\therefore f(n,\ \alpha) = 2f(4n,\ \alpha)$ (참)

ㄴ. 신뢰도가 일정할 때 표본의 크기가 클수록 신뢰구간의 길이는 작아진다. $n > 2$일 때 $n^2 > 2n$이므로 $f(n^2,\ \alpha) < f(2n,\ \alpha)$ (거짓)

ㄷ. 표본의 크기가 같을 때 신뢰도가 높을수록 신뢰구간의 길이는 커진다.
표본의 크기가 n일 때,

신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는 $2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는 $2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로 $\alpha < \beta$이면 $f(n,\ \alpha) < f(n,\ \beta)$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

176. 정답 256

[해설] 모집단에서 임의로 100명을 추출하여 구한 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[10-k,\ 10+k]$이므로

$k = 1.96\times\frac{3}{\sqrt{100}} = 1.96\times\frac{3}{10}$이다.

또, 모집단에서 임의로 n명을 추출하여 구한 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[10-s(n),\ 10+s(n)]$이므로

$s(n) = 1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}$이다.

이때, $1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{5}{8}\times1.96\times\frac{3}{10}$이므로

$\sqrt{n} = 16 \qquad \therefore n = 16^2 = 256$

177. 정답 385

[해설] 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95%에서 평균 수명의 신뢰구간은

$[1010-1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}},\ 1010+1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}]$

이 구간이 1000을 초과하는 범위에 있으려면

$1010-1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}} > 1000$

$10 > 1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}},\ \sqrt{n} > 19.6$

$\therefore n > (1.96)^2 = 384.16$

따라서 n의 최솟값은 385이다.

178. 정답 ④

모평균을 m, 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$와 모평균 m과의 차는 $|m-\overline{X}|$이므로 $|m-\overline{X}| = 3\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3\times\frac{5.5}{\sqrt{n}}$

$3\times\frac{5.5}{\sqrt{n}} \leqq 1,\ \sqrt{n} \geqq 16.5$

$\therefore\ n \geqq 272.25$

따라서 최소한 273명 이상이어야 한다.

179. 정답 ③

[해설] 신뢰도 95%이므로 $|m-\overline{X}| \le 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\times\frac{10}{\sqrt{n}}$

$2\times\frac{10}{\sqrt{n}} \leqq 2,\ \sqrt{n} \geqq 10$

$\therefore n \ge 100$

따라서 최소한 100개 이상으로 해야 한다.