1. 2000 교육청(1점)

일차변환 f, g 의 행렬을 각각 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$이라 할 때, 합성변환 $f \circ g$ 의 행렬은?

① $\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

2. 2000 교육청(1)

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의해 직선 $x+2y=1$ 이 직선 l 로 옮겨진다. 직선 l 이 포물선 $y=x^2+2x+a$ 에 접할 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② 2 ③ 3

④ 6 ⑤ 8

3. 2002 교육청(2점)

행렬 $\begin{pmatrix} 3 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f 에 의한 점$(1,1)$ 의 상이 점$(2,1)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

①1 ②2 ③3

④4 ⑤5

4. 1996 교육청(2점)

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 이 나타내는 일차변환에 의하여 직선 $3x+y=1$ 이 직선 $ax+by=1$ 로 옮겨진다고 한다. 이 때, 두 수a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.

5. 1996 교육청(2점)

두 일차변환 f, g 에 대하여 f 는 $y=x$에 대칭이동이고, g 는 원점을 중심으로 $60°$회전이동이다. $g \circ f$에 의하여 점$(2,\ 4)$가 이동되는 점은?

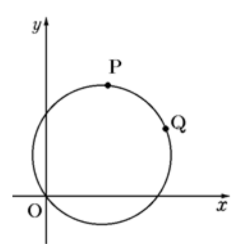
① $(4,2)$ ② $(2,\ 4)$

③ $(2-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ ④$(2+\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3})$

⑤ $(2-\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$

6. 2002 교육청(2점)

다음 그림과 같이 원점을 지나는 원C위에 원점이 아닌 서로 다른 두 점 P, Q가 있다. 일차변환 f 에 의하여 점P는 점Q로, 점Q는 원점O로 옮겨질 때, 합성변환 $f \circ f$ 에 의하여 원C는 어떤 도형으로 옮겨지는가?

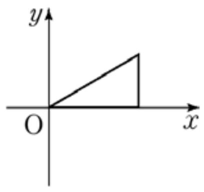


①원점O ②선분 OP

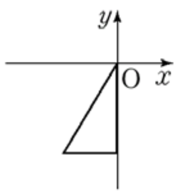
③선분OQ ④호PQ ⑤원C

7. 2003 교육청(2점)

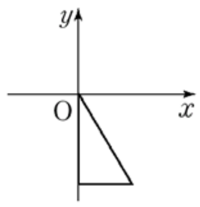
원점을 중심으로 90° 회전시키는 일차변환을 f라 하자. [그림1]의 도형이 일차변환 $f\circ g$에 의하여 [그림2]의 도형으로 옮겨진다고 할 때, 다음 중 [그림2]의 도형이 일차변환 g에 의하여 옮겨지는 도형은?

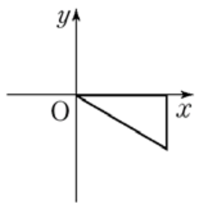


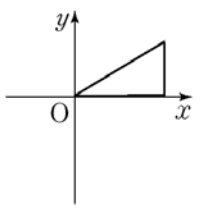
[그림1]

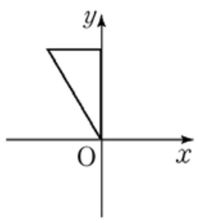


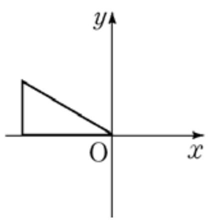
[그림2]

①


②


③


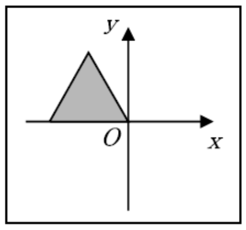
④


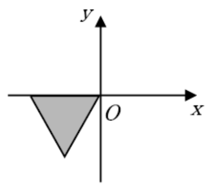
⑤


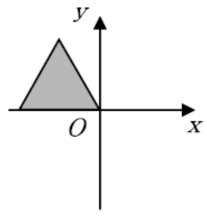
8. 2001 교육청(2점)

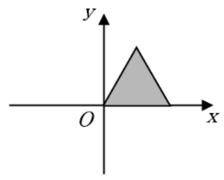
오른쪽 그림에서 일차변환

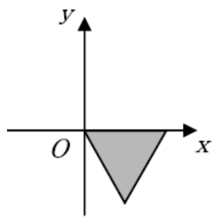
$f : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에 의한 삼각형의 상은?

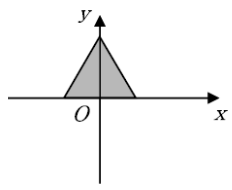


①


②


③


④


⑤


9. 2001 교육청(2점)

일차변환 $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에 의하여 점$A$가 점$(2,\ -3)$으로 옮겨진다고 할 때, 점$A$의 좌표는?

① $(3,\ 2)$ ② $(3,\ -5)$ ③ $(5,\ -3)$
④ $(-2,\ -3)$ ⑤ $(-1,\ -3)$

10. 2002 교육청(2점)

일차변환$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$에 의하여 직선$2x+3y=6$은 한 점$(a,b)$로 옮겨진다. 이 때, $a+b$의 값은?

①14 ②15 ③16
④17 ⑤18

11. 2000 교육청(2점)

직선 $y=x$에 대한 대칭변환 f와 원점을 중심으로 하는 회전변환 g가 있다. 합성변환 $g \circ f$에 의해 점$(1,0)$이 점 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$으로 옮겨졌을 때, 이 합성변환 $g \circ f$에 의해 점$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$으로 옮겨지는 점은?

① $(1,\ 1)$ ② $(-1,-1)$ ③ $(0,\ 1)$
④ $(0,-1)$ ⑤ $(-1,\ 0)$

12. 2001 교육청(2점)

좌표평면에서 점 P를 점 Q로 옮기는 일차변환의 행렬을 A, 점 R를 점 Q로 옮기는 일차변환의 행렬을 B, 점 R를 점 S로 옮기는 일차변환의 행렬을 C라 한다. 위의 세 변환의 역변환이 모두 존재한다고 할 때, 다음 중 점 S를 점 P로 옮기는 일차변환의 행렬을 나타내는 것은?

① ABC ② $AB^{-1}C$ ③ $CB^{-1}A$
④ $A^{-1}BC^{-1}$ ⑤ $C^{-1}B^{-1}A$

13. 1994 교육청(3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 평면 위의 모든 점이 직선 $y=px$로 옮겨질 때, $a,\ b,\ c,\ d$의 관계로 옳은 것을 다음 <보기> 중에서 모두 고르면?$(p \neq 0)$

[보 기]

Ⅰ. $p(a+b)=c+d$ Ⅱ. $p(a-b)=c-d$
Ⅲ. $ad-bc=0$ Ⅳ. $a^2+b^2=c^2+d^2$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅱ, Ⅲ ③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

14. 1994 교육청(3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 나타내는 일차변환에 의하여 평면 위의 타원 $16x^2+9y^2=144$가 원 $x^2+y^2=1$로 옮겨질 때, 다음 중 행렬 A는?

① $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ 4 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

15. 1995 교육청(3점)

평면위의 일차변환 f를 나타내는 행렬을 A라 할 때,

$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이면 $A^{10}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$은?

① $\begin{pmatrix}3^5\\3^4\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}\frac{1}{2^5}\\\frac{1}{2^4}\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}3^{10}\\3^{11}\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}\frac{1}{3^{10}}\\\frac{1}{3^{11}}\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}2^{11}\\2^{10}\end{pmatrix}$

16. 1995 교육청(3점)

좌표평면 위의 $P(x,\ y)$에 대하여 평행이동

$f:(x,\ y)\longrightarrow(x+a, y+b)$와 행렬 $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$로 나타내어지는

일치변환 g가 있다. 합성변환 $f\circ g\circ f$가 일차변환이 될 때, 상수 a와 b의 관계로 옳은 것은?

①$a-b=0$ ②$a+b=0$ ③$a-2b=0$

④$a+2b=0$ ⑤$2a+b=0$

17. 1996 교육청(3점)

점 $P(1,0)$은 일차변환 f에 의하여 점 $Q(0,1)$로 옮겨지고, 합성변환 $f\circ f$에 의하여 점 $R(2,0)$로 옮겨진다고 한다. 이 때, 합성변환 $f\circ f\circ f$에 의하여 점 P는 어느 점으로 옮겨지는가?

①$(0,2)$ ②$(3,0)$ ③$(0,3)$

④$(4,0)$ ⑤알 수없다.

18. 1996 교육청(3점)

두 일차변환 $f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$, $g:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$에 대하여 합성변환 $g\circ f$를 나타내는 행렬은?

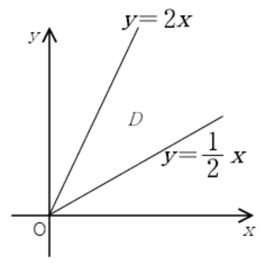
① $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$

19. 1999 교육청(3점)

제1사분면에서 두 직선 $y=2x$와 $y=\frac{1}{2}x$ 사이의 영역을 D라 하자.

행렬 $\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 영역 D에 속하는 점들은 어느 사분면 위의 점들로 옮겨지는가?



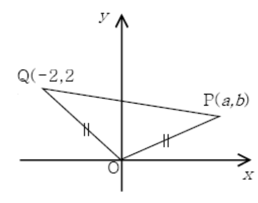
① 제1사분면 ② 제2사분면

③ 제3사분면 ④ 제4사분면

⑤ 제1사분면 또는 제3사분면

20. 1999 교육청(3점)

세 점 $O(0,\ 0)$, $P(a,b)$, $Q(-2,2)$를 꼭지점으로 하는 $\triangle OPQ$가 $\angle POQ=\frac{2}{3}\pi$ 인 이등변삼각형일 때, 두 양수 a,b의 합 $a+b$의 값은?



① 1 ② 2 ③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

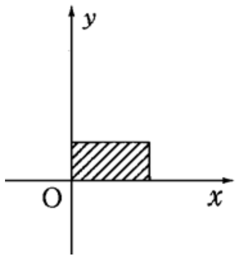
21. 2002 교육청(3점)

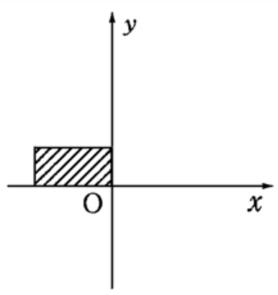
행렬 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & k \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 직선$l$: $x-2y=1$ 이 옮겨진 직선을l' 이라 하자. 두 직선 l과 l'이 수직일 때, k의 값은?

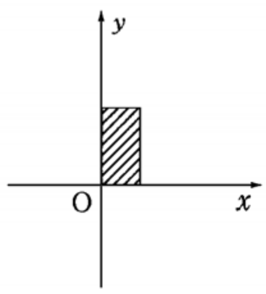
①-4 ②-3 ③-2
④-1 ⑤$0$

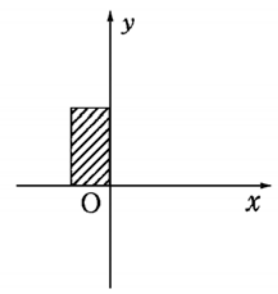
22. 2002 교육청(3점)

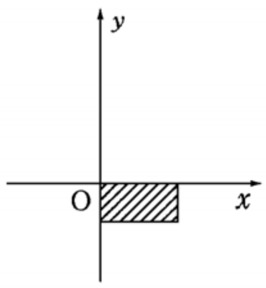
직선$y=x$에 대하여 대칭이동을 나타내는 일차변환의 행렬을 A, 원점을 중심으로 30° 회전이동을 나태내는 일차변환의 행렬을 B라 하자. 행렬AB^3이 나타내는 일차변환에 의하여 다음 그림의 빗금친 도형이 옮겨진 도형은?

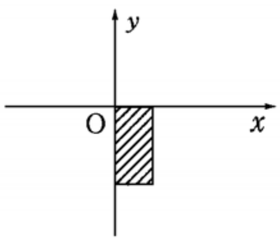


①


②


③


④


⑤


23. 2002 교육청(3점)

행렬 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 나타내는 일차변환에 의하여 좌표평면 위의 점$\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$이 옮겨지는 점을$\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ b_{n+1})$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 의 값은? (단, n은 자연수이고, $a_1=b_1=1$)

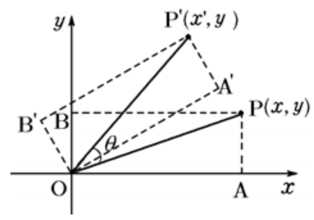
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24. 2003 교육청(3점)

다음은 점$P(x,y)$를 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동 시키는 일차변환을 나타내는 행렬이$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$임을 증명하는 과정이다.

[증 명]

다음 그림에서 직사각형 $OAPB$를 원점 O를 중심으로 θ만큼 회전시킨 직사각형 $OA'P'B'$라 하면



$\angle AOA' = \angle POP'$
$= \angle BPB' = \theta$

점A'의 좌표는 $A'(x\cos\theta, [\ (가)\ ])$

점B'의 좌표는 $B'\left([\ (나)\ ], y\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$

이 때, 직사각형 $OA'P'B'$에서 두 대각선 OP'과 $A'B'$의 중점은 일치하므로

$x=x\cos\theta-y\sin\theta,\ y=x\sin\theta+y\cos\theta$

따라서, 이 변환은 일차변환이고, 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$이다.

위의 <증명>과정에서 다음 중 (가),(나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

①$y\cos\theta, y\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ ②$x\sin\theta, y\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$
③$x\cos\theta, x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ ④$y\sin\theta, y\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$
⑤$x\sin\theta, x\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

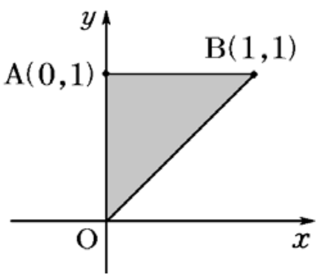
25. 2003 교육청(3점)

두 일차변환 f, g 를 나타내는 행렬이 각각 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$일 때, 합성변환 $g \circ f$ 에 의하여 직선 $3x-2y=-1$ 은 어떤 도형으로 옮겨지는가?

①$(0,0)$ ②$(-2,4)$ ③$(1,-2)$
④$2x+y=0$ ⑤$6x+y=0$

26. 2003 교육청(3점)

행렬 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f 에 의하여 $\triangle OAB$ 가 $\triangle OA'B'$로 옮겨진다. $\triangle OA'B'$의 넓이가 3 이 될 때, 양수 a의 값을 구하시오.



27. 2003 교육청(3점)

네 점 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$ 을 꼭지점으로 하는 정사각형 $OABC$가 일차변환f : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에 의하여 옮겨질 때, 옮겨진 도형의 넓이를 구하시오.

28. 2003 교육청(3점)

점$(1,0)$ 을 원점을 중심으로 60° 회전이동 시킨 점을 P, 120° 회전이동 시킨 점을 Q라 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{7}$
④ 5 ⑤ 9

29. 2003 교육청(3점)

직선 $y=ax$ 위의 임의의 두 점 사이의 거리와 일차변환 f : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에 의하여 옮겨진 두 점 사이의 거리가 같을 때, a 의 값들의 합은?

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

30. 2003 교육청(3점)

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환$f$ 에 의하여 원 $x^2+y^2=1$ 이 도형 F로 옮겨질 때, 도형 F위의 서로 다른 두 점 사이의 거리의 최댓값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ 10

31. 2003 교육청(3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}\cos60^\circ & -\sin60^\circ \\ \sin60^\circ & \cos60^\circ\end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f가 있다. $B^2=A$를 만족하는 행렬 B가 나타내는 일차변환 g에 의하여 $P(\sqrt{3},0)$이 옮겨진 점을 $P'(a,b)$라 할 때, a^2-b^2의 값은?

① -3 ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 3

32. 2003 교육청(3점)

θ 가 0 에서 2π 까지 변할 때, 행렬 $\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ 가 나타내는 일차변환에 의하여 점 $(1,1)$ 이 옮겨지는 점 $P(x,y)$ 의 자취의 길이는?

① π ② 2π ③ $2\sqrt{2}\,\pi$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

33. 2003 교육청(3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 직선 $y=2x+1$이 직선 $y=-x-1$로 옮겨질 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하시오

34. 2001 교육청(3점)

원 $x^2+y^2=1$ 위의 모든 점을 같은 원 위의 점으로 옮기는 일차변환을 f 라 하자. 그 중 성분이 모두 정수인 이차정사각행렬로 나타내어지는 일차변환 f 의 개수는?

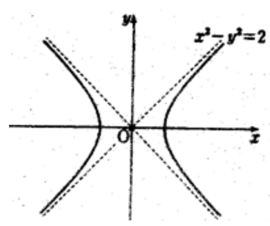
① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 무수히 많다

35. 2002 교육청(3점)

일차변환 f : $\begin{pmatrix}x' \\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 \\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$ 에 의하여 원 C: $x^2+y^2=1$ 이 옮겨진 도형을 C' 이라 하자. 원 C 와 C' 을 한 좌표평면 위에 그릴 때, 원 C 위의 임의의 점 P 와 C' 위의 임의의 점 Q 에 대하여 선분 PQ 의 길이의 최댓값은?

①4 ②5 ③6
④7 ⑤8

36. 2001 교육청(3점)



오른쪽 그림은 쌍곡선 $x^2-y^2=2$ 를 나타내는 것이다. 이것을 원점을 중심으로 $45°$ 회전이동시킨 도형의 방정식은?

① $xy=1$ ② $xy=\sqrt{2}$
③ $xy=2$ ④ $xy=-1$
⑤ $xy=-2$

37. 2002 교육청(3점)

두 점 $(3,1)$, $(4,3)$을 각각 $(3,-1)$, $(-1,2)$로 옮기는 일차변환의 행렬을 A라 하고 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동의 행렬을 B 라 하자. 점 $(2,3)$이 행렬 $A+2B$ 로 나타내어지는 일차변환에 의해 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(2,6)$　② $(2,10)$　③ $(1,6)$
④ $(1,8)$　⑤ $(0,9)$

38. 2002 교육청(3점)

일차변환 f 를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ 일 때, 일차변환 f 에 의하여 직선 $2x+y=2$ 는 한 점 P 로 옮겨진다고 한다. 점 P 의 좌표는?

① $(2,4)$　② $(3,4)$　③ $(4,2)$
④ $(4,3)$　⑤ $(1,2)$

39. 2002 교육청(3점)

원 C_0 : $x^2+y^2-6x+4y=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 원을 C_1, 원 C_0 을 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동시킨 원 을 C_2 라 하자. 두 원 C_1, C_2 가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

40. 2001 교육청(3점)

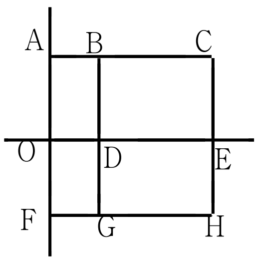
행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f 에 대하여 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

[보 기]

Ⅰ. f 에 의하여 x 축 위의 점들은 모두 x 축 위의 점으로 옮겨진다.
Ⅱ. f 에 의하여 y 축 위의 점들은 모두 y 축 위의 점으로 옮겨진다.
Ⅲ. f 에 의한 직선 $y=x$ 의 상은 직선 $y=-x$ 이다.

① Ⅲ　② Ⅰ, Ⅱ　③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

41. 1995 수능 (2점)

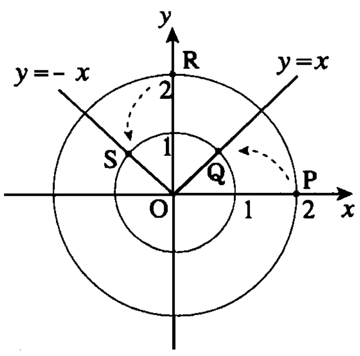


오른쪽 그림에서 직사각형 $AODB$와 $OFGD$는 합동이고, 직사각형 $BDEC$와 $DGHE$도 합동이다. 어떤 일차변환이 점 B를 점 E로, 점 D를 점 A로 옮길 때, 점 A가 옮겨지는 점은?

① B　② C　③ F
④ G　⑤ H

42. 1996 수능 (3점)

어떤 일차변환은 점 $P(2,0)$을 점 $Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$로, 점 $R(0,2)$를 점 $S\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$로 옮긴다. 이 일차변환을 나타내는 행렬을 A라고 하자. $A^4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$일 때, $\frac{a+bi}{1+i}$ 의 값은?(단, $i=\sqrt{-1}$)



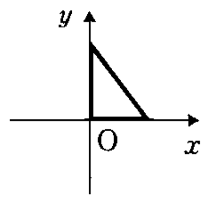
① $-\frac{1}{16}$　② $\frac{\sqrt{2}}{8}$　③ $\frac{1}{16}i$
④ $\frac{\sqrt{2}+i}{8}$　⑤ $\frac{-1+\sqrt{2}}{16}$

43. 1997 수능 (2점)

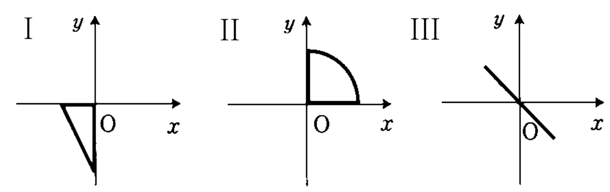
좌표평면에서의 회전변환 f와 대칭변환 g를 나타내는 행렬이 각각 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$이다. 두 변환 f와 g를 유한 번 합성하여 얻을 수 있는 합성변환에 의하여 점 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$가 옮겨 질 수 있는 점은 P를 포함하여 모두 몇 개인가?

44. 2000 수능 (2점)

다음 그림과 같은 직각삼각형이 일차변환에 의해 옮겨질 수 있는 도형을 <보기> 중에서 모두 고른 것은?

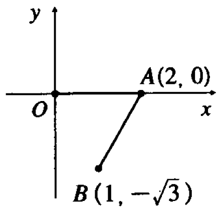


<보 기>



① Ⅰ　② Ⅲ　③ Ⅰ, Ⅱ　④ Ⅰ, Ⅲ　⑤ Ⅱ, Ⅲ

45. 2001 수능 (2점)



일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$라 하자. 오른쪽 그 림의 꺽인 선분 OAB를 f에 의하여 옮겨서 얻은 꺽인 선분과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 1 ⑤ 2

46. 2004 수능 (2점)

직선 $y=x$에 대한 대칭변환 f와 원점을 중심으로 하는 회전변환 g가 있다. 합성변환 $g\circ f$에 의해 점$(1, 0)$이 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$으로 옮겨졌을 때, 이 합성변환 $g\circ f$에 의해 점$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$으로 옮겨지는 점은?

① $(1, 1)$ ② $(-1, -1)$ ③ $(0, 1)$
④ $(0, -1)$ ⑤ $(-1, 0)$

1. 2007 교육청(2점)

두 포물선 $y^2=4(x-a)$와 $y^2=-8x$가 초점을 공유할 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 3

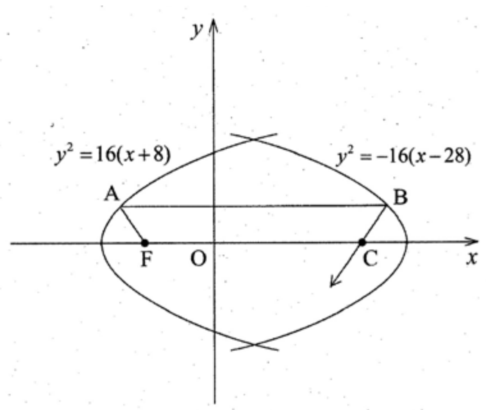
2. 2004 교육청(3점)

두 포물선 $(x-1)^2=4y$, $(y+2)^2=-8x$의 초점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$라고 할 때, $\overline{\mathrm{F_1F_2}}^2$의 값을 구하시오.

3. 2008 교육청(3점)

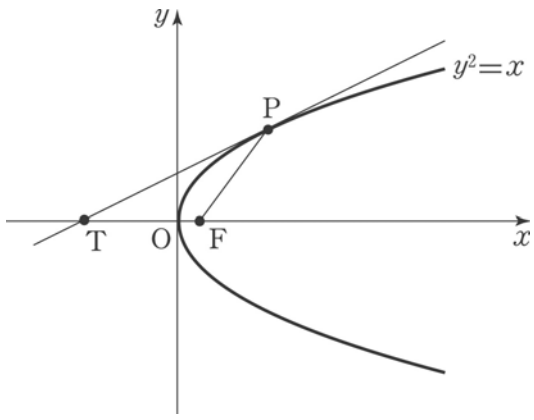
아래 그림과 같이 초점 $\mathrm{F}(-4,\ 0)$에서 포물선 $y^2=16(x+8)$ 위의 점 A를 향하여 출발한 빛이 포물선에 반사되어 x축에 평행하게 진행된다. 이 빛이 포물선 $y^2=-16(x-28)$ 위의 점 B에서 다시 반사되어 x축과 만나는 점을 C라 하자. 이 때, 세 선분 길이의 합 $\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 값을 구하시오.

(단, 포물선 위의 점 A는 제 2사분면 위에 있다.)



4. 2004 평가원(3점)

다음은 포물선 $y^2=x$ 위의 꼭지점이 아닌 임의의 점 P에서의 접선과 x축과의 교점을 T, 포물선의 초점을 F라고 할 때, $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FT}}$임을 증명한 것이다.



[증 명]

점P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면, 접선의 방정식은 (가)

이 식에 $y=0$을 대입하면 교점T의 좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다.

초점F의 좌표는 (나) 이므로 $\overline{\mathrm{FT}}=$ (다)

한편 $\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2+y_1^2}=$ (다)

따라서 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FT}}$이다.

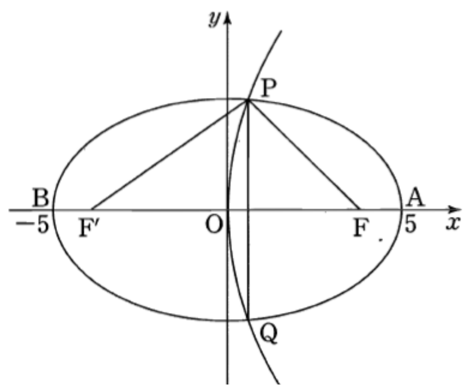
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1)$	$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$	$x_1+\frac{1}{2}$
②	$y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1)$	$\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$	$x_1+\frac{1}{4}$
③	$y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1)$	$\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$	$x_1+\frac{1}{2}$
④	$y_1y=x+x_1$	$\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$	$x_1+\frac{1}{4}$
⑤	$y_1y=x+x_1$	$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$	$x_1+\frac{1}{2}$

5. 2010 평가원(3점)

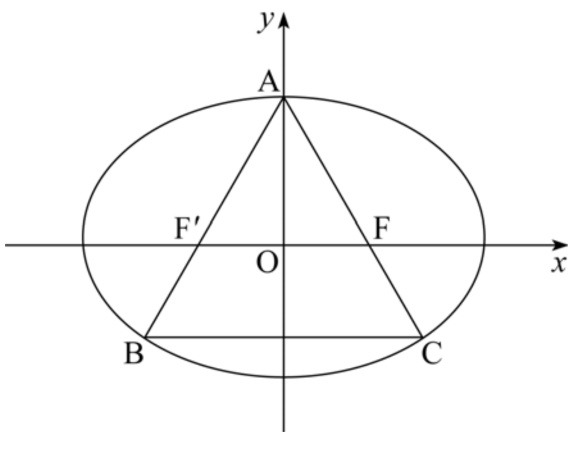
좌표평면에서 두 점 $A(5,0)$, $B(-5,0)$에 대하여 장축이 선분 AB인 타원의 두 초점을 F, F'이라 하자. 초점이 F이고 꼭짓점이 원점인 포물선이 타원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=2\sqrt{10}$일 때, 두 선분 PF와 PF'의 길이의 곱 $\overline{PF}\times\overline{PF'}$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



6. 2008 교육청(3점)

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. 타원의 두 초점 F, F′이 각각 선분 AC, AB 위에 있을 때, $\frac{b}{a}$의 값은? (단, 점 A는 y축 위에 있다.)

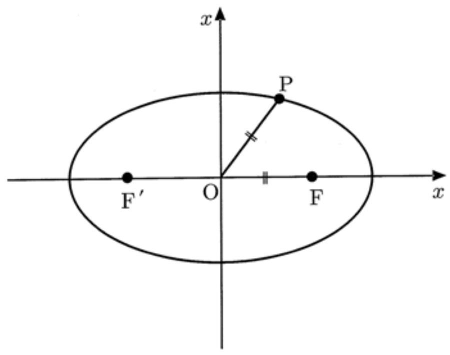


① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 2006 평가원(4점)

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $\overline{OP}=\overline{OF}$를 만족시킬 때, $\overline{PF}\times\overline{PF'}$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)



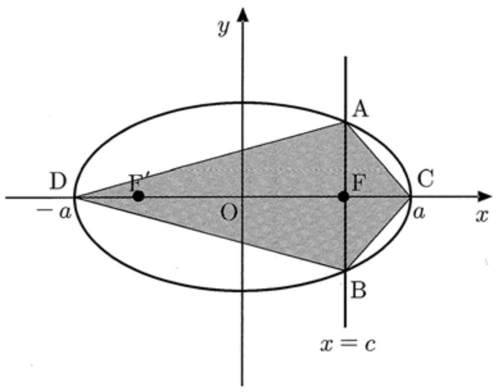
8. 2007 평가원(3점)

타원 $x^2+9y^2=9$의 두 초점 사이의 거리를 d라 할 때, d^2의 값을 구하시오.

9. 2005 교육청(4점)

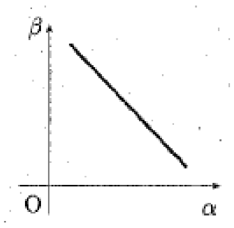
그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$을 초점으로 하는 원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$과 직선 $x=c$의 교점을 A, B라 하자. 두 점 C$(a,\ 0)$, D$(-a,\ 0)$에 대하여, 사각형 ADBC의 넓이를 구하시오.

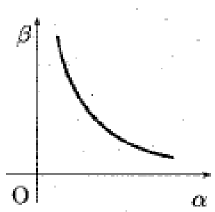
(단, a와 c는 양수이다.)

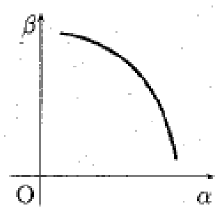


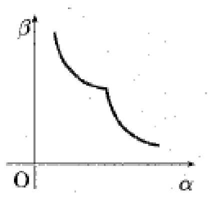
10. 2009 교육청(3점)

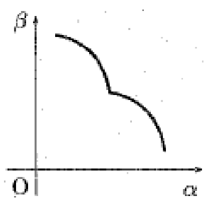
타원 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P 에서의 접선을 l 이라 하자. 또, 두 초점 F_1, F_2 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하자. $\overline{H_1F_1}=\alpha$, $\overline{H_2F_2}=\beta$ 일 때, α, β 사이의 관계를 나타내는 그래프의 개형은?

①


②


③


④


⑤


11. 2008 교육청(3점)

세 이차곡선

$x^2=4py\ (p\neq 0)$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x\neq\pm a)$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (|x|>a)$

각각에 대하여, 곡선 위에 있는 임의의 점에서의 접선의 기울기들의 집합을 M_1, M_2, M_3 라 하자. 다음 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\left|\dfrac{2b}{a}\right|\in M_3$

ㄴ. $M_1=M_2$

ㄷ. $M_2\supset M_3$

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄴ,ㄷ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

12. 2007 평가원(3점)

쌍곡선 $x^2-y^2=1$에 대한 옳은 설명을 <보기>에서 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 점근선의 방정식은 $y=x$, $y=-x$이다.

ㄴ. 쌍곡선 위의 점에서 그은 접선 중 점근선과 평행한 접선이 존재한다.

ㄷ. 포물선 $y^2=4px\ (p\neq 0)$는 쌍곡선과 항상 두 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 2004 평가원(3점)

두 초점을 공유하는 타원 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$과 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선의 한 점근선이 $y=\sqrt{35}\,x$ 일 때, 이 쌍곡선의 두 꼭지점 사이의 거리는?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

14. 2006 교육청(3점)

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{18}=1$과 직선 $y=ax+b$ (a, b는 상수)의 교점의 개수에 대한 설명 중 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $a=-4$이고 $b=0$일 때 교점은 없다.
ㄴ. $a=3$이고 $b>0$일 때 교점은 1개이다.
ㄷ. $a=\frac{1}{3}$이고 $b<0$일 때 교점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 2007 평가원(3점)

쌍곡선 $x^2-y^2=1$에 대한 옳은 설명을 <보기>에서 모두 고른 것은?

ㄱ. 점근선의 방정식은 $y=x$, $y=-x$이다.
ㄴ. 쌍곡선 위의 점에서 그은 접선 중 점근선과 평행한 접선이 존재한다.
ㄷ. 포물선 $y^2=4px\ (p\neq 0)$는 쌍곡선과 항상 두 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 2005 평가원(3점)

직선 $y=3x+5$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{2}=1$에 접할 때, 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

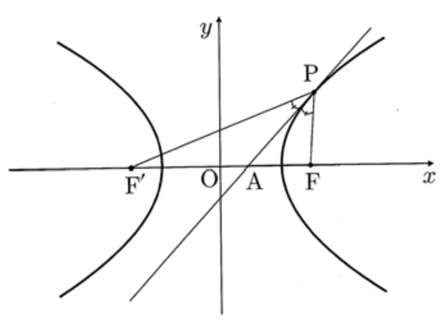
17. 2010 평가원(3점)

좌표평면 위의 점 $(-1, 0)$에서 쌍곡선 $x^2-y^2=2$에 그은 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, m^2+n^2의 값은? (단, m, n은 상수이다.)

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

18. 2007 교육청(3점)

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 ∠F′PF의 이등분선이 x축과 점 A$(1, 0)$에서 만날 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이를 구하시오.



19. 2009 평가원(3점)

쌍곡선 $9x^2-16y^2=144$의 초점을 지나고 점근선과 평행한 4개의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{75}{16}$ ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{25}{2}$
④ $\frac{75}{4}$ ⑤ $\frac{75}{2}$

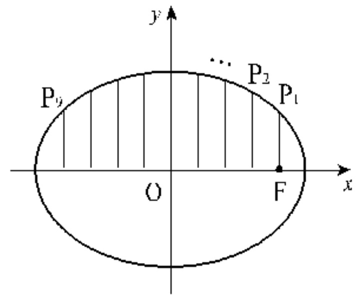
20. 2006 평가원(4점)

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 $(2\sqrt{3},\ 0)$, $(-2\sqrt{3},\ 0)$을 각각 F, F'이라 하자. 이 쌍곡선 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)(x>0)$에 대하여 선분$\mathrm{F'P}$ 위의 점 Q가 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시킬 때, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는?

① π ② $\sqrt{3}\pi$ ③ 2π
④ 3π ⑤ $2\sqrt{3}\pi$

21. 2004 교육청(4점)

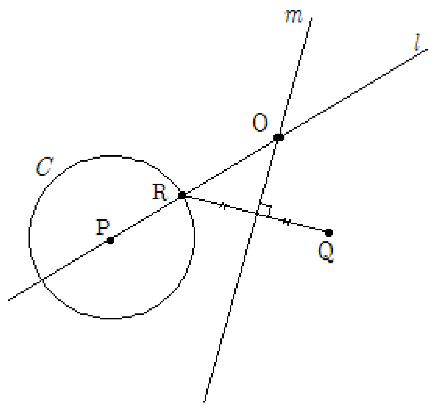
그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$의 장축을 10등분한 후 장축의 양 끝점을 제외하고 각 등분점에서 장축에 수직인 직선을 그어 x축 윗쪽 부분에 있는 타원과의 교점을 차례로 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots, \mathrm{P}_9$라 하자.



타원의 한 초점을 F라고 할 때, $\sum_{k=1}^{9}\overline{\mathrm{FP}_k}$의 값을 구하시오.

22. 2007 교육청(3점)

다음은 어느 이차곡선을 작도하는 과정이다.
[1단계] 정점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 C를 그리고, 원 밖의 한 점 Q를 잡는다.
[2단계] 동점 R은 원 C 위를 움직인다.
[3단계] 두 점 P와 R를 지나는 직선 l과 $\overline{\mathrm{QR}}$의 수직이등분선 m이 만나는 점을 O라 하자.



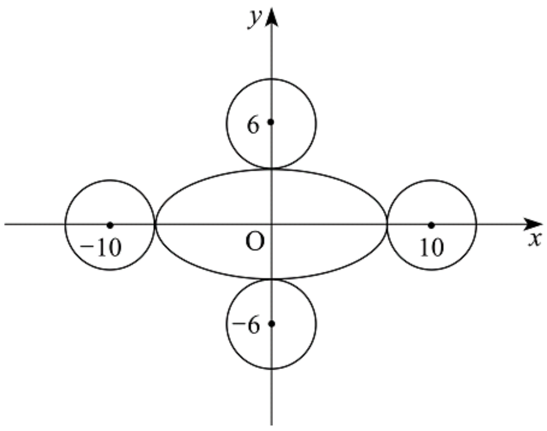
위 과정에서 점 O의 자취가 그리는 이차곡선에 대하여 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]
ㄱ. $\overline{\mathrm{OP}}$와 $\overline{\mathrm{OQ}}$의 길이의 차는 일정하다.
ㄴ. 점 Q는 이차곡선의 초점이다.
ㄷ. 작도된 이차곡선을 반사거울로 생각하고, 점 P에서 이 곡선 위로 빛을 쏘면 점 Q를 지난다.

① ㄷ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 2007 교육청(4점)

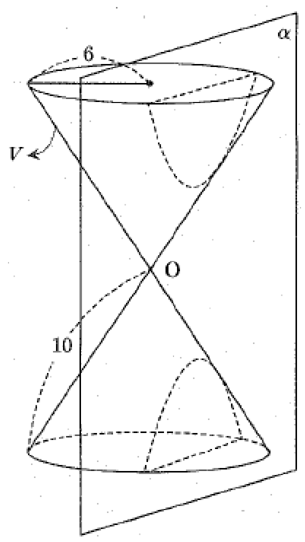
그림과 같이 좌표평면에 중심의 좌표가 각각 $(10, 0)$, $(-10, 0)$, $(0, 6)$, $(0, -6)$ 이고 반지름의 길이가 모두 같은 4개의 원에 동시에 접하고, 초점이 x축 위에 있는 타원이 있다.



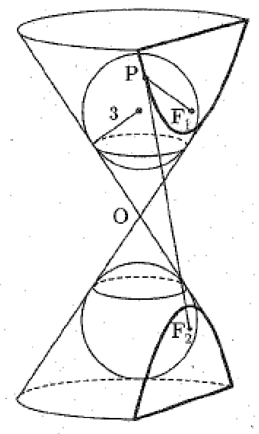
이 타원의 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{10}$ 일 때, 장축의 길이를 구하시오. (단, 네 원의 중심은 타원의 외부에 있다.)

24. 2009 교육청(4점)

[그림 1]과 같이 반지름의 길이가 6, 모선의 길이가 10인 원뿔 두 개가 점 O를 공유하면서 밑면이 서로 평행한 입체도형을 V라 하자. V의 밑면과 수직인 평면 α로 V를 자르면 단면에 쌍곡선이 생긴다. [그림 2]와 같이 반지름의 길이가 3인 두 개의 구가 잘린 입체도형의 옆면 및 단면에 접할 때, 두 개의 구와 평면 α가 접하는 점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$라 하자. 이 때, 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overline{\mathrm{PF_1}}-\overline{\mathrm{PF_2}}|$의 값을 구하시오.



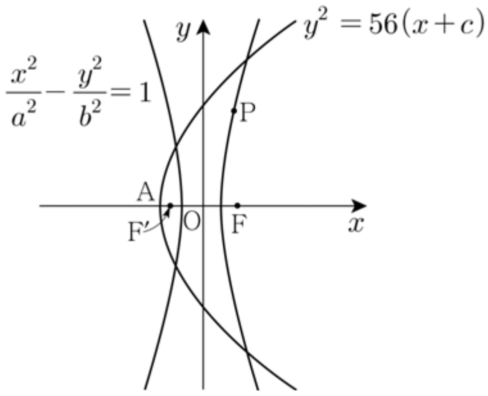
[그림 1]



[그림 2]

25. 2009 교육청(4점)

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(k, 0)$, $\mathrm{F'}(-k, 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 과 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2=56(x+c)$ 가 있다.



쌍곡선 위의 임의의 점 P에 대하여 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=10$ 이 성립하고, 포물선의 꼭짓점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{FF'}}=1:6$ 이 성립한다. 이때, $\dfrac{c^2}{a^2-b^2}$ 의 값은? (단, $0<k<c$ 이다.)

① $\dfrac{53}{14}$ ② $\dfrac{55}{14}$ ③ $\dfrac{30}{7}$
④ $\dfrac{32}{7}$ ⑤ $\dfrac{34}{7}$

26. 2010 교육청(4점)

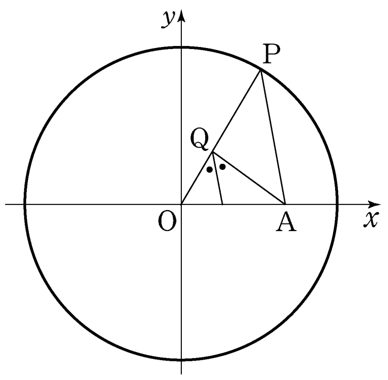
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 의 점근선과 직선 $x=4$가 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 중심이 원점이고 점 P를 지나는 원이 쌍곡선과 제 1사분면에서 만나는 점을 Q, x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{BQ}}$ 의 값은?

① 9 ② 15 ③ 18
④ 20 ⑤ 25

27. 2008 평가원(4점)

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=36$ 위를 움직이는 점 P(a, b)와 점 A(4, 0)에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 Q 전체의 집합을 X라 하자. (단, $b \neq 0$)

(가) 점 Q는 선분 OP 위에 있다.
(나) 점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 ∠OQA를 이등분한다.



집합의 포함관계로 옳은 것은?

① $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{5}=1\right\}$

② $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1\right\}$

③ $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \frac{(x-1)^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1\right\}$

④ $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\right\}$

⑤ $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\right\}$

28. 2010 수능 (3점)

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{PQ}=4\sqrt{5}$ 일 때, a^2+b^2의 값은?

① 21 ② 32 ③ 45
④ 60 ⑤ 77

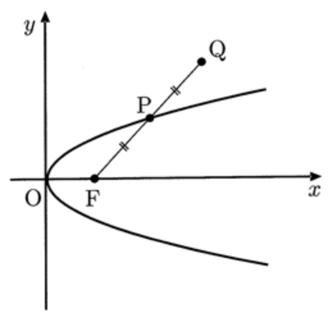
29. 2004 수능 (3점)

두 타원이 점 F를 한 초점으로 공유하고 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 두 타원의 장축의 길이가 각각 16, 24이고, 두 타원의 나머지 초점을 각각 F_1, F_2라 할 때, $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|+\left|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}\right|$의 값은?

① 16 ② 14 ③ 12
④ 10 ⑤ 8

30. 2007 수능 (3점)

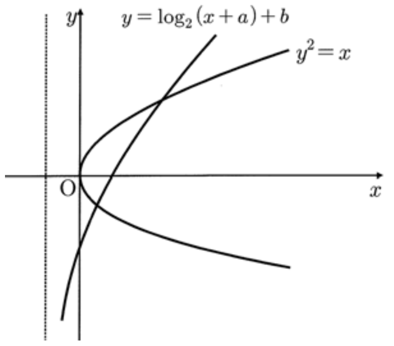
초점이 F인 포물선 $y^2=x$ 위에 $\overline{FP}=4$인 점 P가 있다. 그림과 같이 선분 FP의 연장선 위에 $\overline{FP}=\overline{PQ}$가 되도록 점 Q를 잡을 때, 점 Q의 x좌표는?



① $\frac{29}{4}$ ② 7 ③ $\frac{27}{4}$
④ $\frac{13}{2}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

31. 2008 수능 (3점)

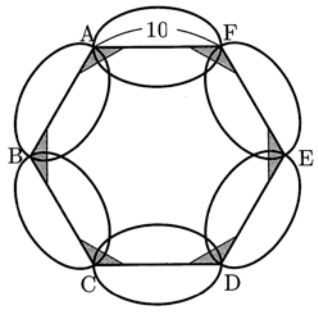
로그함수 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프가 포물선 $y^2=x$의 초점을 지나고, 이 로그함수의 그래프의 점근선이 포물선 $y^2=x$의 준선과 일치할 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{21}{8}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

32. 2006 수능 (3점)

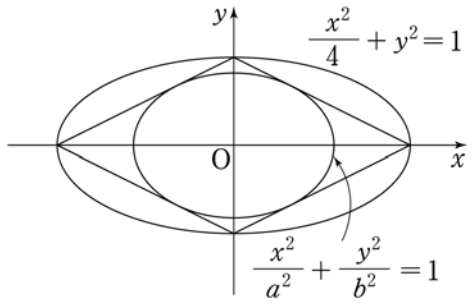
오른쪽 그림은 한 변의 길이가 10인 정육각형 ABCDEF의 각 변을 장축으로 하고, 단축의 길이가 같은 타원 6개를 그린 것이다. 그림과 같이 정육각형의 꼭지점과 이웃하는 두 타원의 초점으로 이루어진 삼각형 6개의 넓이의 합이 $6\sqrt{3}$일 때, 타원의 단축의 길이는?



① $6\sqrt{2}$ ② 8
③ $4\sqrt{3}$ ④ 6 ⑤ $4\sqrt{2}$

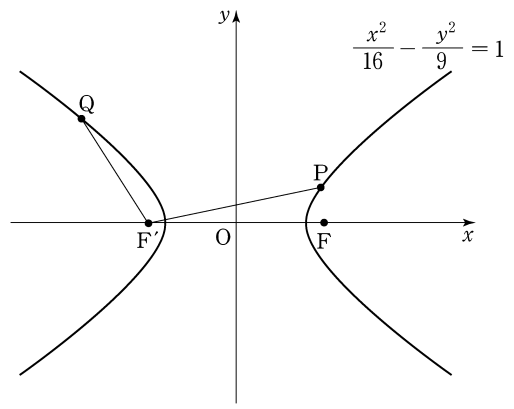
33. 2008 수능 (3점)

타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 네 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형에 내접하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $F(b, 0)$, $F'(-b, 0)$일 때, $a^2b^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



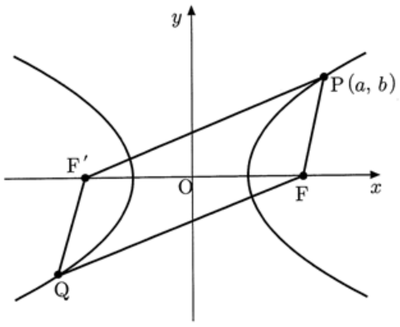
34. 2007 수능 (3점)

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P와 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점Q에 대하여 $\overline{PF'}-\overline{QF'}=3$일 때, $\overline{QF}-\overline{PF}$의 값을 구하시오.



35. 2006 수능 (3점)

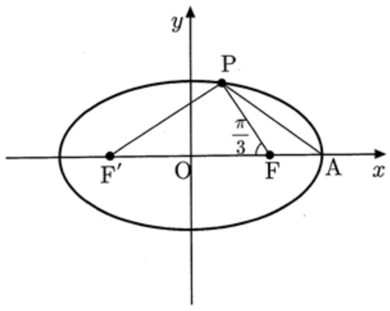
쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하고, 꼭지점이 아닌 쌍곡선 위의 한 점 P의 원점에 대한 대칭인 점을 Q라 하자. 사각형 F′QFP의 넓이가 24가 되는 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $|a|+|b|$의 값은?



① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

36. 2005 수능 (4점)

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점을 F와 F′이라 하고, 초점 F에 가장 가까운 꼭지점을 A라 하자. 이 타원 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PFF'}=\frac{\pi}{3}$일 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2$의 값을 구하시오.



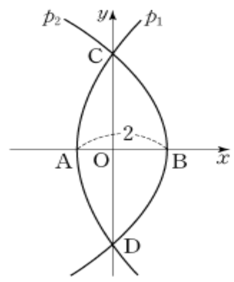
37. 2011 수능 (3점)

좌표평면에서 점 $A(0,\ 4)$와 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 두 점 A와 P를 지나는 직선이 원 $x^2+(y-3)^2=1$과 만나는 두 점 중에서 A가 아닌 점을 Q라 하자. 점 P가 타원 위의 모든 점을 지날 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi$

38. 2011 수능 (4점)

그림과 같이 좌표평면에서 x축 위의 두 점 A, B에 대하여 꼭짓점이 A인 포물선 p_1과 꼭짓점이 B인 포물선 p_2가 다음 조건을 만족시킨다. 이때, 삼각형 ABC의 넓이는?

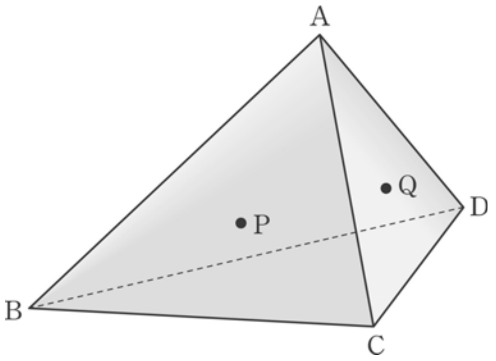


(가) p_2의 초점은 B이고, p_2의 초점은 원점 O이다.
(나) p_1과 p_2는 y축 위의 두 점 C, D에서 만난다.
(다) $\overline{AB}=2$

① $4(\sqrt{2}-1)$ ② $3(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

1. 2004 평가원(3점)

사면체ABCD의 면ABC,ACD의 무게중심을 각각P,Q 라고 하자. <보기>에서 두 직선이 꼬인 위치에 있는 것을 모두 고르면?

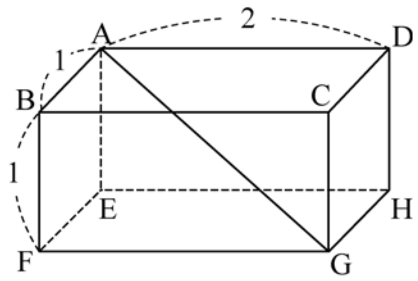


[보 기]
ㄱ. 직선 CD 와 직선 BQ
ㄴ. 직선 AD 와 직선 BC
ㄷ. 직선 PQ 와 직선 BD

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 2006 교육청(3점)

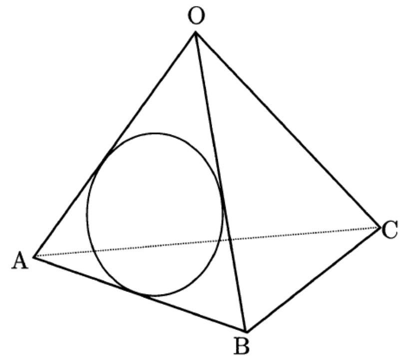
그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BF}=1$, $\overline{AD}=2$인 직육면체 ABCD−EFGH에서 대각선 AG가 세 면 ABCD, BFGC, ABFE와 이루는 각의 크기를 각각 α, β, γ라고 할 때, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$의 값은?



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

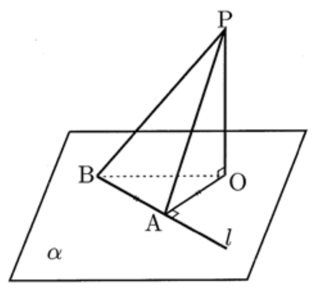
3. 2006 교육청(3점)

한 변의 길이가 1인 정사면체 $OABC$에서 $\triangle OAB$에 내접하는 원의 평면 ABC위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, $\frac{\pi}{S'}$의 값을 구하시오.



4. 2004 교육청(3점)

오른쪽 그림과 같이 평면 α밖의 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O, O에서 α위의 직선 l에 내린 수선의 발을 A라 하고, $\overline{AO}=\overline{AB}$가 되도록 점 B를 l위에 잡는다. 다음은 $\overline{OB}=a$, $\overline{AP}=2a$일 때, 넓이의 비 $\frac{\triangle AOB}{\triangle APB}$의 값을 구하는 과정이다.



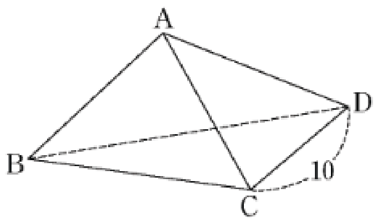
$\triangle$AOB는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AO}=$ (가)
$\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{AO}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\triangle$APB는 (나)가 90°인 직각삼각형이다.
$\therefore \frac{\triangle AOB}{\triangle APB}=\frac{\overline{AO}}{\overline{AP}}=$ (다)

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $\frac{\sqrt{2}}{4}a$, ∠A, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}a$, ∠B, $\frac{\sqrt{2}}{4}$
③ $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, ∠A, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, ∠A, $\frac{\sqrt{2}}{4}$
⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, ∠B, $\frac{\sqrt{2}}{4}$

5. 2009 평가원(3점)

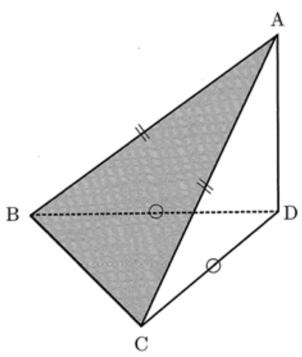
사면체 ABCD에서 모서리 CD의 길이는 10, 면 ACD의 넓이는 40이고, 면 BCD와 면 ACD가 이루는 각의 크기는 $30°$이다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이는?



① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ 5
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

6. 2005 교육청(4점)

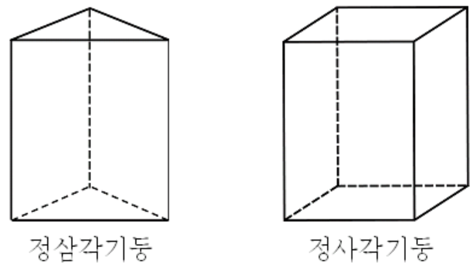
그림과 같이 사면체 ABCD의 각 모서리의 길이는 $\overline{AB}=\overline{AC}=7$, $\overline{BD}=\overline{CD}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AD}=4$이다. 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 이면각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, θ는 예각)



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

7. 2007 교육청(4점)

정n각기둥에서 밑면의 한 모서리와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(3)=3$, $f(4)=4$이다.

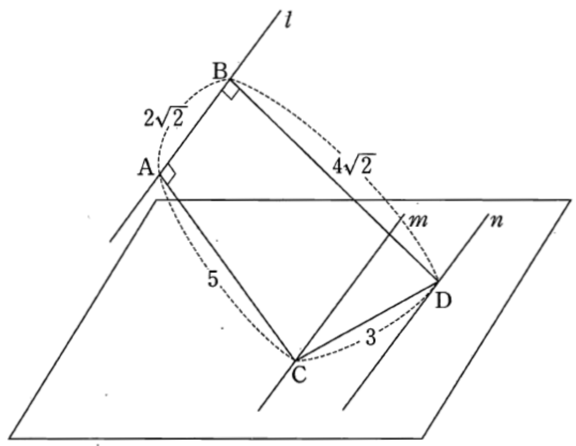


이때, $\sum_{n=3}^{30} f(n)$의 값을 구하시오.

8. 2010 평가원(4점)

같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=3$
(나) $\overline{AC}\perp l$, $\overline{AC}=5$
(다) $\overline{BD}\perp l$, $\overline{BD}=4\sqrt{2}$



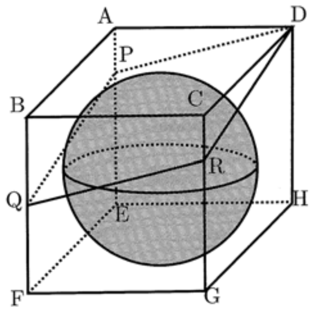
두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

9. 2006 교육청(4점)

공간에서 평면 α위에 세 변의 길이가 $\overline{AB}=\overline{AC}=10$, $\overline{BC}=12$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 지나고 평면 α에 수직인 직선 l위의 점 D에 대하여 $\overline{AD}=6$이 되도록 점 D를 잡을 때 $\triangle$DBC의 넓이를 구하시오.

10. 2005 교육청(4점)

그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정육면체 ABCD−EFGH에 내접하는 구가 있다. 변 AE, CG를 1:3으로 내분하는 점을 각각 P, R라 하고 변 BF의 중점을 Q라 한다. 네 점 D, P, Q, R를 지나는 평면으로 내접하는 구를 자를 때 생기는 원의 넓이는?

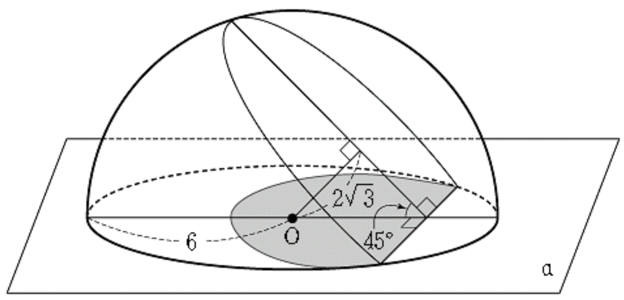


① 26π ② 28π ③ 30π ④ 32π ⑤ 34π

11. 2007 평가원(4점)

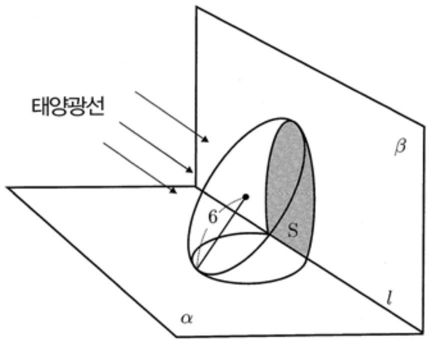
반지름의 길이가 6인 반구가 평면 α 위에 놓여 있다. 반구와 평면 α가 만나서 생기는 원의 중심을 O라 하자. 그림과 같이 중심 O로부터 거리가 $2\sqrt{3}$이고 평면 α와 45°의 각을 이루는 평면으로 반구를 자를 때, 반구에 나타나는 단면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{2}(a+b\pi)$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 자연수이다.)



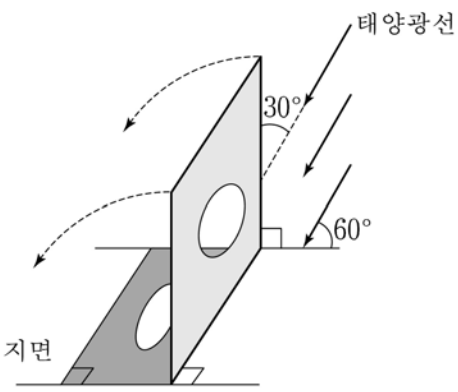
12. 2006 평가원(4점)

서로 수직인 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 반지름의 길이가 6인 원판이 두 평면 α, β와 각각 한 점에서 만나고 교선 l에 평행하게 놓여 있다. 태양광선이 평면 α와 30°의 각을 이루면서 원판의 면에 수직으로 비출 때, 그림과 같이 평면 β에 나타나는 원판의 그림자의 넓이를 S라 하자. S의 값을 $a+b\sqrt{3}\pi$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 자연수이고 원판의 두께는 무시한다.)



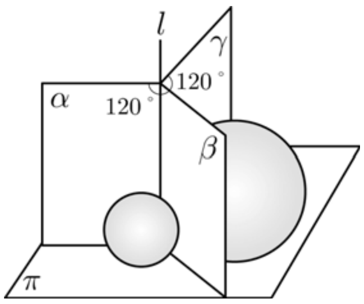
13. 2008 평가원(4점)

그림과 같이 태양광선이 지면과 60°의 각을 이루면서 비추고 있다. 한 변의 길이가 4인 정사각형의 중앙에 반지름의 길이가 1인 원 모양의 구멍이 뚫려 있는 판이 있다. 이 판은 지면과 수직으로 서 있고 태양광선과 30°의 각을 이루고 있다. 판의 밑변을 지면에 고정하고 판을 그림자 쪽으로 기울일 때 생기는 그림자의 최대 넓이를 S라 하자. S의 값을 $\frac{\sqrt{3}(a+b\pi)}{3}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이고 판의 두께는 무시한다.)



14. 2009 교육청(4점)

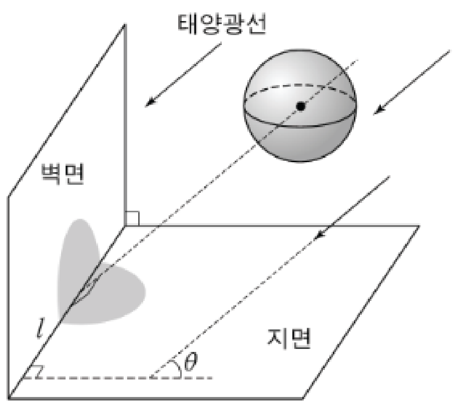
평면 π에 수직인 직선 l을 경계로 하는 세 반평면 α, β, γ가 있다. α, β가 이루는 각의 크기와 β, γ가 이루는 각의 크기는 모두 120°이다. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 구가 π, α, β에 동시에 접하고, 반지름의 길이가 2인 구가 π, β, γ에 동시에 접한다.



두 구의 중심 사이의 거리를 d라 할 때, $3d^2$의 값을 구하시오. (단, 두 구는 평면 π의 같은 쪽에 있다.)

15. 2009 평가원(4점)

그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다. 벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 a라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 b라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다.

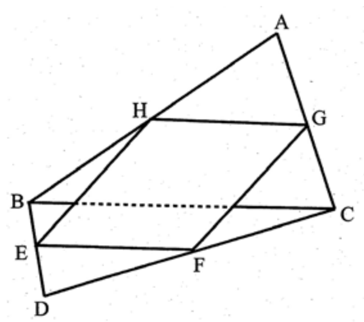
ㄴ. $\theta=60^\circ$이면 $a<b$이다.

ㄷ. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{r^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

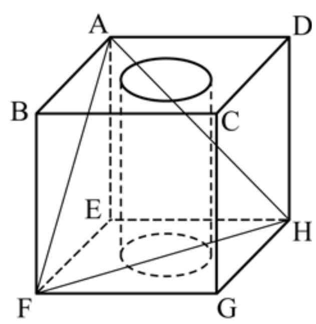
16. 2008 교육청(4점)

한 평면 위에 있지 않은 네 점 A, B, C, D에 대하여 선분 BD, 선분 CD, 선분 AC, 선분 AB 각각의 중점 E, F, G, H는 한 평면 위에 있다. $\overline{AB}=\overline{CD}=7$, $\overline{AC}=\overline{BD}=5$, $\overline{BC}=6$이고 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각이 60°일 때, 사각형 EFGH의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. 이 때, $4S^2$의 값을 구하시오.



17. 2007 교육청(4점)

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD−EFGH의 내부에 밑면의 반지름의 길이가 1인 원기둥이 있다. 원기둥의 밑면의 중심은 두 정사각형 ABCD, EFGH의 두 대각선의 교점과 각각 일치한다.



이 원기둥이 세 점 A, F, H를 지나는 평면에 의하여 잘린 단면의 넓이는?

① $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ ② $\sqrt{2}\pi$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$
④ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}\pi$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

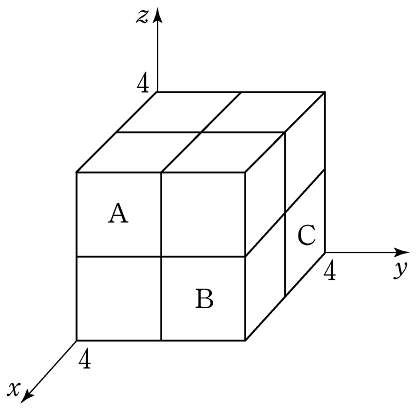
18. 2010 평가원(2점)

좌표공간에서 직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2$가 평면 $z=4$와 만나는 점의 좌표를 (a, b, c)라 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

19. 2007 평가원(3점)

그림과 같이 좌표공간에서 한 변의 길이가 4인 정육면체를 한 변의 길이가 2인 8개의 정육면체로 나누었다. 이 중 그림의 세 정육면체 A, B, C 안에 반지름의 길이가 1인 구가 각각 내접하고 있다. 3개의 구의 중심을 연결한 삼각형의 무게중심의 좌표를 (p, q, r)라 할 때, $p+q+r$의 값은?



① 6 ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$
④ 7 ⑤ $\frac{22}{3}$

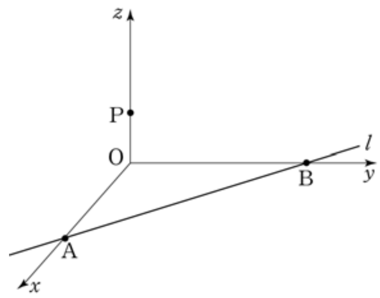
20. 2005 평가원(3점)

좌표공간의 세 점 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 3)$에 대하여 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 P, 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 P, Q의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 P', Q'이라 할 때, 삼각형 $OP'Q'$의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

21. 2005 평가원(3점)

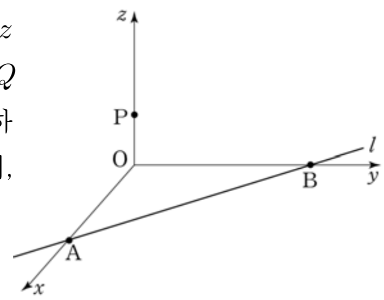
좌표공간에서 두 점 $A(1, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$을 지나는 직선 l이 있다. 점 $P\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$로부터 직선 l에 이르는 거리는?



① 1 ② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}$ ④ 2
⑤ $\sqrt{5}$

22. 2010 평가원(3점)

좌표공간에서 점 $P(-3, 4, 5)$를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하자. 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 (a, b, c)라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.



23. 2010 교육청(3점)

점 $(1, -2, 3)$지나고 직선 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$에 평행인 직선이 점 $(3, a, b)$을 지난다. $a+b$의 값은?

[3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

24. 2008 평가원(3점)

다음 조건을 만족하는 점 P 전체의 집합이 나타내는 도형의 둘레의 길이는?

> 좌표공간에서 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가 두 개의 구
> $$x^2+y^2+z^2=1$$
> $$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$$
> 에 동시에 외접한다.

① $\frac{2\sqrt{5}}{3}\pi$ ② $\sqrt{5}\pi$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}\pi$
④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

25. 2004 평가원(4점)

좌표공간에서 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 위에 있는 사각형 ABCD의 xy평면으로의 정사영은 사각형 $A'B'C'D'$이다.
$A'\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $B'\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$, $C'\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$, $D'\left(\frac{1}{2},1,0\right)$일 때, 사각형ABCD의 둘레의 길이는?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}+2$ ③ $4\sqrt{3}$
④ 6 ⑤ 8

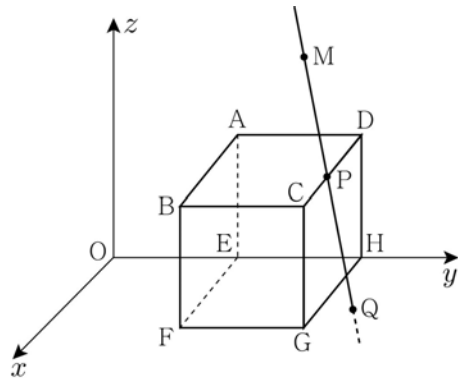
26. 2006 평가원(3점)

좌표공간의 세 점 $A(a,\ 0,\ b)$,$B(b,\ a,\ 0)$,$C(0,\ b,\ a)$에 대하여 $a^2+b^2=4$일 때, 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값은?
(단, $a>0$이고 $b>0$이다.)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ 3

27. 2009 교육청(4점)

그림과 같이 좌표공간에 있는 정육면체 ABCD−EFGH에서 $A(0,3,3)$, $E(0,3,0)$, $F(3,3,0)$, $H(0,6,0)$이다.



점 $M(1,5,6)$과 정육면체의 모서리 위를 움직이는 점 P에 대하여 직선 MP가 xy평면과 만나는 점을 Q라 하자. 이때, 선분 MQ의 길이의 최댓값은?

① $2\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{14}$
④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $2\sqrt{17}$

28. 2004 평가원(4점)

좌표공간에 반구 $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9,\ z\geq 0$가 있다. y축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, α와 xy평면이 이루는 각을 θ라 하자. 이때, $30\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

29. 2010 교육청(4점)

좌표공간에 x축, y축 및 z축에 접하는 구
$$S:\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$$
가 있다. 점 $A(0,0,3)$에서 구 S에 그은 접선들과 xy평면의 교점으로 이루어진 도형에서 두 점 P,Q를 잡는다. 두 점 P,Q사이의 거리의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.

30. 2009 교육청(4점)

반지름의 길이가 각각 2, 4, 8 이고 서로 외접하는 세 개의 구가 평면 α 위에 놓여 있다. 세 구의 중심을 각각 A, B, C 라 하고, 평면 ABC 와 평면 α 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. $\cos\theta = \frac{b}{a}\sqrt{2}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

31. 2006 교육청(4점)

좌표공간에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 9 인 구가 세 점 A(18, 0, 0), B(0, 9, 0), C(0, 0, 9)를 지나는 평면에 의하여 잘린 도형의 넓이는 $a\pi$ 이다. 이때, a 의 값을 구하시오.

32. 2006 교육청(4점)

구 $x^2+y^2+z^2=2$ 위의 점 P와 두 정점 $A\left(\frac{7}{2},\ 3,\ -1\right)$, $B\left(\frac{5}{2},\ 1,\ -3\right)$에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 가 성립한다. $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값은?

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

33. 2006 교육청(4점)

x축을 중심을 갖는 두 평면이 구 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$ 위의 두 점 A, B에서 접한다. 구의 중심을 C, $\triangle CAB$의 넓이를 S라 할 때, $10S$의 값을 구하시오.

34. 2008 교육청(4점)

좌표공간 위의 세 점 P(3, 0, 0), Q(0, 3, 0), R(0, 0, 3) 을 포함하는 평면을 α_1, $\triangle PQR$ 의 외접원을 C_1 이라 하자. 또한, 반지름이 r 이고 중심의 좌표가 F(6, −3, −3) 인 구 S 에 대하여, 평면 α 와 구 S 가 만나서 생기는 원을 C_2 라 하자. 두 원 C_1 과 C_2 는 서로 외접할 때, r^2 의 값을 구하시오.

35. 2007 수능 (3점)

좌표공간에서 평면 $x=3$과 평면 $z=1$의 교선을 l이라 하자. 점 P가 직선 l 위를 움직일 때, 선분 OP의 길이의 최솟값은?

(단, O는 원점이다.)

① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{14}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

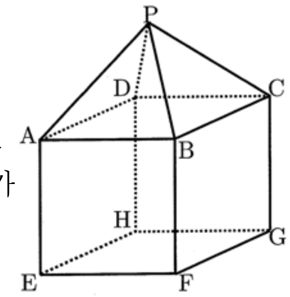
36. 2011 수능 (2점)

좌표공간에서 점 $P(0,3,0)$과 점 $A(-1,1,a)$ 사이의 거리는 점 P와 점 $B(1,2,-1)$ 사이의 거리의 2배이다. 양수 a의 값은 ?

① $\sqrt{7}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{5}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{3}$

37. 2004 수능 (3점)

오른쪽 그림과 같이 정육면체 위에 정사각뿔을 올려놓은 도형이 있다. 이 도형의 모든 모서리의 길이가 2이고, 면 PAB와 면 AEFB가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $\cos\theta$의 값은?

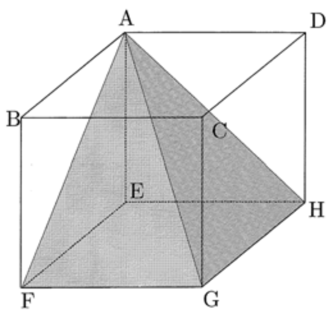


(단, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$)

① $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

38. 2007 수능 (3점)

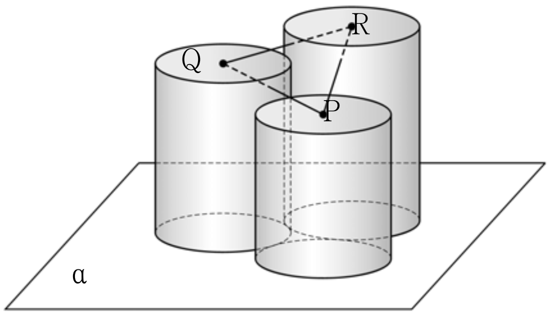
정육면체 ABCD$-$EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

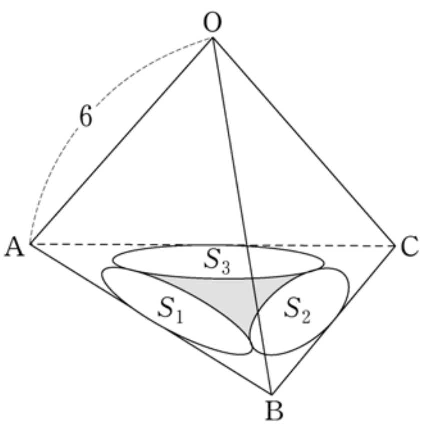
39. 2008 수능 (4점)

그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$ 이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 60°이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $8<a<b$)



40. 2007 수능 (4점)

한 변의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 세 삼각형 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$에 각각 내접하는 세 원의 평면ABC 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. 그림과 같이 세 도형 S_1, S_2, S_3으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 할 때, $(S+\pi)^2$의 값을 구하시오.



41. 2008 수능 (4점)

좌표공간에서 구 $S : x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $\alpha : y-\sqrt{3}z=2$가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 A$(0, 2, 0)$에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s라 할 때, s^2의 값을 구하시오.

42. 2010 수능 (4점)

좌표공간에서 x축을 포함하고 xy평면과 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 평면을 α라 하자. 평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 만나서 생기는 도형의 xy평면 위로의 정사영이 영역 $\{(x, y, 0) | x+3y-2 \leq 0\}$에 포함되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 최댓값을 M이라 하자. $60M^2$의 값을 구하시오.

43. 2010 수능 (3점)

좌표공간에서 직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=z-1$에 수직이고 점 $(1,-5,2)$를 지나는 평면의 방정식을 $2x+ay+bz+c=0$이라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

44. 2011 수능 (3점)

좌표공간에서 직선 $\frac{x}{2}=y=z+3$ 과 평면 $\alpha: x+2y+2z=6$ 의 교점을 A라 하자. 중심이 점 $(1,\ -1,\ 5)$ 이고 점 A를 지나는 구가 평면 α 와 만나서 생기는 도형의 넓이는 $k\pi$ 이다. k 의 값을 구하시오.

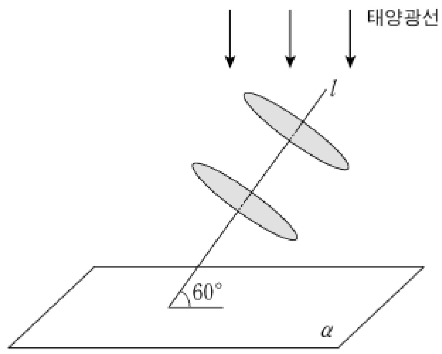
45. 2010 수능 (3점)

평면 α 위에 $\angle A=90^o$ 이고 $\overline{BC}=6$ 인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 평면 α 밖의 한 점 P에서 이 평면까지의 거리가 4 이고, 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발이 점 A 일 때, 점 P에서 직선 BC 까지의 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② 5 ③ $3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

46. 2011 수능 (4점)

그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 60°이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 원판의 두께는 무시한다.)



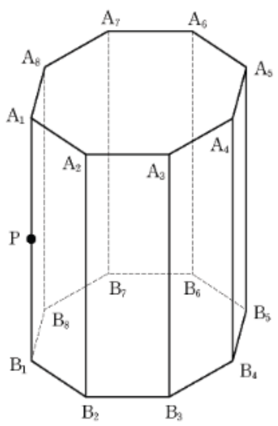
① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{8}$ ② $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{1}{8}$
④ $\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$

1. 2004 교육청(3점)

세 벡터 $\overrightarrow{a}=(2,\ 3)$, $\overrightarrow{b}=(x,-1)$, $\overrightarrow{c}=(-4,\ y)$에 대하여 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$가 성립할 때, 두 실수 x, y의 곱을 구하시오.

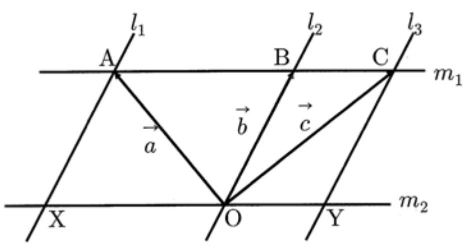
2. 2009 평가원(3점)

다음 그림은 밑면이 정팔각형인 팔각기둥이다. $\overline{A_1A_3}=3\sqrt{2}$ 이고, 점 P가 모서리 A_1B_1의 중점일 때, 벡터 $\sum_{i=1}^{8}\left(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_1}\right)$의 크기를 구하시오.



3. 2004 평가원(3점)

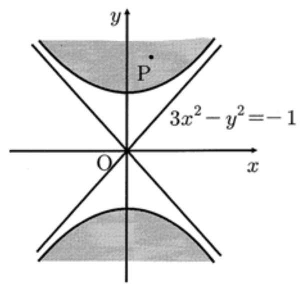
그림과 같이 한 평면 위에서 서로 평행한 세 직선 l_1, l_2, l_3가 평행한 두 직선 m_1, m_2와 A, B, C, X, O, Y에서 만나고 있다. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c}$라고 할 때, $\overrightarrow{AP}=(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})t$ (t는 실수)를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은?



① 직선 AY ② 직선 AO ③ 직선 AX
④ 직선 AB ⑤ 직선 CX

4. 2005 교육청(3점)

그림과 같이 쌍곡선 $3x^2-y^2\leq-1$의 색칠한 영역 위를 움직이는 동점 P에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$라 정의 한다. 이 때, $\overrightarrow{OA}$ 의 종점의 자취의 길이를 구하여라.



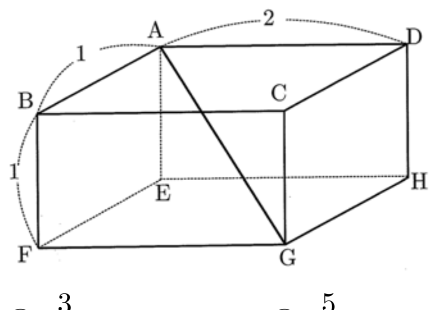
5. 2008 교육청(3점)

좌표공간에서 벡터 $\vec{v}$가 x축, y축 각각과 이루는 각의 크기가 모두 60° 일 때, 벡터 $\vec{v}$가 xy평면과 이루는 예각의 크기는?

① 15° ② 30° ③ 45°
④ 60° ⑤ 75°

6. 2006 교육청(3점)

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BF}=1$, $\overline{AD}=2$인 직육면체 ABCD−EFGH에서 대각선 AG가 세 면 ABCD, BFGC, ABFE와 이루는 각의 크기를 각각 α,β,γ라고 할 때, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$의 값은?



① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2
④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

7. 2005 교육청(3점)

두 벡터 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-2,\ 2)$에 대하여 내적 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$의 값을 구하시오.

8. 2004 평가원(3점)

크기가 1인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$을 만족할 때, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각 θ의 크기는? (단, $0\leq\theta\leq\pi$)

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

9. 2005 교육청(3점)

두 벡터 $\vec{a}=(2,\ -3,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -4,\ 0)$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{2}{17}$ ② $\frac{5}{17}$ ③ $\frac{8}{17}$
④ $\frac{11}{17}$ ⑤ $\frac{14}{17}$

10. 2006 평가원(2점)

두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 2,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 4,\ -1)$이 이루는 각의 크기 θ의 값은? (단, $0\leq\theta\leq\pi$이다.)

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

11. 2007 교육청(3점)

세 점 O, A, B에 대하여 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$
> (나) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$

이때, 두 선분OA,OB를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이는?

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

12. 2005 교육청(4점)

평면 위에 삼각형 OAB가 있다.
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ ($s\geq 0,\ t\geq 0$)를 만족하는 점 P가 그리는 도형에 대한 옳은 설명을 다음에서 모두 고른 것은?

> ㄱ. $s+t=1$일 때, 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다.
> ㄴ. $s+2t=1$일 때, 점 P가 그리는 도형의 길이는 선분 AB의 길이 보다 크다.
> ㄷ. $s+2t\leq 1$일 때, 점 P가 그리는 영역은 삼각형 OAB를 포함한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 2005 교육청(3점)

다음은 삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라고 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$임을 증명하는 과정이다.

오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{CA}=\boxed{\text{(가)}}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

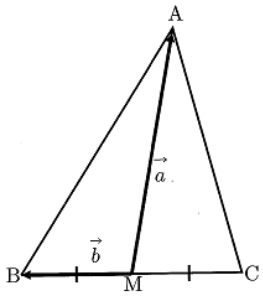
$=|\vec{a}|-|\vec{b}|^2+|\boxed{\text{(가)}}|^2$

$=|\vec{a}|^2-2\boxed{\text{(나)}}+|\vec{b}|^2$

$\quad +|\vec{a}|^2+2\boxed{\text{(나)}}+|\vec{b}|^2$

$=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

$=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$



위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}\cdot\vec{b}$ ② $\vec{a}-\vec{b},\ |\vec{a}||\vec{b}|$ ③ $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}\cdot\vec{b}$

④ $\vec{a}+\vec{b},\ |\vec{a}||\vec{b}|$ ⑤ $\vec{a}+\vec{b},\ \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$

14. 2007 교육청(3점)

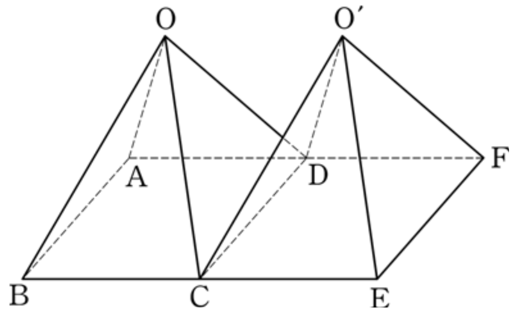
세 점 O(0,0), A(4,3), B(4,0)을 잇는 직각삼각형 AOB에서 세 내적값 a, b, c에 대하여 $a=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$, $b=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}$, $c=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 크기를 바르게 비교한 것은?

① $a=b>c$ ② $c=a>b$ ③ $a>c>b$

④ $b>a>c$ ⑤ $c>a>b$

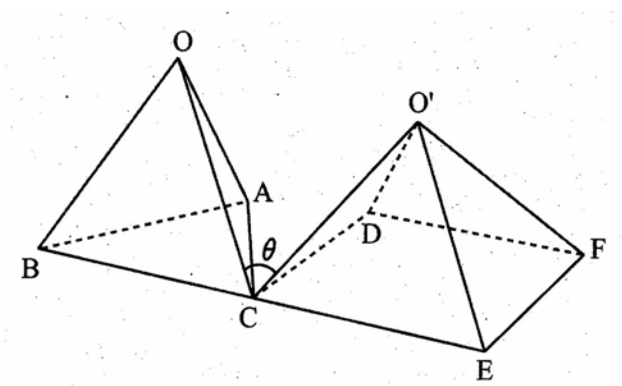
15. 2006 평가원(3점)

그림은 모든 모서리의 길이가 2인 두 개의 정사각뿔 O−ABCD, O′−DCEF에 대하여 모서리 CD를 일치시킨 도형을 나타낸 것이다. $|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}|^2$의 값을 구하시오. (단, 면 ABCD와 면 DCEF는 한 평면 위에 있다.)



16. 2008 교육청(3점)

모든 모서리의 길이가 2인 정사면체 OABC와 정사각뿔 O′−DCEF를 아래 그림과 같이 두 모서리 BC와 CE가 한 직선 위에 오도록 나란히 붙여 놓았다고 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{OC}$와 $\overrightarrow{OC'}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?(단, 삼각형 ABC와 사각형 DCEF는 한 평면 위에 있다.)

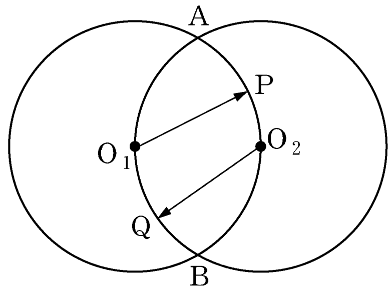


① $\dfrac{\sqrt{3}}{12}-\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{5}{12}\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}$

④ $\dfrac{7}{12}\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}$

17. 2008 평가원(3점)

평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 내적 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

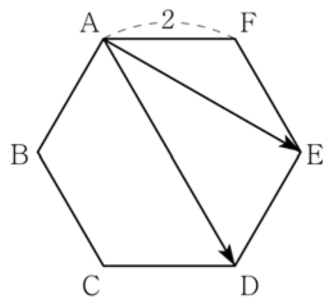


① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 1

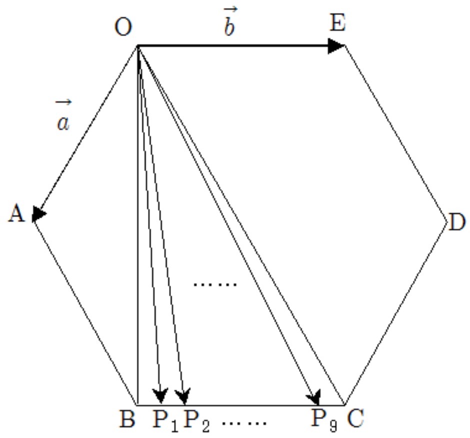
18. 2009 교육청(3점)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF가 있다. 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$의 내적 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$의 값을 구하시오.



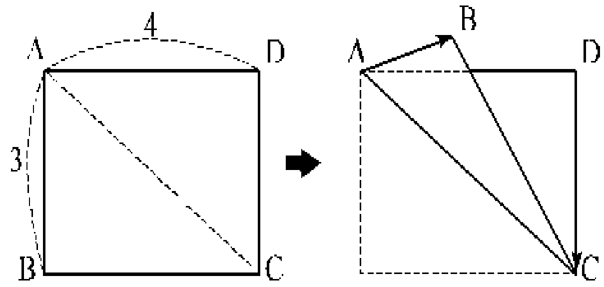
19. 2007 교육청(4점)

아래 그림과 같이 정육각형 OABCDE의 변 BC를 10등분한 점을 $P_1, P_2, \cdots, P_9$라 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OE}=\vec{b}$라 할 때, $\sum_{k=1}^{9}\overrightarrow{OP_k} = m\vec{a}+n\vec{b}$가 성립한다. 이 때, 두 실수 m, n에 대하여 $m+2n$의 값을 구하시오.



20. 2004 교육청(4점)

$\overline{AD}=4$, $\overline{AB}=3$인 직사각형 모양의 종이ABCD 가 있다. 대각선AC를 접는 선으로 하여 평면ABC가 평면 ACD와 수직이 되게 접는다. 접은 도형에서 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{b}{a}$ (a, b는 서로소인 자연수)일 때, $a+b$의 값을 구하시오.



21. 2004 교육청(4점)

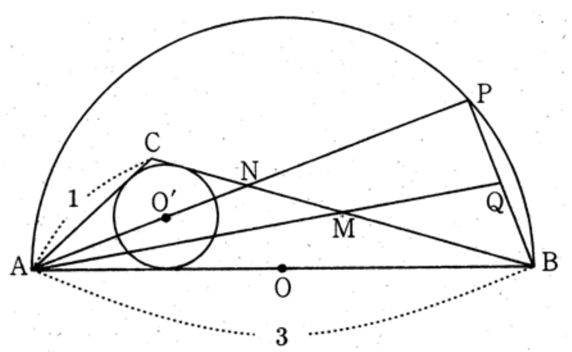
좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{B}(0,2)$가 있다. 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 두 조건 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} \le 0$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \le 4$를 만족할 때, 점P가 존재하는 영역의 넓이는?

① π ② $\sqrt{2}+\pi$ ③ $2+\pi$
④ $3+\pi$ ⑤ 2π

22. 2010 교육청(4점)

그림과 같이 점 O를 중심으로 하고, 길이가 3인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 이 반원의 내부에 $\overline{\mathrm{AC}}=1$인 점 C를 잡고, △ABC의 내접원의 중심을 O′이라 하자. 선분 AO′의 연장선과 선분 BC의 교점을 N, 반원과의 교점을 P라 하고, 선분 BC의 중점을 M, 선분 AM의 연장선과 선분 BP의 교점을 Q라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

4



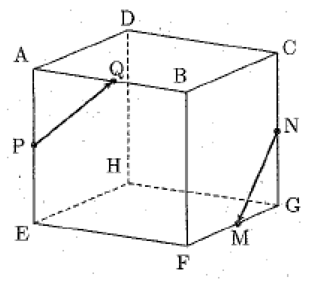
[보 기]

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=0$
ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
ㄷ. $2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 2009 교육청(3점)

그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{6}$ 인 정육면체 ABCD−EFGH 가 있다. 모서리 AE, AB, FG, CG 의 중점을 각각 P, Q, M, N 이라 하자.



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{NM}}\right|=\frac{b}{a}$$

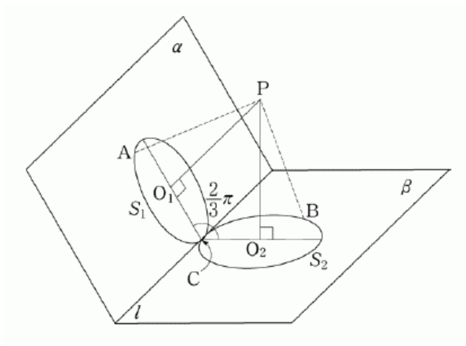
일 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

24. 2010 교육청(4점)

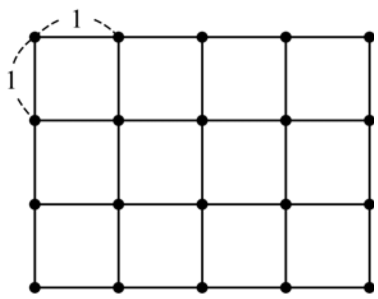
두 점 $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 1)$ 와 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 가 최대가 되는 점 P에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오

25. 2005 평가원(4점)

두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 평면 α위에 있는 원 S_1과 평면 β위에 있는 원 S_2는 반지름의 길이가 모두 2이다. 그림과 같이 원 S_1과 원 S_2는 점 C에서 직선 l과 접한다. S_1의 중심 O_1을 지나고 평면 α에 수직인 직선과 S_2의 중심 O_2를 지나고 평면 β에 수직인 직선이 만나는 점을 P라 하자. $\angle O_1CO_2 = \frac{2}{3}\pi$일 때, S_1 위에 있는 임의의 점 A와 S_2위에 있는 임의의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값을 구하시오.



26. 2008 교육청(3점)



그림은 한 변의 길이가 1인 정사각형 12개를 붙여 만든 도형이다. 20개의 꼭짓점 중 한 점을 시점으로 하고 다른 한 점을 종점으로 하는 모든 벡터들의 집합을 S라 하자. 집합 S의 두 원소 $\vec{x}$, $\vec{y}$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$이면 $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$의 값은 모두 정수이다.
ㄴ. $|\vec{x}|=\sqrt{5}$, $|\vec{y}|=\sqrt{2}$이면 $\vec{x}\cdot\vec{y}\neq 0$이다.
ㄷ. $\vec{x}\cdot\vec{y}$는 정수이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

27. 2005 교육청(3점)

좌표공간에서 점 A(1, 4, 2)가 직선 $\frac{x+1}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z-1}{2}$위에 있을 때, 점 A와 평면 $ax+by+2z+48=0$사이의 거리는? (단, a, b는 상수)

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

28. 2006 교육청(4점)

좌표공간에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 9인 구가 세 점 A(18, 0, 0), B(0, 9, 0), C(0, 0, 9)를 지나는 평면에 의하여 잘린 도형의 넓이는 $a\pi$이다. 이때, a의 값을 구하시오.

29. 2007 평가원(3점)

평면$2x-y=0$과 평면 $x-3y+kz+2=0$이 이루는 각의 크기가 60°일 때, 양의 상수 k의 값은?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

30. 2008 수능 (3점)

좌표공간에서 평면 $x=3$과 평면 $z=1$의 교선을 l이라 하자. 점 P가 직선 l 위를 움직일 때, 선분 OP의 길이의 최솟값은?
(단, O는 원점이다.)

① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

31. 2009 교육청(3점)

좌표공간에서 다섯 개의 점
$\mathrm{P}(1,\ 2,\ 5)$, $\mathrm{A}(0,\ -5,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ -1,\ -1)$,
$C(2,\ 3,\ -2)$, $D(-2,\ 2,\ 0)$
이 꼭짓점인 사각뿔 P$-$ABCD 가 있다.
평면 $2x+y-z-k=0$ 가 사각뿔 P$-$ABCD 와 교점을 갖기 위한 실수 k 의 값의 범위가 $a \leq k \leq b$ 일 때, $b-a$ 의 값을 구하시오.

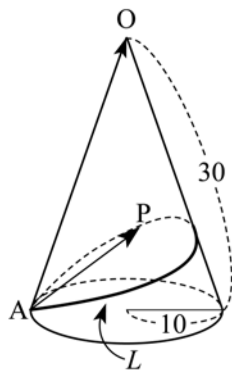
32. 2008 교육청(3점)

좌표공간에 구 $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-2)^2=9$ 와 구 밖의 한 점 $\mathrm{A}(1, 3, 5)$가 있다. 점 A에서 이 구에 그은 접선들의 접점으로 이루어진 도형을 포함하는 평면과 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

33. 2007 교육청(4점)

밑면의 반지름의 길이가 10, 모선의 길이가 30이고 꼭지점이 O인 직원뿔이 있다.
밑면의 둘레 위의 한 점 A에서 출발하여 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아 점 A로 되돌아오는 최단경로를 L이라 하자. L 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 B가
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$를 만족시킬 때, 점 B의 자취의 길이는?



① $10\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{3}$ ③ $20\sqrt{2}$ ④ $20\sqrt{3}$ ⑤ $20\sqrt{6}$

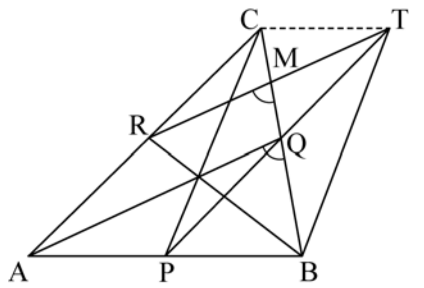
34. 2006 교육청(4점)

좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(4,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 6,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 6)$ 에 대하여 선분 AB의 중점을 D, 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점을 E라고 하자. 점 P가 선분 DE 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① -2 ② $\frac{12}{7}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{32}{7}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

35. 2006 교육청(4점)

$\triangle ABC$의 넓이를 S_1, $\triangle ABC$의 세 중선의 길이를 각 변의 길이로 하는 삼각형의 넓이를 S_2라고 할 때, 다음은 S_1과 S_2사이에 일정한 비가 성립함을 증명한 것이다.



<증명>

$\triangle ABC$의 각 변의 중점을 P, Q, R로 놓고 그림과 같이 $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BT}$가 되도록 점 T를 잡는다.

점 Q는 평행사변형 PBTC의 대각선 BC의중점이므로 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QT}$ ⋯ ㉠

또 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 이므로 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AR}$ ⋯ ㉡㉠, ㉡ 에서

$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{QT}$

∴ $\boxed{\quad (가) \quad}$

따라서 $\triangle RBT$는 $\triangle ABC$의 세 중선의 길이를 각 변의 길이로 하는 삼각형이다. 한편, 두 선분 BC와 RT의 교점을 M이라고 하면,$\overline{AQ}$ // $\overline{RT}$이고 점 R가 선분 AC의 중점이므로 점 M은 선분 CQ의 중점이다.

$\angle RMB=\angle AQB$이므로

$\triangle RBT=\frac{1}{2}\overline{RT}\times\overline{MB}\times\sin(\angle RMB)$

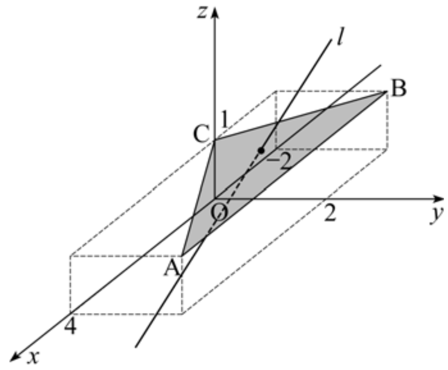
$=\boxed{(나)}\triangle ABC$

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{RT}$	$\frac{2}{3}$
②	$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CT}$	$\frac{2}{3}$
③	$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{RT}$	$\frac{3}{4}$
④	$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CT}$	$\frac{3}{4}$
⑤	$\overrightarrow{CT}=\overrightarrow{PB}$	$\frac{4}{5}$

36. 2008 교육청(4점)

좌표공간에 세 점 A$(4, 2, 1)$, B$(-2, 2, 1)$, C$(0, 0, 1)$과 직선 $l:\ \frac{x+2}{a}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$가 있다.



직선 l이 삼각형 ABC의 변 또는 내부를 지나도록 상수 a의 값을 정할 때, 정수 a의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

37. 2005 평가원(3점)

평면 α와 구 C: $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-3=0$이 점 A$(2,\ 0,\ -3)$에서 접할 때, 평면 α에 평행하고 구 C와 접하는 평면의 방정식은?

① $x+y+2z=0$ ② $x+y-2z+4=0$
③ $x+y-2z=0$ ④ $x-y+z+1=0$
⑤ $x-y-z-1=0$

38. 2009 교육청(4점)

좌표공간에서 직선 $\frac{x}{2}=-y=-\frac{z}{2}$ 와 평면 $x+y+z=2$ 가 만나는 점을 A 라 하자. 점 P가 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OP}|^2$ 을 만족시킬 때, 점 P 와 평면 $x+y+z=2$ 사이의 거리의 최댓값은?

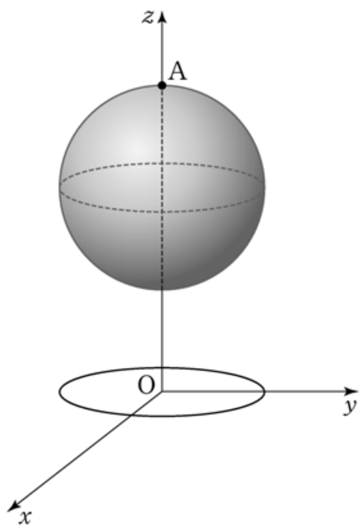
① $3+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $3+\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $4+\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $4+\frac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $5+\frac{\sqrt{3}}{3}$

39. 2008 교육청(4점)

점 O를 원점으로 하는 좌표공간에 사면체 OABC가 있다. 삼각형 OAB, OBC, OCA, ABC는 각각 네 평면
$x=0,\ z=0,\ x-y=0,\ x+y+z=4$
위에 있을 때, 사면체 OABC의 부피는 V이다. $30V$의 값을 구하시오.

40. 2007 평가원(4점)

좌표공간에서 xy평면위의 원 $x^2+y^2=1$을 C라 하고, 원 C 위의 점 P와 점 A$(0,0,3)$을 잇는 선분이 구 $x^2+y^2+(z-2)^2=1$과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P가 원 C 위를 한 바퀴 돌 때, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는 $\frac{b}{a}\pi$ 이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 점Q는 점A가 아니고, a, b는 서로소인 자연수이다.)



41. 2007 교육청(4점)

구 $x^2+y^2+z^2=2^2$ 위의 세 점 A$(-\sqrt{3},1,0)$, B$(\sqrt{3},1,0)$, C$(0,2,0)$에 대하여, 선분 AB를 포함하면서 xy평면에 수직인 평면 α가 있다. 또한, 점 A를 지나는 평면 α 위의 직선이 구와 만나는 점을 P라 하자. $\overline{AP}=\sqrt{6}$ 일 때, 평면 ACP와 xy평면이 이루는 각을 θ라면 $\cos^2\theta$의 값은?

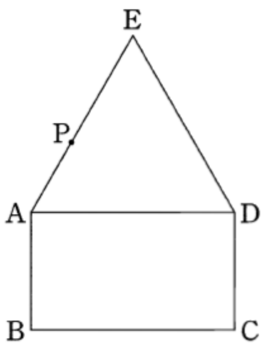
① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{7}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

42. 2008 교육청(4점)

좌표공간 위의 세 점 P(3, 0, 0), Q(0, 3, 0), R(0, 0, 3)을 포함하는 평면을 α_1, △PQR의 외접원을 C_1이라 하자. 또한, 반지름이 r이고 중심의 좌표가 F(6, −3, −3)인 구 S에 대하여, 평면 α와 구 S가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1과 C_2는 서로 외접할 때, r^2의 값을 구하시오.

43. 2010 평가원(4점)

평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 $ABCD$와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

44. 2009 평가원(4점)

좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=50$이 두 평면 α: $x+y+2z=15$, β: $x-y-4\sqrt{3}z=25$와 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2라 하자. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}^2$의 최솟값을 구하시오.

45. 2009 교육청(4점)

좌표공간에서 중심이 점 A인 구 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\frac{9}{4}$와 중심이 점 B인 구 $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{27}{4}$가 만나서 생기는 원을 S라 하자. 원 S 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m=\frac{b}{a}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

46. 2006 수능 (3점)

타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$을 만족시킬 때, 선분 PF의 길이는 k이다. $5k$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

47. 2004 수능 (3점)

좌표평면 위의 점 A가 부등식 $y \geq \frac{1}{4}x^2+3$이 나타내는 영역에서 움직일 때, 벡터 $\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$의 종점 B가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ 3

48. 2006 수능 (3점)

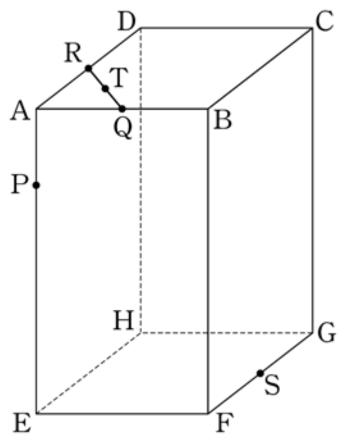
좌표평면 위에 원점 O를 시점으로 하는 서로 다른 임의의 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 있다. 두 벡터의 종점 P, Q를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 점을 각각 P′, Q′이라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|=\sqrt{10}$
ㄴ. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$
ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. 2008 수능 (3점)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{AE}}=8$인 직육면체 ABCD−EFGH에서 모서리 AE를 1 : 3으로 내분하는 점을 P, 모서리 AB, AD, FG의 중점을 각각 Q, R, S라 하자. 선분 QR의 중점을 T라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{TP}}$와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QS}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QS}}$의 값을 구하시오.



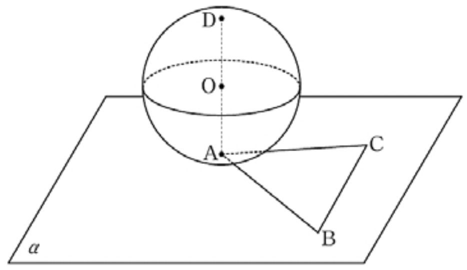
50. 2005 수능 (3점)

점 A(1, 2, 3)을 지나고 직선 $l: x-1=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$에 수직인 평면을 α라 하자. 평면 α와 직선 $m: x-2=y=\dfrac{z-6}{5}$의 교점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{15}$
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{19}$

51. 2006 수능 (4점)

그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC가 있고, 반지름의 길이가 2인 구 S는 점 A에서 평면 α에 접한다. 구 S 위의 점 D에 대하여 선분 AD가 구 S의 중심 O를 지날 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2$의 값을 구하시오.



52. 2007 수능 (4점)

좌표공간에서 중심이 C인 구 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$와 평면 $x+y+z=6$이 만나서 생기는 도형을 S라 하자. 도형 S 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$의 최솟값은?

① −3 ② −2 ③ −1
④ 1 ⑤ 2

53. 2007 수능 (4점)

좌표공간의 점 A(3, 6, 0)에서 평면 $\sqrt{3}y-z=0$에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

54. 2008 수능 (4점)

좌표공간의 점 A$(3, 3, 3)$과 중심이 원점 O인 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$의 최댓값은 $a+b\sqrt{3}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 유리수이다.)

55. 2005 수능 (4점)

좌표공간에 두 점 A$(3,\ 1,\ 1)$, B$(1,\ -3,\ -1)$이 있다. 평면 $x-y+z=0$에 있는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최솟값은?

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

56. 2007 수능 (4점)

좌표공간에 네 점 A$(2, 0, 0)$, B$(0, 1, 0)$, C$(-3, 0, 0)$, D$(0, 0, 2)$를 꼭지점으로 하는 사면체 ABCD가 있다. 모서리 BD 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값을 최소로 하는 점 P의 좌표를 (a, b, c)라고 할 때, $a+b+c=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

57. 2006 수능 (4점)

좌표공간의 점 A$(3, 6, 0)$에서 평면 $\sqrt{3}y-z=0$에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

58. 2005 수능 (4점)

중심이 C$(0,\ 1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 구와 직선 $\frac{x}{2}=y=-z$가 만나는 두 점을 A, B라 하자.
삼각형 CAB의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.

59. 2006 수능 (4점)

좌표공간에서 xy평면, yz평면, zx평면은 공간을 8개의 부분으로 나눈다. 이 8개의 부분 중에서

구 $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$

가 지나는 부분의 개수는?

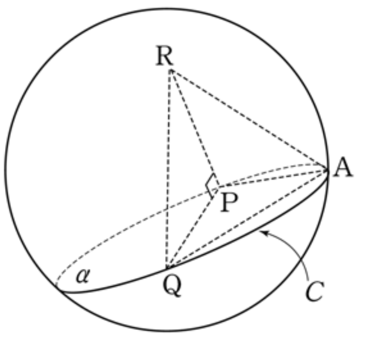
① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

60. 2006 수능 (4점)

구 $x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $z=-1$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. x축을 포함하는 평면 α와 구 $x^2+y^2+z^2=4$가 만나서 생기는 원이 C와 오직 한 점에서 만날 때, 평면 α의 한 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ 3,\ b)$라 하자. a^2+b^2의 값을 구하시오.

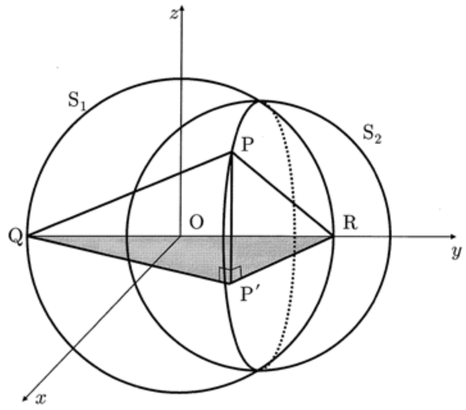
61. 2008 수능 (4점)

좌표공간에서 구 $S : x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $\alpha : y-\sqrt{3}z=2$가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 $A(0, 2, 0)$에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 $\overline{AP}=\overline{AQ}$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s라 할 때, s^2의 값을 구하시오.



62. 2006 수능 (4점)

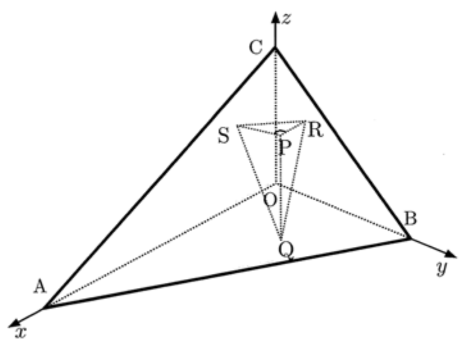
두 구 $x^2+y^2+z^2=81$, $x^2+(y-5)^2+z^2=56$을 각각 S_1, S_2라 하자. 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하고, 점 P의 xy평면 위로의 정사영을 P′이라 하자. 구 S_1과 y축이 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, 사면체 PQP′R의 부피의 최댓값 구하시오.



63. 2007 수능 (4점)

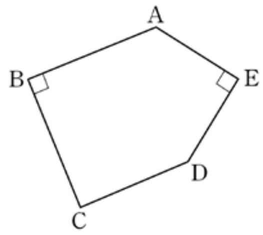
좌표공간에서 평면 $x+2y+2z=54$ 위의 세 점 $A(54, 0, 0)$, $B(0, 27, 0)$, $C(0, 0, 27)$을 꼭지점 로 하는 삼각형 ABC의 내부에 점 $P(x, y, z)$가 있다. 점 P의 xy평면 위로의 정사영을 Q, yz평면 위로의 정사영을 R, zx평면 위로의 정사영을 S라 하자.

$\overline{QR}=\overline{QS}$일 때, 사면체 QPRS의 부피의 최댓값을 구하시오.



64. 2010 수능 (4점)

평면에서 그림의 오각형 $ABCDE$가
$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{BD}$, $\angle B=\angle E=90^o$를
만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서
있는 대로 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. 선분 BE의 중점 M에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 서로 평행하다.

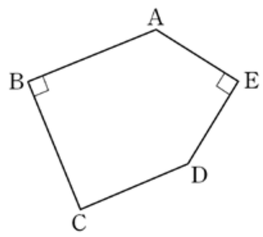
ㄴ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$

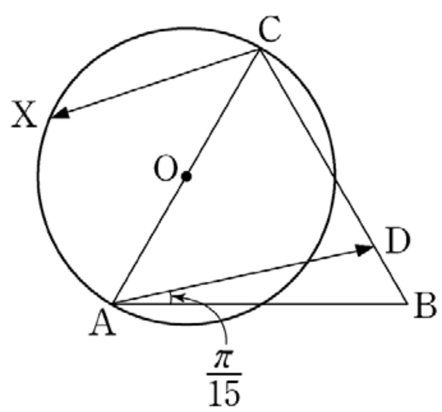
ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

65. 2011 수능 (4점)

그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC위의 점 D를 $\angle DAB=\dfrac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP=\dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)





1. 정답 ⑤

합성변환 $f \bullet g$ 의 행렬은

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

2.정답 ②

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x'+3y' \\ x'-y' \end{pmatrix}$

$x=-2x'+3y'$, $y=x'-y'$ 을

$x+2y=1$ 에 대입하면

$(-2x'+3y')+2(x'-y')=1 \Leftrightarrow y'=1$

따라서 직선 l 의 방정식은 $y=1$

직선 $y=1$이 포물선 $y=x^2+2x+a$ 에 접하므로

방정식 $1+x^2+2x+a$ 즉, $x^2+2x+a-1=0$ 이 중근을 갖는다.

판별식 $\dfrac{D}{4}=1-a+1=0 \qquad \therefore a=2$

3. 정답 ①

$\begin{pmatrix} 3 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$에서

$3+a=2, -1+b=1$

$\therefore a=-1, b=2$

$\therefore a+b=1$

4. 정답 -35

직선 $3x+y=1$위의 점 $(x.\ y)$가 점 $(x',\ y')$로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\therefore x=-3x'+2y'$, $y=2x'-y'$ ......(*)

(*)를 직선의 방정식 $3x+y=1$에 대입하면

$3(-3x'+2y')+(2x'-y')=1$ 즉, 직선 $-7x+5y=1$로 옮겨진다.

$\therefore ab=-35$

5. 정답 ⑤

일차변환 f를 나타내는 행렬 $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 일차변환 g 를

나타내는 행렬 $B=\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

따라서 $g \bullet f$ 를 나타내는 행렬은

$BA=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

따라서, $BA\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1+2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

6. 정답 ①

일차변환을 나타내는 행렬을 A 라 하고,

점P, Q의 좌표를 $P(a,b), Q(c,d)$ 라고 하면

$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\quad A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

또 일차변환 $f \circ f$를 나타내는 행렬은 A^2 이고

$A^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

즉, $A^2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

한편 세 점 O, P, Q는 일직선 위에 있지 않으므로

$\dfrac{b}{a} \neq \dfrac{d}{c}$, $\quad ad-bc \neq 0$

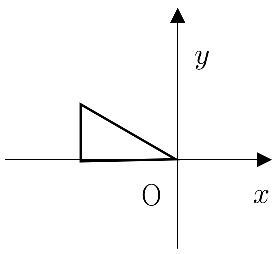
즉, 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$이 존재한다.

$\therefore A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 합성변환 $f \circ f$에 의하여 원C는 원점 O로 옮겨진다.

7. 정답 ①

[그림2]의 도형은 $(f \circ g)^{-1}=g^{-1} \circ f^{-1}$에 의하여 [그림1]의 도형으로 이동된다. [그림2]의 도형을 -90° 회전시킨 도형은 다음 그림과 같으므로 이차변현 g^{-1}는 y축에 대한 대칭변환이다. 따라서, 일차변환 g는 y축에 대한 대칭변환이므로 [그림2]의 도형은 ①과 같은 도형으로 옮겨진다.



8. 정답 ④

9.정답 ③

$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$이므로 $a=5, b=-3$

10. 정답 ⑤

직선$2x+3y=6$ 위의 임의의 점(x,y) 에 대하여

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3y\\4x+6y\end{pmatrix}$

이 때,$3y=6-2x$ 이므로 이를 대입하면

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}$

$a=6, b=12$

$\therefore a+b=18$

11. 정답 ⑤

일차변환 f 와 g 를 나타내는 행렬을 각각 A 와 B 라 하면

$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

합성변환 $g\circ f$ 를 나타내는 행렬은

$BA=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta&\cos\theta\\\cos\theta&\sin\theta\end{pmatrix}$

점$(1, 0)$이 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$으로 옮겨졌으므로

$$\begin{pmatrix}-\sin\theta&\cos\theta\\\cos\theta&\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

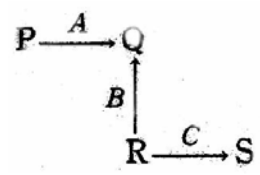
$\therefore\ \theta=30°$

즉, $BA=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$ 이므로 점$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$은

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

12. 정답 ④

각 일차변환을 그림으로 나타내면
오른쪽과 같다.



따라서 $S\xrightarrow{C^{-1}}R\xrightarrow{B}Q\xrightarrow{A^{-1}}P$

이므로 점 S를 점 P로 옮기는
일차변환은 $A^{-1}BC^{-1}$ 이다.

13. 정답 ④

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ $\quad\therefore c=ap$ ····①

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ $\quad\therefore d=bp$ ····②

$\therefore ad-bc=0$

과 ①±② 에서 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ 이 성립함을 알 수 있다.

<Ⅳ의 반례> $a=2,\ c=1,\ b=4,\ d=2$이면

①, ②은 성립하지만 $a^2+b^2\neq c^2+d^2$

14. 정답 ④

$16x^2+9x^2=144$, $(\frac{x}{3})^2+(\frac{y}{4})^2=1$

$u=\frac{x}{3},\ v=\frac{y}{4}$ 라 두면 $u^2+v^2=1$이 되므로

$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

15. 정답 ⑤

$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=A\left(A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right)=A\left(2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=2\left(A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=2^2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

이것을 반복하면 $A^{10}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=2^{10}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{11}\\2^{10}\end{pmatrix}$

16.정답 ②

$(x,y)\xrightarrow{f}(x+a,y+b)\xrightarrow{g}(x+2y+a+2b,2x+y+2a+b)$

$\left[\because\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+a\\y+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+a+2b\\2x+y+2a+b\end{pmatrix}\right]$

$\xrightarrow{f}(x+2y+2(a+b),2x+y+2(a+b))$

$f\circ g\circ f$ 가 일차변환이 되려면

$x'=x+2y+2(a+b)$,
$y'=2x+y+2(a+b)$의 상수항이 없어야 한다.
$\therefore a+b=0$

17. 정답 ①
$f(f(P))=f(Q)=R$ 이므로
즉, 일차변환 f 에 의하여 점 $(1,0)$은 $(0,1)$로,
점 $(0,1)$은 $(2,0)$로 옮겨지므로 f 를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$이다.
따라서, $f(f(f(P)))=f(f(Q))=f(R)$
$=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

18. 정답 ②
일차변환 f, g 를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면
$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 이다.
$g \cdot f$ 를 나타내는 행렬이 BA 이므로 $BA=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ 이다.

19. 정답 ④
영역 D 에 속하는 임의의 점을 P(x,y)라고 하면 $y<2x$ 이고,
$y>\frac{1}{2}x$ ……㉠
주어진 일차변환에 위한 점 P의
$\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y\\x-2y\end{pmatrix}$
$\therefore P'(2x-y,\ x-2y)$
그런데 ㉠에서 $2x-y>0$ 이고 $x-2y<0$ 이므로 점 P'은 제 4사분면 위의 점이다.

20. 정답 ⑤
점 P 는 점 Q를 원점을 중심으로 $-\frac{2}{3}\pi$ 만큼 회전이동시킨 점이므로
$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-\frac{2}{3}\pi)&-\sin(-\frac{2}{3}\pi)\\\sin(-\frac{2}{3}\pi)&\cos(-\frac{2}{3}\pi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\\sqrt{3}-1\end{pmatrix}$
$\therefore a+b=2\sqrt{3}$

21. 정답 ①
직선 l 위의 점 $P(x,y)$ 가 옮겨진 점을 $P'(x',y')$ 이라 하면
$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\1&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
$\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\1&k\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$
$=\frac{1}{2k+3}\begin{pmatrix}k&3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$
$x=\frac{1}{2k+3}(kx'+3y')$
$y=\frac{1}{2k+3}(-x'+2y')$
직선 l 의 방정식에 대입하여 정리하면
l' : $(k+2)x'-y'=2k+3$
이 직선이 l : $x-2y=1$ 과 수직이므로
$(k+2)\cdot1+(-1)\cdot(-2)=0$
$\Rightarrow k+2=-2$
$\therefore k=-4$

22. 정답 ④
행렬 A 은 직선 에 대하여 대칭이동이므로 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
B^3 은 원점을 중심으로 90° 회전하는 일차변환의 행렬이므로
$B^3=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$이다.
$AB^3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
따라서, AB^3 은 x 축에 대하여 대칭이동을 나타내는 일차변환의 행렬이다.

23.정답 ④
$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$
$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2b_n$ … ㉠, $b_{n+1}=b_n$ … ㉡
㉡에서 $b_1=b_2\ldots=b_n=1$
$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$
$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$
$a_n-3=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
즉, $a_n=3-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$\lim_{n\to\infty}a_n=3,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=1$
$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=4$

24. 정답 ②

$\angle AOA' = \angle POP' = \angle BOB' = \theta$

점 A'의 좌표는 $A'(x\cos\theta, x\sin\theta)$

점 B'의 좌표는 $B'\left(y\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right), y\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$

즉, $B'(-y\sin\theta, y\cos\theta)$

이 때, 직사각형 $OA'P'B'$에서 두 대각선 OP'과 $A'B'$의 중점은 일치하므로

$\frac{0+x'}{2} = \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{2}$

$\frac{0+y'}{2} = \frac{x\sin\theta + y\cos\theta}{2}$

즉, $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$

25. 정답 ③

$g \circ f$ 를 나타내는 행렬

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

직선 $3x-2y=1$ 위의 점 (x,y) 가 일차변환 $g \circ f$ 에 의하여 (x', y') 으로 이동된다면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y \\ -6x+4y \end{pmatrix}$

$3x-2y=1$ 이므로 $x'=1$

또, $y' = -6x+4y = -2(3x-2y) = -2$

$\therefore$ 이동된 도형은 $(1,-2)$ 이다.

26. 정답 6

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+y \\ y \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ 이므로

$\triangle OAB$의 세 꼭지점이 일차변환 f 에 의하여 옮겨진 $\triangle OA'B'$의 세 꼭지점 O, A', B'를 구하면

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \end{pmatrix}$

세 점 $(0,0), (1,1), (a+1,1)$ 으로 이루어진

삼각형의 넓이가 3 이므로 $3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a$

$\therefore a=6$

<별해>

이동된 후의 면적은 이동되기 전의 면적의 $|ad-bc|$배이다.

$\therefore 3 = a \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore a=6$

27. 정답 6

일차변환에 의하여 옮겨진 네 점의 좌표가 $(0,0), (2,0), (2,3), (0,3)$이므로 네 점을 꼭지점으로 하는 직사각형의 넓이는 6이다.

28. 정답 ①

$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$이므로

점P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이고,

마찬가지 방법으로 점Q의 좌표는$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

따라서 $\overline{PQ}=1$

29. 정답 ⑤

임의의 두점을 $\mathrm{A}(\alpha,\ a\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta,\ a\beta)$라 하자.

일차 변환에 의해 변환된 점을 A', B' 라

하면 $\mathrm{A}'(2\alpha - a\alpha,\ \alpha - a\alpha)$ $\mathrm{B}'(2\beta - a\beta,\ \beta - a\beta)$

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}}$

$\sqrt{1+a^2} = \sqrt{(2-a)^2 + (1-a)^2}$

$a^2 - 6a + 4 = 0$ $\therefore a$ 값들의 합은 6 이다.

30. 정답②

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\therefore x = \frac{x'+2y'}{5}$ …… ㉠

$y = \frac{-2x'+y'}{5}$ …… ㉡

x, y 는 $x^2+y^2=1$ 을 만족시키므로 ㉠, ㉡ 을 대입하면

$\left(\frac{x'+2y'}{5}\right)^2 + \left(\frac{-2x'+y'}{5}\right)^2 = 1$

정리하면 $(x')^2 + (y')^2 = 5$

$\therefore x^2+y^2 = \sqrt{5}^2$

따라서 도형 F위의 서로 다른 두 점 사이의 거리의 최댓값은 원의 지름인 $2\sqrt{5}$ 이다.

<다른 풀이>

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{5}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$$= \sqrt{5}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

이므로 일차변환 f는 회전변환과 $\sqrt{5}$ 배 닮음변환의 합성변환이다.

따라서 원은 원으로 옮겨지고 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 가 되므로 이 원위의 서로 다른 두점 사이의 거리의 최댓값은 원의 지름은 $2\sqrt{5}$ 이다.

31. 정답 ④

행렬 A는 원점을 중심으로 60°만큼 회전이동한 일차변환을 나타내는 행렬이고, $B^2=A$이므로 행렬 B는 원점을 중심으로 30°만큼 회전이동한 일차변환을 나타내는 행렬이다.

$$\therefore \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ\\ \sin30^\circ & \cos30^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

따라서, $a^2-b^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

32.정답 ③

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta+\cos\theta\\ \sin\theta-\cos\theta\end{pmatrix}$$

$x=\sin\theta+\cos\theta,\ y=\sin\theta-\cos\theta$

$x^2+y^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

따라서, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원 이므로 자취의 길이는 $2\sqrt{2}\pi$ 이다.

33. 정답 **3**

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 에서

$$\begin{cases}x'=ax-by & \cdots\cdots ㉠\\ y'=bx+ay & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

직선 $y=2x+1$이 직선 $y=-x-1$로 옮겨졌으므로㉠,㉡을 $y'=-x'-1$에 대입하면

$bx+ay=-(ax-by)-1$

$(a+b)x+(a-b)y+1=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0$

$\therefore a+b=2,\quad a-b=-1$

$\therefore a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{b}{a}=3$

34. 정답 ④

원 $x^2+y^2=1$ 위의 모든 점을 같은 원 위의 점으로 옮기는 일차변환은 회전변환, 대칭변환을 생각할 수 있다.

(i) 회전변환

θ만큼 회전시키는 변환을 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$이고, 각 성분이 정수이려면$\cos\theta$ 또는$\sin\theta$의 값이 -1 또는 0 또는 1이어야 한다.

$\therefore \theta=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

(ii) 대칭변환

x축 대칭을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

y축 대칭을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

원점대칭을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

직선 $y=x$에 대한 대칭을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

직선 $y=-x$에 대한 대칭을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

(i), (ii)에서 원점대칭을 나타내는 행렬과 $\theta=\pi$일 때의 회전변환을 나타내는 행렬은 서로 같으므로 구하는 일차변환의 개수는 8이다.

35. 정답 ②

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 에서

$x'=4x, y'=3y$

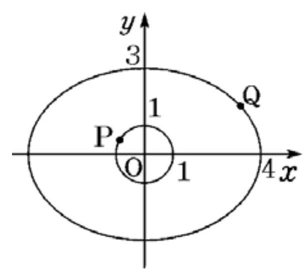
즉, $x=\frac{1}{4}x', y=\frac{1}{3}y'$ 이므로

C: $x^2+y^2=1$ 에 대입하면

C' : $\frac{x'^2}{4^2}+\frac{y'^2}{3^2}=1$

즉, $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

따라서, 다음 그림에서



$P(-1,0), Q(4,0)$

또는$P(1,0), Q(-4,0)$ 일 때,

선분PQ의 길이의 최댓값은 5 이다.

36. 정답 ①

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos45^\circ & -\sin45^\circ\\ \sin45^\circ & \cos45^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos45^\circ & \sin45^\circ\\ -\sin45^\circ & \cos45^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'),\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')\cdots$ ㉠

이 때 ㉠을 $x^2-y^2=2$에 대입하면

$\frac{2}{4}(x'+y')^2-\frac{2}{4}(-x'+y')^2=2$

$4x'y'=4, \qquad \therefore x'y'=1$

37. 정답 ④

$A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\-1&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$ 또 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동의 행렬 B는

$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad A+2B=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

38. 정답 ①

일차변환 f 에 의하여 직선 $2x+y=2$ 위의 점 (x,y) 가

(x',y') 으로 옮겨진다면 $\begin{pmatrix}2&1\\4&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$x'=2x+y=2, \quad y'=4x+ay'=4x+a(2-2x)$

$=(4-2a)x+2a$

y' 이 x 값에 관계없이 일정한 값을 가질려면

$a=2, \quad y'=4 \qquad \therefore P(2,4)$

39.정답 -2

$C_1: (-x-3)^2+(-y+2)^2=13 \qquad C_0: x^2+y^2-6x+4y=0$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=13 \qquad \Rightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=13$

$C_2: (x-a-3)^2+(y-b+2)^2=13$

이 때, 두 원 C_1, C_2 가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 원의 중심인 $(-3,2)$와 $(a+3,b-2)$도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서,$a+b=-2$

40. 정답 ⑤

Ⅰ.x 축 위의 점을$(x,0)$으로 놓으면 $\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\0\end{pmatrix}$

따라서, 일차변환 f 에 의하여 x 축 위의 임의의 점$(x,0)$은 x 축 위의 점 $(2x,0)$으로 옮겨진다. <참>

Ⅱ.y 축 위의 점을 $(0,y)$로 놓으면 $\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2y\end{pmatrix}$

따라서, 일차변환f 에 의하여 y 축 위의 임의의 점 $(0,y)$는 y 축 위의 점 $(0,-2y)$로 옮겨진다. <참>

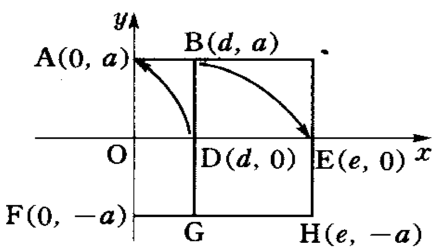
Ⅲ.일차변환 f 에 의하여 점 (x,y)가 점 (x',y')으로 옮겨진다면 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\-2y\end{pmatrix}$

$\therefore x'=2x, y'=-2y$

$\therefore x=\frac{x'}{2}, y=-\frac{y'}{2}$ 그런데, 점 (x,y)는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $-\frac{y'}{2}=\frac{x'}{2} \quad \therefore y'=-x'$ 따라서, 일차변환 f 에의한 직선 $y=x$ 의 상은 직선 $y=-x$ 이다. <참>

41. 정답 5

좌표를 그림과 같이 정하면



준 일차변환의 행렬을 P라 하면

$P\begin{pmatrix}d&d\\a&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&0\\0&a\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}e&0\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&d\\a&0\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{ad}\begin{pmatrix}e&0\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-d\\-a&d\end{pmatrix}^{-1}$

$=-\frac{1}{ad}\begin{pmatrix}0&-de\\-a^2&ad\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix}0&de\\a^2&-ad\end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix}0&de\\a^2&-ad\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix}abe\\-a^2d\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}e\\-a\end{pmatrix}$

따라서, H이다

42. 정답 1

주어진 일차변환은 원점을 중심으로 $45°$ 회전이동한 다음, 원점을 중심으로 $\frac{1}{2}$배로 축소하는 일차변환이다.

$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos45°&-\sin45°\\\sin45°&\cos45°\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos45°&-\sin45°\\\sin45°&\cos45°\end{pmatrix}$

$A^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4\begin{pmatrix}\cos180°&-\sin180°\\\sin180°&\cos180°\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$\therefore A^4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\therefore a=-\frac{1}{16},\ b=-\frac{1}{16}$

$\therefore \frac{a+bi}{1+i}=-\frac{1}{16}\times\frac{1+i}{1+i}=-\frac{1}{16}$

43. 정답 8 (개)

회전변환 f 는 $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix}$

이므로 원점을 중심으로 90만큼 회전하는 변환이다.
이것을 4번 이동하면 원래의 점으로 돌아오므로 P 를 포함하여 모두 4개의 점으로 옮겨질 수 있다.

대칭변환 g 는 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로 y 축에 대한 대칭이동이다.

즉, 회전변환 f 에 대하여 옮겨진 각각의 점이 2개씩 나타난다.

$\therefore 4\times 2=8$(개)

44. 정답 ④

(Ⅰ)은 주어진 도형을 원점을 중심으로 180° 만큼 회전이동시키면 얻어진다.

(Ⅲ)은 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에서

$ad-bc=0\ (a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0)$

인 행렬에 의해 옮겨질 수 있다.

그러나, 모든 일차변환에 의해 직선은 직선이나 한 점으로는 이동될 수 있지만 곡선으로 이동될 수는 없으므로(Ⅱ) 와 같은 도형이 될수는 없다.

따라서, 될수 있는 것은 Ⅰ,Ⅲ 이다.

45. ③

일차변환 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}$이다.

즉, 원점을 중심으로 한 60° 회전변환과 같다.
여기서, A, B가 옮겨진 점을 A', B'이라 하면,
S(△OAB) = S(△OA'B')
이고, △OAB는 한변의 길이가 2인 정삼각형이므로,

구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2^2\times\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

46. 정답 ⑤

일차변환 f 와 g 를 나타내는 행렬을 각각 A 와 B 라 하면

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

합성변환 $g\circ f$ 를 나타내는 행렬은

$BA=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$

점$(1, 0)$이 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$으로 옮겨졌으므로

$\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore\ \theta=30^\circ$

즉, $BA=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ 이므로 점$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$은

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$

1\. 정답 ①

포물선 $y^2=4(x-a)$의 초점은 $(a+1,\,0)$이고, 포물선 $y^2=-8x$의 초점은 $(-2,\,0)$이다. $\therefore a=-3$

2\. 정답 18

$(x-1)^2=4y$, $(y+2)^2=-8x$의 초점을 각각 F_1, F_2이므로 $F_1(1,\ 1)$, $F_2(-2,\ -2)$

$\overline{F_1F_2}^2=3^2+3^2=18$

3.정답 44

[출제의도] 포물선의 반사성질과 초점과 준선과의 관계를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

포물선 $y^2=16(x+8)$ 의 초점은 $F(-4,\ 0)$ 이고, 준선은 $x=-12$ 이다. 포물선에 반사된 빛은 초점으로 모이므로 포물선 $y^2=-16(x-28)$ 의 초점은 $C(24,\ 0)$, 준선은 $x=32$ 가 된다.

초점과 준선의 성질을 이용하면 선분 FA 는 A 에서 준선 $x=-12$ 까지의 거리가 되며 선분 BC 는 B 에서 준선 $x=32$ 까지의 거리가 되므로 $\overline{FA}+\overline{AB}+\overline{BC}$ 는 준선과 준선까지의 거리가 되므로 $32-(-12)=44$ 이다.

$\therefore$ 44

4\. 정답 ②

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면, 접선의 방정식은

$y_1y=\dfrac{1}{2}(x+x_1)$

이 식에 $y=0$을 대입하면 $x=-x_1$이므로 교점 T의 좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다.

$y^2=4\cdot\dfrac{1}{4}\cdot x$ 에서 초점 F의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$이므로

$\overline{FT}=x_1+\dfrac{1}{4}$

$\overline{FP}=\sqrt{\left(x_1-\dfrac{1}{4}\right)^2+{y_1}^2}$

$=\sqrt{{x_1}^2-\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{16}+x_1}$ $(\because {y_1}^2=x_1)$

$=\sqrt{{x_1}^2+\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{16}}=\sqrt{\left(x_1+\dfrac{1}{4}\right)^2}$

$=x_1+\dfrac{1}{4}$

5\. 정답 103

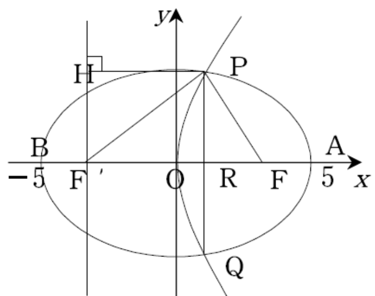
$\overline{PF'}=m$, $\overline{PF}=n$이라 하면

타원의 정의에 의해

$m+n=10$ ⋯㉠

선분 PQ와 x축의 교점을 R라 하면

$\overline{PR}=\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\sqrt{10}$



직각삼각형 PF′R에서

$\overline{F'R}=\sqrt{m^2-10}$

점 F′을 지나고 x축에 수직인 직선을 l이라 하면 l은 포물선의 준선이고,

점 P에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해

$$\overline{PH}=\overline{PF}$$

이다.

$\overline{PF}=\overline{PH}=\overline{F'R}=\sqrt{m^2-10}$ 이므로

$n=\sqrt{m^2-10}$ 에서

$n^2=m^2-10$ ⋯㉡

㉠에서 $n=10-m$이므로 ㉡에 대입하면

$(10-m)^2=m^2-10$

$m^2-20m+100=m^2-10$

$20m=110$, $m=\dfrac{11}{2}$

$n=10-m=\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ mn=\dfrac{11}{2}\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{99}{4}$

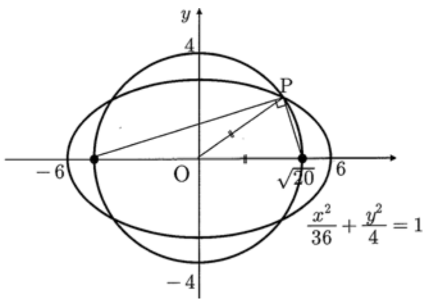
$\therefore\ p+q=4+99=103$

6\. 정답 ⑤

[출제의도] 타원을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{AF}=a$, $\overline{OF}=\dfrac{1}{2}a$, $\overline{AO}=b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$이므로 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7\. 정답 32



타원의 정의에 의해 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2\times6=12$……①

초점공식에 의해 $\overline{OF}=\overline{OF'}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}$

따라서, 세 점 P, F, F′은 중심 O, 반지름 $\sqrt{20}$, FF′이 지름인 원위의 점이다.

$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=\overline{FF'}^2=(2\sqrt{20})^2=80$……②

①, ②에서

$$\overline{PF}\times\overline{PF'}=\frac{1}{2}\{(\overline{PF}+\overline{PF'})^2-(\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}(12^2-80)=32$$

8. 정답 32

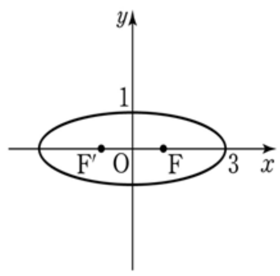
$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$의 두 초점을 F′(−k, 0), F(k, 0)$(k>0)$라 하면

$k^2=3^2-1^2$

$\therefore k=2\sqrt{2}$

$d=4\sqrt{2}$

$\therefore d^2=32$



9. 정답 **32**

점 F는 타원의 초점이므로 $c^2=a^2-16$

점 A$(c,\ k)$라 하면

$$k^2=16\frac{a^2-c^2}{a^2}\quad\therefore\ k=4\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\frac{16}{a}$$

따라서 □ADBC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2k=2ak$$

$$=2a\cdot\frac{16}{a}=32$$

10.정답 ②

[출제의도] 타원의 임의의 접선의 방정식과 타원의 두 초점까지의 거리의 곱은 항상 일정함을 확인하는 문제이다.

(ⅰ) 점 P가 x축 위에 있을 때 : $\alpha\beta=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$

(ⅱ) 점 P가 x축 위에 있지 않을 때 :

타원 위의 점 P에서 접선의 기울기를 m이라고 하면 타원의 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{2m^2+1}$ 이다. 두 초점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 접선까지의 거리를 각각 구하면

$$\alpha=\frac{|-m\pm\sqrt{2m^2+1}\,|}{\sqrt{m^2+1}},\ \beta=\frac{|\,m\pm\sqrt{2m^2+1}\,|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이때 $\alpha\beta=\frac{|-m\pm\sqrt{2m^2+1}\,|}{\sqrt{m^2+1}}\cdot\frac{|\,m\pm\sqrt{2m^2+1}\,|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ 이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\beta=\frac{1}{\alpha}$ 의 관계를 나타내는 그래프의 개형은 ② 번이다

11.정답 ⑤

[출제의도] 이차곡선위의 점에서 그을 수 있는 접선의 기울기에 대해 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

포물선 $x^2=4py(p\neq0)$ 위의 점에서 그은 접선의 기울기들의 모임은 실수 전체의 집합이 된다. 즉,

$M_1=R\cdots$ ①

마찬가지로, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(x\neq\pm a)$ 위의 점에서 그은 접선의 기울기들의 모임도 실수 전체의 집합이 된다. 즉,

$M_2=R\cdots$ ②

하지만, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(|x|>a)$ 위의 접선 중 기울기가 m인 것은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 이므로 $a^2m^2-b^2>0$ 즉, $m>\left|\frac{b}{a}\right|$이어야 한다. 결국,

$$M_3=\left\{m\,\middle|\,m>\left|\frac{b}{a}\right|\right\}\cdots\text{③}$$

이 된다.

<보기>를 살펴보면,

ㄱ. ③에 의해 $\left|\frac{2b}{a}\right|\in M_3$ 이므로 참이다.

ㄴ. ①, ②에 의해 $M_1=M_2$ 이므로 참이다.

ㄷ. ②, ③에 의해 $M_2\supset M_3$ 이므로 참이다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ 이다.

12.정답 ③

ㄱ. 점근선의 방정식은 $y=\pm x$ ∴ 참

ㄴ. $x^2-y^2=1$을 미분하면

$2x-2yy'=0$에서

$$y'=\frac{x}{y}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\neq\pm1\quad\therefore\ \text{거짓}$$

ㄷ. $x^2-y^2=1$ …… ㉠

$y^2=4px$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$x^2-4px-1=0$

$x=2p\pm\sqrt{4p^2+1}$

$p>0$일 때, $x=2p+\sqrt{4p^2+1}$이므로 ㉡에서 y의 값은 두 개 존재한다.

$p<0$일 때, $x=2p-\sqrt{4p^2+1}$이므로 ㉡에서 y의 값은 두 개 존재한다. $\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

13.정답 ④

타원의 방정식에서 초점은 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\, b>0)$이라 하면 두 꼭지점 사이의 거리는 $2a$이고, 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{35}\,x$이므로

$\dfrac{b}{a}=\sqrt{35}$

즉, $b=\sqrt{35}\,a$ ㉠

또한, 타원과 쌍곡선이 초점을 공유하므로

$a^2+b^2=5^2-4^2$

$\therefore\ a^2+b^2=9$

㉠을 대입하면

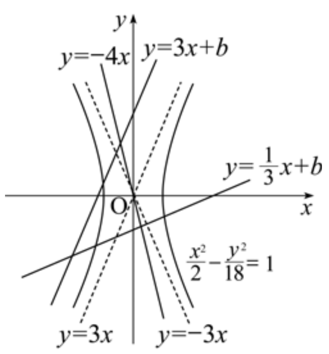
$a^2+35a^2=9$

$\therefore\ a=\sqrt{\dfrac{9}{36}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

따라서, 쌍곡선의 두 꼭지점 사이의 거리는

$2a=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

14.정답 ⑤



쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{18}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm 3x$이다.

ㄱ. $a=-4,\ b=0$이면 교점 0개

ㄴ. $a=3,\ b>0$이면

점근선과 평행이므로 교점 1개

ㄷ. $a=\dfrac{1}{3},\ b<0$이면 교점이 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15.정답 ③

ㄱ. 쌍곡선 $x^2-y^2=1$에서 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이다. [참]

ㄴ. 쌍곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x-y_1y=1 \qquad \therefore\ y=\dfrac{x_1}{y_1}x-\dfrac{1}{y_1}$

이 접선이 점근선과 평행하려면

$\dfrac{x_1}{y_1}=1$ 또는 $\dfrac{x_1}{y_1}=-1$

즉, $x_1=\pm y_1$이어야 한다.

이 때, 점 $(x_1,\ y_1)$은 점근선 $y=\pm x$ 위의 점이어야 하므로 모순이다. 따라서 쌍곡선 위의 점에서 그은 접선 중 점근선과 평행한 접선은 존재하지 않는다. [거짓]

ㄷ. $y^2=4px$를 $x^2-y^2=1$에 대입하여 정리하면

$x^2-4px-1=0$

이 때, $\dfrac{D}{4}=(2p)^2-(-1)=4p^2+1>0$이므로

포물선과 쌍곡선의 교점은 항상 2개다. [참]

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16.정답 ④

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{y^2}{2}=1$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은 $y=3x\pm\sqrt{a3^2-2}$

이 때, $\sqrt{9a-2}=5$ 이어야 하므로 $29a-2=25$

$\therefore\ a=3$

이 때 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{5}\,,0)$이므로 구하는 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$ 이다.

17. 정답 ④

접선 $y=mx+n$이 점 $(-1,0)$을 지나므로

$0=-m+n$에서 $m=n$

직선 $y=mx+m$과 쌍곡선 $x^2-y^2=2$가 한 점에서 만나므로

방정식 $x^2-(mx+m)^2=2$

즉, $(1-m^2)x^2-2m^2x-m^2-2=0$

의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=m^4+(1-m^2)(m^2+2)=0$

$m^4+m^2+2-m^4-2m^2=0$

$m^2=2$

$\therefore\ m^2+n^2=m^2+m^2=2+2=4$

18.정답 18

$\mathrm{F}'(-3,0),\ \mathrm{F}(3,0)$이고 주축의 길이는 4이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}=a,\ \overline{\mathrm{PF}}=b$라 하면 $a-b=4$

$\angle \mathrm{F'PA}=\angle \mathrm{FPA}$ 이므로 $a:b=2:1$

$\therefore\ a=8,\ b=4$

따라서 삼각형 PFF′의 둘레의 길이는 $8+4+6=18$이다.

19.정답 ⑤

초점 $(\pm 5,\ 0)$이고 점근선은 $y=\pm\dfrac{3}{4}$이므로

초점을 지나고 점근선에 평행한 직선은

$y=\dfrac{3}{4}(x\pm 5),\ y=-\dfrac{3}{4}(x\pm 5)$이므로

이 4개의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$4(\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot \dfrac{15}{4})=\dfrac{75}{2}$

20.정답 ③

쌍곡선의 정의에 의해 $\mathrm{PF'}-\mathrm{PF}=2\times 3$

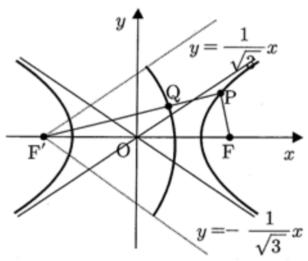
조건에서 $\mathrm{PF}=\mathrm{PQ}$이므로

$\mathrm{PF'}-\mathrm{PQ}=6$즉 $\mathrm{F'Q}=6$

따라서, 점 Q의 자취는 반지름 6,

중심각은 점근선의 방정식이

$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$이므로 점근선이



이루는 각은 $2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 점 Q의 자취는 반지름 6인

부채꼴의 호 위를 움직이므로 자취의 길이는 호의 길이

$6\times\dfrac{\pi}{3}=2\pi$

21. 정답 90

타원 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$의 두 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(-8,0),\mathrm{F'}(8,0)$, 장축의 길이는 $2\times 10=20$이다. 이때,

$\overline{\mathrm{P_1F'}}=\overline{\mathrm{P_9F}},\quad \overline{\mathrm{P_2F'}}=\overline{\mathrm{P_8F}},$

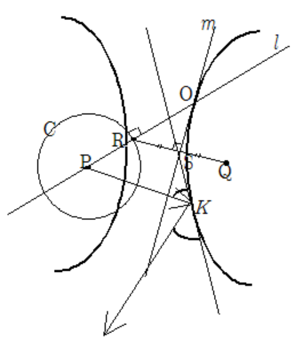
$\overline{\mathrm{P_3F'}}=\overline{\mathrm{P_7F}},\quad \overline{\mathrm{P_4F'}}=\overline{\mathrm{P_6F}}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{9}\overline{\mathrm{FP_k}}=20\times 4+\overline{\mathrm{P_5F}}=80+10=90$

22.정답 ②

점 O의 자취를 그려보면 다음과 같은 쌍곡선이 된다. 점 Q는 쌍곡선의 초점이며, $\overline{\mathrm{OR}}$, $\overline{\mathrm{OQ}}$의 길이는 같다.

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OR}}$은 항상 일정하다. 점 P에서 반대쪽 쌍곡면 점 K로 빛을 쏘면 접선을 기준으로 입사각과 반사각이 같게 밖으로 빛이 반사해 나간다. 따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.



23.정답 14

원의 반지름의 길이를 r라 하면 타원의 장축과 단축의 길이는 각각 $2(10-r)$, $2(6-r)$이므로 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{(10-r)^2}+\dfrac{y^2}{(6-r)^2}=1$ 이다.

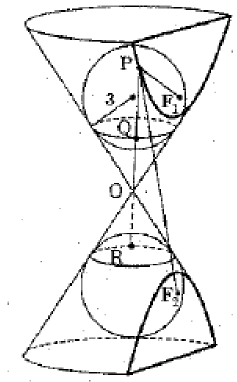
타원의 두 초점사이의 거리가 $4\sqrt{10}$ 이므로

$(10-r)^2-(6-r)^2=(2\sqrt{10})^2\quad \therefore\ r=3$

따라서 타원의 장축의 길이는 $2(10-3)=14$이다.

24. 정답 8

[출제의도] 구에서 접선의 길이를 이용하여 쌍곡선의 정의를 유도할 수 있는지를 묻는 문제이다.



$\mathrm{F_1}$과 Q는 구 밖의 한 점 P에서 그은 접점이므로 $\overline{\mathrm{PF_1}}=\overline{\mathrm{PQ}}$ 이다. 마찬가지로

$\overline{\mathrm{PF_2}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$|\overline{\mathrm{PF_1}}-\overline{\mathrm{PF_2}}|=|\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PR}}|=\overline{\mathrm{QR}}$

이다. 따라서

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{QR}}:3=8:6$

이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=8$ 이다.

25.정답 ④

[출제의도] 이차곡선의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=10$이므로 $a=5$이다.

$y^2=4\times 14(x+c)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=14$이다.

$\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{FF'}}=1:6$ 이므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=2,\ \overline{\mathrm{FF'}}=12$ 이다.

$\dfrac{c^2}{a^2-b^2}=\dfrac{64}{25-11}=\dfrac{32}{7}$

26. [정답] ③

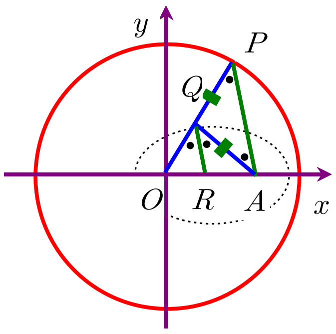
[출제의도] 쌍곡선의 정의와 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다. .

주어진 원과 x축과의 교점을 $\mathrm{A}(-5,0),\mathrm{B}(5,0)$이라 하자. 두 점 $\mathrm{A}(-5,0),\mathrm{B}(5,0)$는 쌍곡선의 초점이다. $\overline{\mathrm{AQ}}=a$, $\overline{\mathrm{BQ}}=b$라 하면 쌍곡선의 정의에 의해 $a-b=8$이고,

직각삼각형 $\triangle\mathrm{ABQ}$에서 $a^2+b^2=10^2$이다.

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$에서 $\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{BQ}}=ab=18$이다.

27. 정답 ⑤



$\overline{QR}//\overline{PA}$이므로, $\angle RQA = \angle QAP$, $\angle OQR = \angle QPA$가 성립한다.

∴ $\triangle PQA$는 이등변삼각형

또한, 주어진 원위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}(=6)$는 항상 일정하다.

따라서 점 Q의 자취는 점 O, A를 초점으로 하는 타원(거리의 합$=6$)이 된다. 타원의 방정식을 아래와 같이 두면,

$\dfrac{(x-2)^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $b>0$

중심으로부터 초점까지의 거리는 2이므로,

$3^2-b^2=2^2$, $\therefore b=\sqrt{5}$

따라서 점 Q의 자취의 방정식은 다음과 같다.

$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

28. 정답 ②

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선의 방정식은 $by=2(x+a)$

이므로 점 Q의 좌표는 $(-a, 0)$이다.

또한, $b^2=4a$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{4a^2+b^2}=\sqrt{4a^2+4a}=4\sqrt{5}$

$4a^2+4a=80$, $a^2+a-20=0$

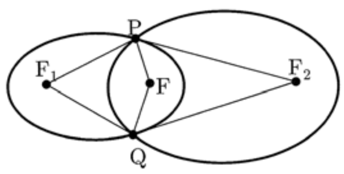
$(a+5)(a-4)=0$

∴ $a=4$ ($\because a>0$)

따라서 $b^2=16$ 이므로 $a^2+b^2=32$

29. 정답 ①

타원위이 점 P, Q에서 두 초점까지의 거리의 합은 타원의 장축의 길이와 같으므로



$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF_1}}=\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF_1}}=16$,

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF_2}}=\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF_2}}=24$

$\overline{\mathrm{PF}}=a$, $\overline{\mathrm{QF}}=b$라 하면

$\overline{\mathrm{PF_1}}=16-a$, $\overline{\mathrm{PF_2}}=24-a$이므로

$|\overline{\mathrm{PF_1}}-\overline{\mathrm{PF_2}}|=|16-a-24+a|=8$

또한, $\overline{\mathrm{QF_1}}=16-b$,

$\overline{\mathrm{QF_2}}=24-b$이므로 $|\overline{\mathrm{QF_1}}-\overline{\mathrm{QF_2}}|=|16-b-24+b|=8$

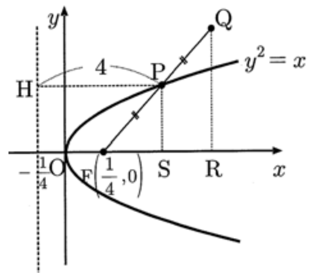
$\therefore |\overline{\mathrm{PF_1}}-\overline{\mathrm{PF_2}}|+|\overline{\mathrm{QF_1}}-\overline{\mathrm{QF_2}}|=16$

30. 정답 ①

포물선 $y^2=x$의 초점은 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ 이고, 준선의 방정식은

$x=-\dfrac{1}{4}$이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해



$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{OS}}=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$이다.

$\overline{\mathrm{FS}}=\dfrac{7}{2}$이고 $\overline{\mathrm{FS}}=\overline{\mathrm{SR}}$이므로

점 Q의 x좌표 R은

$\overline{\mathrm{OS}}+\overline{\mathrm{SR}}=\dfrac{15}{4}+\dfrac{7}{2}=\dfrac{29}{4}$이다.

31. 정답 ①

$y=\log_2(x+a)+b$의 점근선은 $x=-a$,

포물선 $y^2=x$의 준선은 $x=-\dfrac{1}{4}$이므로

$\therefore a=\dfrac{1}{4}$

$y=\log_2(x+a)+b$가

$y^2=x$의 초점 $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$을 지나므로 대입하면

$0=\log_2\left(\dfrac{1}{4}+a\right)+b$

$=\log_2\dfrac{1}{2}+b=-1+b$

$\therefore b=1$

따라서 $a+b=\dfrac{5}{4}$

32.정답 ②

정육각형의 한 내각의 크기는 120°이므로 색칠한 이등변삼각형에서 길이가 같은 두 변의 길이를 a라 하면 6개의 삼각형의 넓이의 합은

$6\times\dfrac{1}{2}\times a^2\sin120^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2=6\sqrt{3}$

∴ $a=2$ ($\because a>0$)

따라서 주어진 타원의 장축의 길이는 10이고 두 초점 사이의 거리는

$10-2\cdot2=6$이다.

따라서 이 타원과 합동이고 중심이 원점이고 장축이 x축 위에

있는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

이 때, 초점의 좌표는 $(\pm3,\ 0)$이어야 하므로 $5^2-b^2=3^2$

$\therefore\ b^2=16$

따라서 구하는 타원의 단축의 길이는

$2\times|b|=2\times4=8$

33. 정답 17

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표가 $(\pm b,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=b^2$

$\therefore\ a^2=2b^2\ \cdots$ ㉠

또, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의

y절편이 ±1이므로

$\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}=\pm1\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=\frac{4}{3},\ b^2=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a^2b^2=\frac{8}{9}$

$\therefore\ p+q=17$

34. 정답 13

$$\begin{array}{ll} \overline{QF}-\overline{QF'}=8 & (\because\ \overline{QF}>\overline{QF'}) \\ +\ \overline{PF'}-\overline{PF}=8 & (\because\ \overline{PF'}>\overline{PF}) \\ \hline (\overline{PF'}-\overline{QF'})+(\overline{QF}-\overline{PF})=16 & \end{array}$$

$\therefore\ \overline{QF}-\overline{PF}=13$

35.정답 ①

점 $(a,\ b)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$위의 점이므로

$\frac{a^2}{5}-\frac{b^2}{4}=1\ \cdots$ ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표는

$F(3,\ 0), F'(-3,\ 0)$이다.

이 때, 사각형 F′QFP의 넓이는 합동인 두 삼각형

F′QF, FPF′의

넓이와 같으므로

□F′QFP $=2\times\triangle$FPF′

$=2\times\frac{1}{2}\times\overline{FF'}\times|b|$

$=6|b|=24$

$\therefore\ |b|=4\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=25$이므로 $|a|=5$

$\therefore\ |a|+|b|=5+4=9$

36. 정답 39

P 의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{PF}+\overline{PF'}=12$

$\overline{PF}=x$라 하면 $\overline{PF'}=12-x$이다.

$\triangle$PFF′에서 제이코사인법칙을 이용하면

$x^2+8^2-2\cdot x\cdot 8\cdot\cos\frac{\pi}{3}=(12-x)^2$

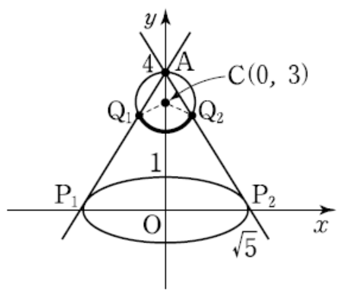
$\therefore\ x=5$

$\triangle$PAF에서 제이코사인법칙을 이용하면

$\overline{PA}^2=5^2+2^2-2\cdot5\cdot2\cos\frac{2}{3}\pi\ =39$

37.[정답] ④

[해설]



위의 그림처럼 점 A에서 타원에 그은 두 접선의 접점을 각각 $P_1,\ P_2$라고 하면, 점 P가 타원 위에서 움직일 때, 점 Q의 자취는 원 위의 점 Q_1에서 Q_2까지이다.

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$에서 $4=\pm\sqrt{5m^2+1}$

$\therefore m^2=3,\ m=\pm\sqrt{3}$

$\therefore\angle OAP_1=\angle OAP_2=\frac{\pi}{6}$

원의 중심을 C라고 하면

$\angle Q_1CQ_2=2\cdot\angle Q_1AQ_2=\frac{2\pi}{3}$

따라서, 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 부채꼴 CQ_1Q_2에서

$1\cdot\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi$

38.[정답] ③

[해설]

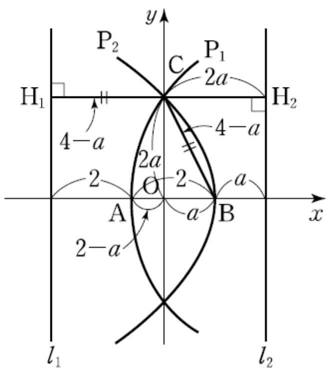
두 포물선 p_1, p_2의 준선을 각각 l_1, l_2라 하자.

$\overline{OB}=a$라 하면 포물선의 정의에 의해 그림과 같이 각각의 길이가 결정된다.

직각삼각형 OBC에서 피타고라스 정리에 의해

$\sqrt{a^2+(2a)^2}=4-a$

$a^2+2a-4=0$



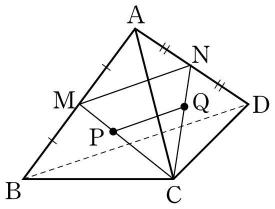
$\therefore a=-1+\sqrt{5}\ (\because a>0)$

따라서 $\triangle ABC$의 넓이는

$\therefore \frac{1}{2}\times 2\times 2a=2a=2(\sqrt{5}-1)$

1. 정답 ③

ㄱ, ㄴ. 직선 CD와 직선 BQ, 직선 AD와 직선 BC는 서로 만나지도 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.



ㄷ.직선 CP와 CQ가 선분 AB, AD와 만나는 점을 각각 M, N이라 하면 M, N은 각각 선분 AB, AD의 중점이므로 중점연결정리에 의해 $\overline{\mathrm{MN}} /\!/ \overline{\mathrm{BD}}$이다.

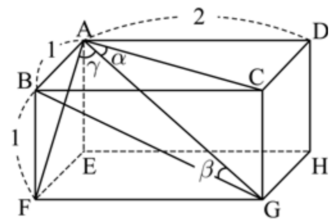
또한, $\overline{\mathrm{CP}} : \overline{\mathrm{CM}} = \overline{\mathrm{CQ}} : \overline{\mathrm{CN}} = 2:3$이므로

$\triangle$CPQ와$\triangle$CMN은 닮음이 되어 $\overline{\mathrm{PQ}} /\!/ \overline{\mathrm{MN}}$이다.

따라서, $\overline{\mathrm{PQ}} /\!/ \overline{\mathrm{MN}}$이고, $\overline{\mathrm{MN}} /\!/ \overline{\mathrm{BD}}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}} /\!/ \overline{\mathrm{BD}}$

2. 정답 ③



$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BF}} = 1$

$\overline{\mathrm{AD}} = 2$이므로

$\overline{\mathrm{AF}} = \sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BG}} = \sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AG}} = \sqrt{6}$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$

3. 정답 36

정사면체에서 밑면과 옆면이 이루는 각 θ에 대한

$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$이다. $S = \pi r^2 = \dfrac{\pi}{12}$

$S' = S\cos\theta = \pi r^2 \cos\theta = \dfrac{\pi}{36}$

$\therefore \dfrac{\pi}{S'} = 36$

4. 정답 ④

$\triangle$AOB는 직각이등변삼각형이므로

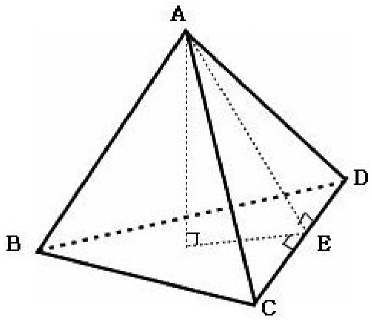
$\overline{\mathrm{AO}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a}$

$\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{AO}} \perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\triangle$APB는 $\boxed{\angle \mathrm{A}}$가 90°인 직각삼각형이다.

$\therefore \dfrac{\triangle \mathrm{AOB}}{\triangle \mathrm{APB}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AO}}}{\overline{\mathrm{AP}}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

5. 정답 ②



점 A에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 E라 하면

삼수선의 정리에 의하여 $AE \perp HE$

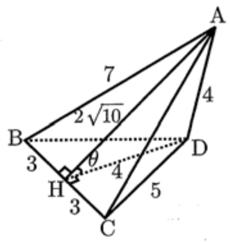
따라서 $\triangle AEH$는 직각삼각형이고

$\angle AEH = 30^\circ$이므로 $AE = 8$

이때 $AH = 4$

6. 정답 ④

꼭지점 A, D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{7^2 - 3^2} = 2\sqrt{10}$,

$\overline{\mathrm{DH}} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\triangle$AHD에서

$\cos\theta = \dfrac{4^2 + (2\sqrt{10})^2 - 4^2}{2 \times 4 \times 2\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$

7. 정답 826

(i) n이 홀수일 때, $f(n) = (n-2)+(n-1) = 2n-3$

$\therefore f(2k-1) = 4k-5$

(ii) n이 짝수일 때, $f(n) = (n-2)+(n-2) = 2n-4$

$\therefore f(2k) = 4k-4$

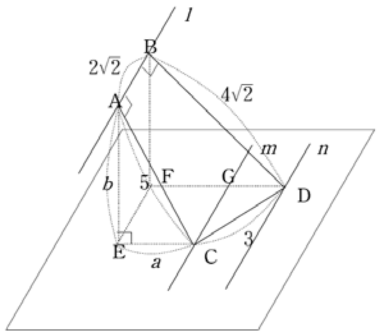
$\therefore \displaystyle\sum_{n=3}^{30} f(n) = \sum_{k=2}^{15}\{f(2k-1)+f(2k)\} = \sum_{k=2}^{15}(8k-9) = 826$

8. 정답 30

두 직선 m, n을 포함하는 평면을 α라 하자.

$l /\!/ \boxed{m}$, $l /\!/ \boxed{n}$이므로 $l /\!/ \boxed{\alpha}$이다.

직선 l 위의 두 점 A, B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, 선분 FD와 직선 m의 교점을 G라 하자.



$\overline{AB} \,/\!/\, \overline{EF}$, $\overline{EF} \,/\!/\, \overline{CG}$ 이고,

$\overline{EF} = \overline{CG} = 2\sqrt{2}$

이므로 직각삼각형 DGC 에서

$\overline{GD} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$

직각삼각형 ABD 에서

$\overline{AD} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{10}$

삼각형 ACD 에서

$\cos(\angle ACD) = \dfrac{5^2 + 3^2 - (2\sqrt{10})^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\dfrac{1}{5}$

이므로

$\sin(\angle ACD) = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

따라서 삼각형 ACD 의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 3\sqrt{6}$ 이다.

$\overline{EC} = a$, $\overline{AE} = \overline{BF} = b$라 하면

$\overline{FD} = a+1$ 이고,

삼각형 AEC 에서 $a^2 + b^2 = 25$ …㉠

삼각형 BFD 에서 $(a+1)^2 + b^2 = 32$ …㉡

㉡−㉠에서 $2a + 1 = 7$, $a = 3$

삼각형 ACD 의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 ECD 이고,

삼각형 ECD 의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{EC} \times \overline{CG} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

따라서, $3\sqrt{6} \times \cos\theta = 3\sqrt{2}$ 에서

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1$

$= 3 - 1 = 2$

$\therefore\ 15\tan^2\theta = 30$

9. 정답 60

점 D 에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AD} \perp \alpha$,

$\overline{DH} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$

점 H는 선분 BC의 중점이므로

$\overline{AH} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, $\overline{DH} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\therefore\ \triangle DBC = \dfrac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$

10.정답 ②

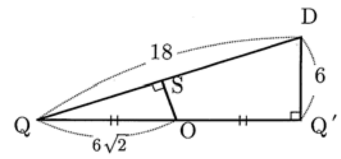
내접구의 중심을 O, 변 DH의 중점을 Q′,

점 O에서 선분 DQ에 내린 수선의 발을 S라 하자.

$\triangle DQQ' \backsim \triangle OQS$이고 $\overline{DQ'} = 6$, $\overline{DQ} = 18$,

$\overline{OQ} = 6\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{OS} = 6\sqrt{2} \times \dfrac{6}{18} = 2\sqrt{2}$



구의 반지름의 길이가 6이므로 구를 평면 DPQR로 자른 단면의 반지름의 길이를 r라 하면

$r^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2 = 28$

따라서 단면의 넓이는 28π이다.

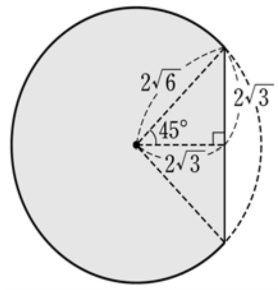
11. 정답 15

반구에 나타나는 단면인 원의 반지름은

$\sqrt{36 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 - 12}$

$= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

오른쪽 그림에서 어두운 부분의 넓이는



$\dfrac{1}{2} \cdot (2\sqrt{6})^2 \times \dfrac{3}{2}\pi + \dfrac{1}{2}(2\sqrt{6})^2$

$= 12\left(\dfrac{3}{2}\pi + 1\right) = 12 + 18\pi$

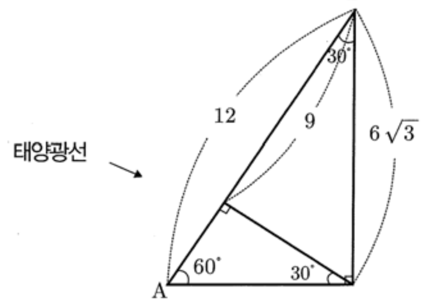
단면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$(12 + 18\pi)\cos 45 = \sqrt{2}\,(6 + 9\pi)$

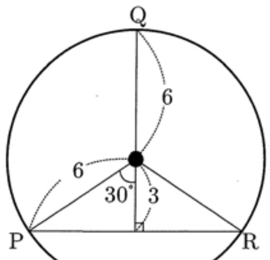
$\therefore a + b = 15$

12. 정답 34

원판과 평면 α 와의 교점을 A, 원판과 평면 β 와의 교점을 B라 하면



평면 β 위에 그림자가 생기는 원판의 부분은 활꼴PQR이다.



활꼴 PQR의 넓이는

$36\pi\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times6\times6\sin120°$

$=24\pi+9\sqrt{3}$

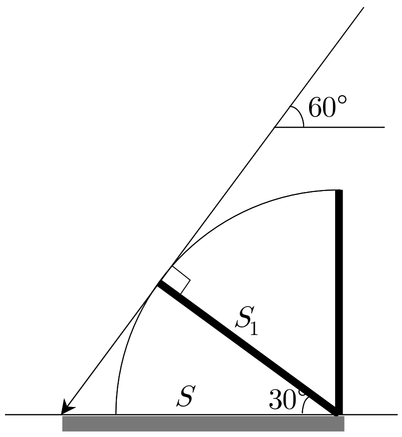
$S\cdot\cos30°=24\pi+9\sqrt{3}$

$S=18+16\sqrt{3}\pi$

따라서, $a=18$, $b=16$

$\therefore a+b=34$

13. 정답 30



판의 넓이를 S_1, 그림자의 넓이를 S라 하면

위 그림과 같이 판이 태양광선에 수직이 되는 순간 그림자의 넓이가 최대가 된다.

따라서 판의 넓이 $S_1=16-\pi$

그림으로부터

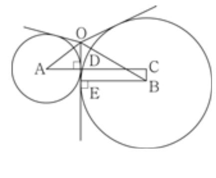
$S\cdot\cos30°=S_1$ 이므로 $S=\dfrac{16-\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}(32-2\pi)}{3}$

따라서 $a=32$, $b=-2$ 이므로 $a+b=30$

14. 정답 31

[출제의도] 공간도형의 성질을 이용하여 두 구의 중심 사이의 거리를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림과 같이 세 평면과 두 구의 평면 π 위로의 정사영을 생각하자. 오른쪽 그림에서



$\angle OAD=\angle OBE=30°$ 이므로 $\overline{OD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\overline{OE}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 $\overline{DE}=\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{AB}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$이다.

$d=\sqrt{1+\dfrac{28}{3}}=\sqrt{\dfrac{31}{3}}$ 이므로 $3d^2=31$이다.

15. 정답 ③

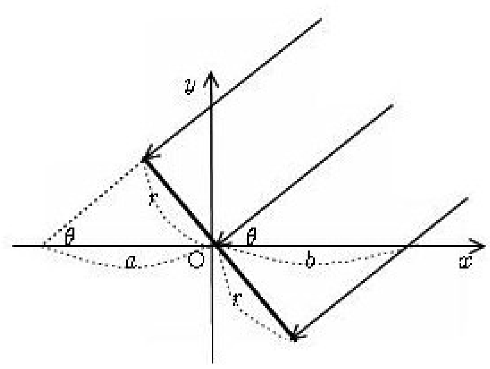
ㄱ. 구의 지름 중 구의 중심을 지나고 교선 l과 평행한 지름의 정사영의 길이는 변하지 않으므로

그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다. (참)

또, 구의 중심을 교선 l 위에 오도록 평행이동하고

구면 위의 원 중에서 태양광선에 수직인 원의 지름을

xy평면에서 생각하면 그림과 같다.



이때 $a\cos\theta=r$, $b\sin\theta=r$이므로

ㄴ. $a\cos60°=b\sin60°$에서 $a=\sqrt{3}b$

즉 $a>b$ (거짓)

ㄷ. $\cos\theta=\dfrac{r}{a}$, $\sin\theta=\dfrac{r}{b}$이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면 $\dfrac{r^2}{a^2}+\dfrac{r^2}{b^2}=1$

즉, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{r^2}$ (참)

16. 정답 : 54

[출제의도] 공간도형에 대한 삼수선의 성질과 넓이에 대한 정사영의 성질을 이해하고 있는 가를 묻는 문제이다.

삼각형의 중점연결 정리에 의하여 선분 HG 와 EF 의 길이는 선분 BC 길이의 $\frac{1}{2}$ 로 같다. 그리고

BC//HG, BC//EF 이므로 사각형 EFGH 는 평행사변형이다. 그리고 BC 위의 한 점 I 에서 HG 에 수선을 내린 점을 J , EF 에 수선을 내린 점을 K 라 하면 삼수선의 정리에 의하여 BC 와 JK 는 서로 수직이므로 JK 와 EF 는 서로 수직이 된다.

제 2 코사인법칙을 이용하면 $\cos\angle ABC=\dfrac{5}{7}$ 이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\angle ABC=6\sqrt{6}$

이다. 따라서, $\triangle ABC$ 의 높이는 $2\sqrt{6}$ 이다.

삼각형 ABC 와 삼각형 DCB 는 서로 합동이므로

$IJ=IK=$ 삼각형 ABC 의 높이$\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{6}$

이 되고 두 삼각형이 이루는 각이 60° 이므로 IJK 는 정삼각형이다. 사각형 EFGH 는 평행사변형이므로 그 넓이는
EF 의 길이$\times \mathrm{JK}=3\sqrt{6}$
이 되고 사잇각이 60° 이므로 구하고자 하는 정사영의 넓이는
$S=3\sqrt{6}\times\cos 60^\circ=\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$
이다. 따라서
$\therefore\ 4S^2=54$

17. 정답 ③
평면 AFH 와 평면 EFGH 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면
$\triangle\mathrm{AFH}\cos\theta=\triangle\mathrm{EFH}$ 이다.
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{2})^2\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cdot 4^2 \qquad \therefore\ \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
이때, 구하는 넓이를 S, 반원의 넓이를 S'이라 하면
$S=\dfrac{S'}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

18. 정답 ④
점 (a,b,c)는 직선 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=z-2$ 위의 점이므로
$\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b+1}{3}=c-2 \quad \cdots$ ㉠
점 (a,b,c)는 평면 $z=4$ 위의 점이므로
$c=4$
㉠에서 $\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b+1}{3}=2$
$\therefore\ a=4+1=5,\ b=6-1=5$
$\therefore\ a+b+c=5+5+4=14$

19. 정답 ②
A, B, C 의 내접구의 중심을 각각 P, Q, R라 하면
P (3, 1, 3), Q (3, 3, 1), R (1, 3, 1)
무게중심을 G라 하면
$\mathrm{G}\left(\dfrac{3+3+1}{3},\ \dfrac{1+3+3}{3},\ \dfrac{3+1+1}{3}\right)$
$\therefore \mathrm{G}\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{7}{3},\dfrac{5}{3}\right)$
$\therefore p+q+r=\dfrac{19}{3}$

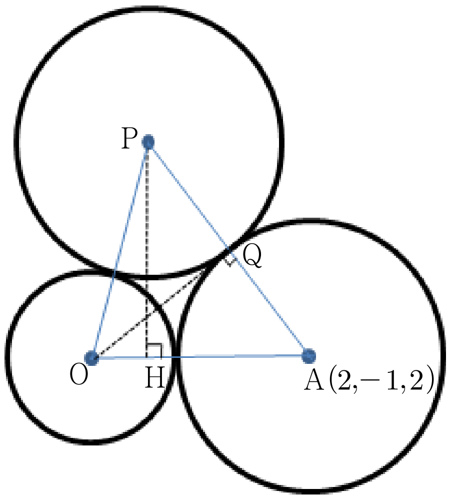
20. : ①
$\triangle AOC \backsim \triangle AQ'Q$ 이므로 점 Q' 의 좌표는 $Q'(2,0,0)$
$\triangle BOC \backsim \triangle AP'P$ 이므로 점 P' 의 좌표는 $P'(0,1,0)$
삼각형 $OP'Q'$ 은 직각삼각형이므로 구하는 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$

21. 정답 ①
점 P 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면
$\overline{PO}\perp(xy$ 평면$)$, $\overline{PH}\perp\overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{OH}\perp\overline{AB}$
따라서 직각삼각형 OAB 에서
$\overline{OA}=1,\ \overline{OB}=\sqrt{3},\ \overline{AB}=2$ 이고
$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OH}$ 이므로
$\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\overline{OH}$
$\therefore\ \overline{OH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
한편 $\triangle POH$ 도 직각삼각형이므로
$\overline{PH}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$
따라서 점 P 에서 직선 l 에 이르는 거리는 1 이다.

22. 정답 10
$\mathrm{P}(-3,4,5)$, $\mathrm{Q}(3,4,5)$ 이므로
선분 PQ 를 $2:1$ 로 내분하는 점의 좌표를 (a,b,c)라 하면
$a=\dfrac{6-3}{2+1}=1$
$b=\dfrac{8+4}{2+1}=4$
$c=\dfrac{10+5}{2+1}=5$
$\therefore\ a+b+c=1+4+5=10$

23. 정답 ①
[출제의도] 좌표공간에서 직선의 방정식을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
점 $(1,-2,3)$을 지나고 방향벡터가 $(2,3,4)$인 직선의 매개변수 방정식은 $x=2t+1,\ y=3t-2,\ z=4t+3$이다.
$x=2t+1=3$일 때, $t=1$이므로 조건에 맞는 직선은 점 $(3,1,7)$을 지난다. 따라서 $a+b=8$이다.

24. 정답 ⑤



원점 O를 중심으로 하는 구와 점 A(2,−1,2)를 중심으로 하는 구에 동시에 외접하는 구의 중심을 점 P라 하면 점 P의 자취는 선분 OA에 수직인 선분 PH를 반지름으로 하는 원이 된다.

$\overline{\mathrm{PH}}$를 삼각형 OAP의 넓이를 이용하여 구하면

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}$

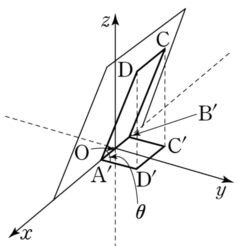
$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\frac{4\cdot\sqrt{5}}{3}$

점 P의 자취는 $2\pi\overline{\mathrm{PH}}=\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

25. 정답 ④

평면 $\sqrt{3}y-z=0$과 평면 $z=0$의 법선벡터는 각각 $\vec{u}=(0,\ \sqrt{3},\ -1)$, $\vec{v}=(0,\ 0,\ 1)$이므로 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|-1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\ \sqrt{1^2}}=\frac{1}{2}$



위의 그림에서 점 A, B와 점 A′, B′은 같은 점이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B'}}$, $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{C'D'}}$, $\overline{\mathrm{A'D'}}=\overline{\mathrm{AD}}\cos\theta$, $\overline{\mathrm{B'C'}}=\overline{\mathrm{BC}}\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{CD}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

따라서, 사각형 ABCD의 둘레의 길이는 6이다.

26. 정답 ②

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{b^2+(a-b)^2+a^2}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{a^2+b^2+(a-b)^2}$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이므로

넓이$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(a-b)^2+a^2+b^2\}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(a-b)^2+4\}\geq\sqrt{3}$

$\therefore a=b$일 때 최소값은 $\sqrt{3}$이다

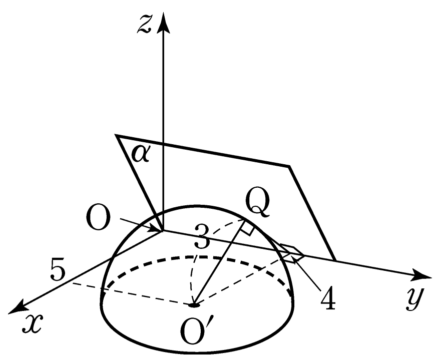
27. 정답 ⑤

[출제의도] 공간도형의 성질을 알고 이를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{\mathrm{MQ}}$가 최대가 되려면 점 B를 지나야 하므로

(최댓값)$=2\overline{\mathrm{MB}}=2\sqrt{3^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{17}$

28.정답 24



반구의 중심을O′이라 하고,O′에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 H(0, 4, 0)이므로

$\overline{\mathrm{O'H}}=5$ ……… ㉠

이 때, y축을 포함하는 평면 α와 반구의 접점을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{O'Q}}=3$ ……… ㉡

또한,$\overline{\mathrm{O'Q}}\perp\alpha$,$\overline{\mathrm{O'H}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{QH}}$이다.

$\therefore\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ ……… ㉢

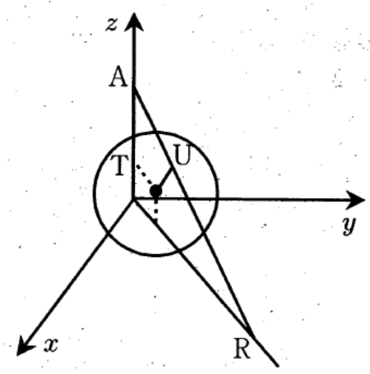
㉠, ㉡, ㉢에서 α와 xy평면이 이루는 각이 $\theta=\angle\mathrm{QHO'}$이므로

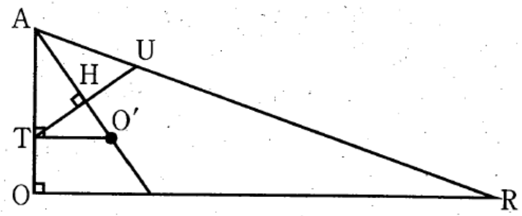
$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{O'H}}}=\frac{4}{5}\ \therefore 30\cos\theta=24$

29. [정답] 72

[출제의도] 공간도형과 이차곡선에 관한 수학 내적문제를 핼결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

꼭짓점이 A이고 구에 접하는 접선들로 이루어진 직원뿔을 xy평면으로 자른 단면은 타원이므로, 두 점 P,Q는 타원 위의 점이다. 따라서, 타원의 장축은 직선 $x=y,z=0$ 위에 존재하고, 장축의 한 끝점은 원점이다. 그림과 같이 원점을 O, 구의 중심을 O′, O′에서 z축에 내린 수선의 발을 T, 원점이 아닌 장축의 다른 끝점을 R, $\overline{\mathrm{AR}}$과 구의 접점을 U, 점 T에서 $\overline{\mathrm{AO'}}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.





$\overline{OT}=1$, $\overline{AT}=\overline{AU}=2$, $\overline{AO'}=\sqrt{6}$ 이므로 직각삼각형 ATO′에서

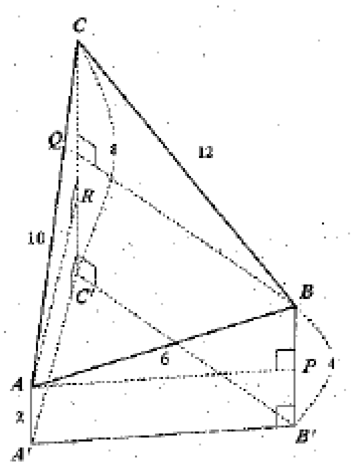
$\overline{TH}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 이고 △ATU에서 제이코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle TAU)=\dfrac{1}{3}$ 이다. 직각삼각형 AOR에서

최댓값 $M=\overline{OR}=6\sqrt{2}$ 이므로 $M^2=72$ 이다.

30. 정답 3

[출제의도] 구의 내접 외접 성질과 코사인 제2법칙을 이용하여 공간도형에서의 정사영 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.



점 A, B, C 를 평면 α 위로 정사영시킨 점을 각각 A′, B′, C′ 라 하자. 또한, 점 A 를 선분 BB′ , 선분 CC′ 위로 정사영시킨 점을 각각 P, R 이라 하고, 점 B 를 선분 CC′ 위로 정사영시킨 점을 Q 라고 할 때, 세 개의 구가 서로 외접하므로

$AB=2+4=6,\ BC=4+8=12,\ CA=8+2=10$

이다. 세 구가 평면 α 위에 있으므로

$\mathrm{BP}=4-2=2,\ \mathrm{CQ}=8-4=4,\ \mathrm{CR}=8-2=6$

이다. 피타고라스 정리에 의해

$\mathrm{A'B'}=\mathrm{AP}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$\mathrm{B'C'}=\mathrm{BQ}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$

$\mathrm{C'A'}=\mathrm{RA}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

이다. 제 2 코사인 법칙에 의해

$$\cos\mathrm{B}=\frac{6^2+12^2-10^2}{2\cdot6\cdot12}=\frac{5}{9}$$

$$\cos\mathrm{B'}=\frac{(4\sqrt{2})^2+(8\sqrt{2})^2-8^2}{2\cdot(4\sqrt{2})\cdot(8\sqrt{2})}=\frac{3}{4}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot6\cdot12\cdot\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=8\sqrt{14}$$

$$\triangle\mathrm{A'B'C'}=\frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{2})\cdot(8\sqrt{2})\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=8\sqrt{7}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{8\sqrt{7}}{8\sqrt{14}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

따라서 $a=1,\ b=2$ 이므로 $a+b=3$ 이다.

31. 정답 45

구가 평면에 의해 잘린 도형은 원이다.

세 점 $(18,0,0),(0,9,0),(0,0,9)$를 지나는 평면의 방정식은 $\dfrac{x}{18}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{9}=1$에서 $x+2y+2z=18$

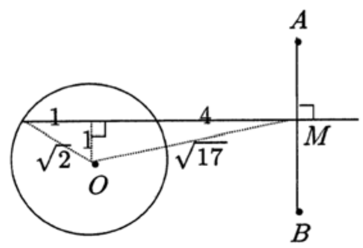
원점에서 이 평면 사이의 거리는 $\dfrac{|-18|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=6$

이므로 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{9^2-6^2}=\sqrt{81-36}=\sqrt{45}$ 이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 45π이다.

32. 정답 ③



(ⅰ) $\overline{AB}$의 중점 $M(3,2,-1)$

$\overline{OM}=\sqrt{17}$

(단, O는 구의 중심)

$\overline{AB}=3$, $\overrightarrow{AB}=(-1,-2,-2)$,

$\therefore\ \vec{h}=(1,2,2)$

법선벡터가 $\vec{h}$ 이고 점M을 지나는 평면의 방정식은

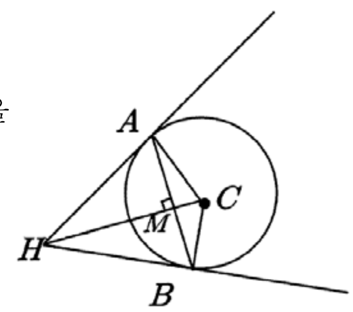
$x+2y+2z-3=0$ 이다.

(ⅱ) 구의 중심 O에서 평면까지의 거리는 1이다.

피타고라스 정리를 이용하여

$\overline{MP}\le5,\ S=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{MP}\le\dfrac{15}{2}$

33. 정답 16



$C(1,\ 1,\ 2),\ H(1,\ 0,\ 0)$

$\overline{CH}=\sqrt{5}$, $\overline{AH}=\overline{BH}=1$

$\overline{AB}\perp\overline{CH}$이므로 두 선분의 교점을 M이라 하면

$\triangle\ AHC=\dfrac{1}{2}\sqrt{5}\ \cdot\overline{AM}=1$

$\overline{AM}=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \overline{CM}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

$\triangle\ CAB=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\ \cdot\overline{CM}=\dfrac{16}{10}$

$\therefore\ 10S=16$

34. 정답 : 27

[출제의도] 공간에서 직선, 평면, 구 사이의 관계를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

좌표공간 위의 세 점 $P(3,\ 0,\ 0)$, $Q(0,\ 3,\ 0)$, $R(0,\ 0,\ 3)$ 을 포함하는 평면 α 의 방정식은

$x+y+z=3$

이다. 또한, $\triangle PQR$ 의 외접원 C_1 은 중심이 $(1,\ 1,\ 1)$ 이고 반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원이다.

그리고, 구 S의 방정식은 $(x-6)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=1$ 이고, 평면 α와 구 S가 만나서 생기는 원 C_2 의 중심은 구의 중심 $(6,\ -3,\ -3)$ 에서 평면 α 에 내린 수선 $x-6=y+3=z+3$ 이 평면 α 와 만나는 점이므로 연립방정식

$$\begin{cases} x-6=y+3=z+3 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

의 해 $(7,\ -2,\ -2)$ 가 된다. 또한, 구의 중심, 원 C_2 의 중심, 접점을 연결하여 얻은 삼각형이 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 원 C_2 의 반지름은 $\sqrt{r^2-3}$ 이 된다.

한편, 두 원 C_1, C_2 는 외접하므로 반지름의 합과 중심거리가 같게 된다. 즉,

$\sqrt{r^2-3}+\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

따라서, $r^2=27$

35. 정답 ②

교선 l 위의 임의의 점 P는 $(3,\ y,\ 1)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{3^2+y^2+1^2}=\sqrt{10+y^2}$

따라서, $\overline{OP}$의 최소값은 $y=0$일 때이다.

$\therefore\ \overline{OP}=\sqrt{10}$

36.[정답] ①

[해설]

$\overline{AP}=2\overline{BP}$ 에서 $1^2+2^2+a^2=4(1^2+1^2+1^2)$

$\therefore a^2=7,\quad a=\sqrt{7}$

37. 정답 ①

점 P에서 면 ABCD에 내린 수선의 발을 Q라 하면 $\triangle PAB$의 정사영은

$\triangle QAB$이다. 면 PAB와 면 ABCD가 이루는 각을 a라 하면

$(\triangle PAB$의 넓이$)\times\cos a=(\triangle QAB$의 넓이$)$

$(\triangle PAB$의 넓이$)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$

$(\triangle QAB$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$

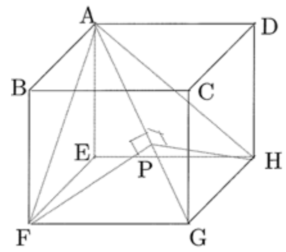
$\therefore \cos a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

이 때, $\theta=\dfrac{\pi}{2}+a$이므로 θ가 제 2사분면의 각이므로

$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

38. 정답 ③



선분 FG는 평면 ABFE와 수직이므로 $\overline{AF}\perp\overline{FG}$

또,선분 HG는 평면 AEHD와 수직이므로 $\overline{AH}\perp\overline{HG}$

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이를 1이라 하고, 점 F에서 선분 AG에 내린 수선의 발을 P라 하면

직각삼각형 AFG의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{FG}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AG}\times\overline{FP}$ 이므로

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\overline{FP}\quad\therefore\ \overline{FP}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

두 직각삼각형 AFG, AHG는 합동이므로 점 H에서 선분 AG에 내린 수선의 발도 P이고, $\overline{HP}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 두 평면 AFG, AHG가 이루는 각의 크기는 두 선분 FP, HP가 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{FH}=\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 FHP에서 제이코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-2}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=-\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

[별해] 점 E를 원점으로 하고, 직선 EF를 x축, 직선 EH를 y축, 직선 EA를 z축으로 하는 좌표공간을 설정하면

세 점 $A(0,0,1)$, $F(1,0,0)$, $G(1,1,0)$을 지나는 평면의 방정식은 $x+z=1$이고, 세 점 $A(0,0,1)$, $H(0,1,0)$, $G(1,1,0)$을 지나는 평면의 방정식은 $y+z=1$이다.

이 때, 두 평면 AFG, AHG가 이루는 각의 크기는

두 평면의 법선벡터 $\overrightarrow{h_1}=(1,0,1)$, $\overrightarrow{h_2}=(0,1,1)$가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}}{|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

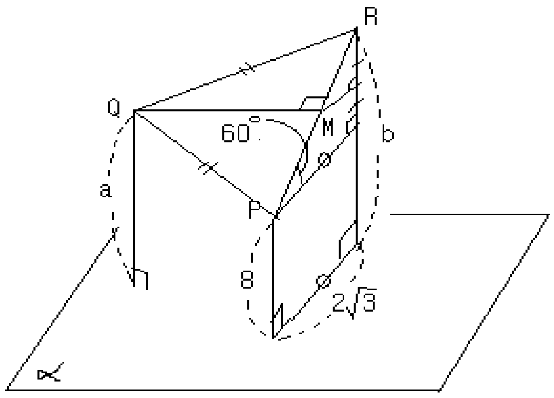
$\therefore\ \cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

39. 정답 25

세 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 모두 같으므로 삼각형 QRP가 이등변삼각형이려면 세 원기둥의 높이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루어야 하고, 이때

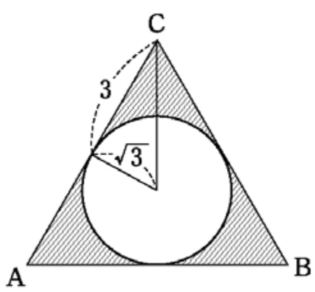
$\overline{QP}=\overline{QR}$

이다.

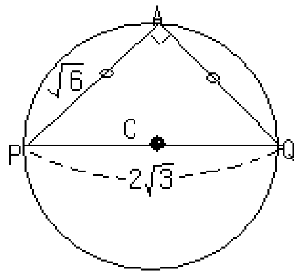


또 선분 PR 의 중점을 M 이라 하면 점 Q 를 지나고 평면 α와 평행한 평면 β와 평면 QPR의 교선은 선분 QM이다.
이때 $\overline{QM}\perp\overline{PR}$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 선분PR와 평면 α가 이루는 각의 크기와 같다.
그런데 선분 PR의 평면 α 위로의 정사영의 길이는 두 원기둥의 반지름의 길이의 합과 같으므로
$\overline{PR}\times\cos60^\circ=2\sqrt{3}$
$\therefore\ \overline{PR}=4\sqrt{3}$
따라서 위의 그림에서 점 P 와 점 R 의 평면 α로부터의 거리의 차는
$\overline{PR}\sin60^\circ=6$
따라서 세 원기둥의 높이는 각각
$8,\ 8+3,\ 8+6$이다.
$\therefore\ a=11,\ b=14$
$\therefore\ a+b=25$

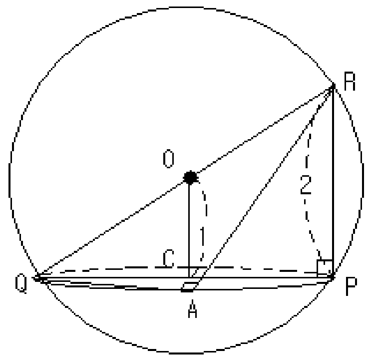
40. 정답 27
구하는 부분의 넓이는 오른쪽 그림에서 어두운 부분을 평면 ABC 위로 정사영 시킨 넓이와 같다.
정사면체에서 이면각 θ에 대해
$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이므로
$S=\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times6^2-\pi(\sqrt{3})^2\right\}\times\dfrac{1}{3}$
$=3\sqrt{3}-\pi$
$\therefore\ (S+\pi)^2=(3\sqrt{3})^2=27$



41. 정답 15
구 S의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$과 평면 α 사이의 거리 d는
$d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=1$
이므로 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원 C의 반지름의 길이 r는
$r=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
이다. 원 C 위의 세 점 A, P, Q의 위치관계는 다음과 같다.

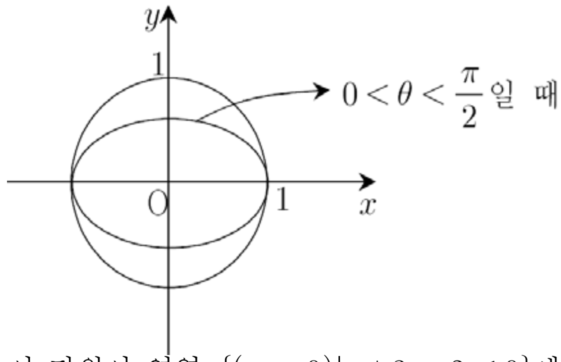


또한, 다음 그림에서
$\overline{PR}=2\overline{OC}=2$
이고 선분 QR는 구 S의 지름임을 알 수 있다.



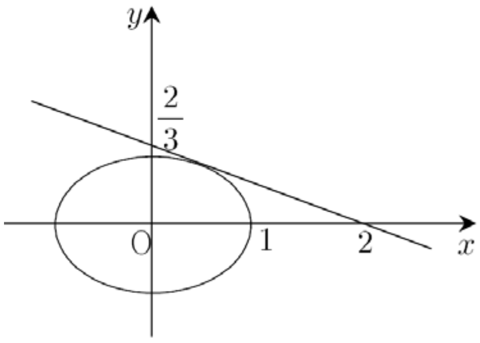
이때 점 A는 구 위의 점이므로 삼각형 ARQ는 ∠A=90° 인 직각삼각형이다.
$\therefore\ \overline{AR}=\sqrt{\overline{QR}^2-\overline{QA}^2}$
$=\sqrt{16-6}=\sqrt{10}$
$\therefore\ s=\dfrac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{AR}$
$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{10}$
$=\sqrt{15}$
$\therefore\ s^2=15$

42. 정답 20
x축을 포함하는 평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 와 만나서 생기는 단면은 반지름의 길이가 1인 원이고 이 원을 xy평면 위로 정사영한 도형은 타원이며 이 타원의 장축의 길이는 구의 지름의 길이와 같고, 단축의 길이는 $2\cos\theta$이다.
따라서 정사영한 도형의 방정식은
$x^2+\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}=1$



이 타원이 영역 $\{(x,\ y,\ 0)\,|\,x+3y-2\leq0\}$에 포함되게 하려면

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ중 가장 작은 θ가 존재하고, 이 때 $\cos\theta$는 최댓값을 갖게 된다.



$\cos\theta$의 값이 최대가 될 때는 타원 $x^2+\frac{y^2}{\cos^2\theta}=1$과 직선 $x+3y-2=0$이 그림과 같이 접하는 경우이다. 즉, 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 타원의 접선의 방정식은

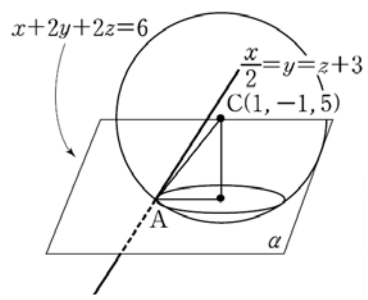
$y=-\frac{1}{3}x\pm\sqrt{1^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2\theta}$

이고 이 접선의 y절편이 $\frac{2}{3}$이므로 $\sqrt{\frac{1}{9}+\cos^2\theta}=\frac{2}{3}$

따라서 $\cos^2\theta=\frac{1}{3}=M^2$ 이므로 $60M^2=60\times\frac{1}{3}=20$

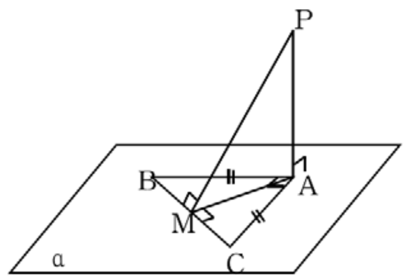
43. 정답 15
주어진 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(2,3,1)$이 구하고자 하는 평면의 법선벡터이고 점 $(1,-5,2)$을 지나므로 평면의 방정식은
$2(x-1)+3(y+5)+(z-2)=0$
따라서 $2x+3y+z+11=0$ 이므로
$a=3,\ b=1,\ c=11$
$\therefore\ a+b+c=3+1+11=15$

44. [정답] 53



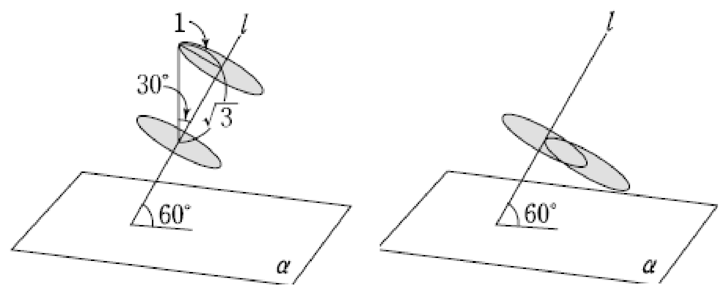
$\frac{x}{2}=y=z+3=t$ 라 하면 $A=(2t,\ t,\ t-3)$ 이고 점 A 가 평면 α 위의 점이므로 $2t+2t+2(t-3)=6$, $6t=12$, $\therefore\ t=2$
$\therefore\ A(4,\ 2,\ -1)$
$\overline{AC}=\sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{54}$
한편 중심에서 $(1,\ -1,\ 5)$ 에서 평면까지의 거리를 d 라 하면
$d=\frac{|1-2+10-6|}{\sqrt{1+4+4}}=1$
따라서 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름 r 는
$r=\sqrt{\overline{AC}^2-d^2}=\sqrt{54-1}=\sqrt{53}$
따라서 구하는 넓이를 S라 하면 $S=53\pi$
$\therefore\ k=53$

45. 정답 ②



점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면
삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$
$\angle\mathrm{A}=90°$이므로 점 M은 선분 BC의 중점이다.
$\overline{\mathrm{BC}}=6$이므로
$\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=3$
$\overline{\mathrm{PA}}=4$이므로 삼각형 PAM에서
$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{AM}}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

46.[정답] ⑤
[해설]
그림의 원판을 태양광선 방향으로 평행이동하여 만나게 하면 윗 원판이 아래 원판의 중심을 지난다.



겹친 원판의 넓이 S는 아래 그림의 빗금친 부분의 넓이를 S_1이라 하면
$S=2\times\pi\times1^2-2S_1$이다.
S_1은 중심각이 $\frac{2}{3}\pi$인 활꼴이므로
$S_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{2}{3}\pi$
$=\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$
$\therefore\ S=2\pi-\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$
그런데 구하는 그림자의 넓이 S은 평면과 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$인

정사영이므로

$$S' = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{4}$$

1. 정답 32
$2\vec{a}-2\vec{b}=\vec{c}$ 이므로 $(4-2x,\ 8)=(-4,y)$
따라서 $x=4, y=8$ 이므로 $xy=32$

2. 정답 48
정팔각형의 성질을 이용하여 대각선의 교점을 O라면
삼각형 OA_1A_3는 직각삼각형이 되고 $\overline{A_1O}=3$이다.
$\overline{A_iB_i}$의 중점을 P_i라 하면 $\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}=2\overrightarrow{PP_i}$이다.

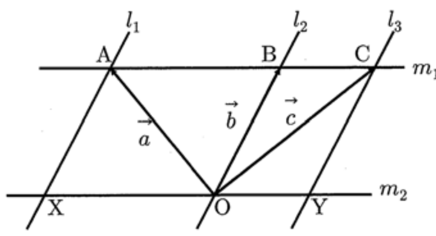
$$\therefore \sum_{i=1}^{8}(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i})=2\sum_{i=1}^{8}\overrightarrow{P_1P_i}$$

$$=2\sum_{i=1}^{8}(\overrightarrow{OP_i}-\overrightarrow{OP_1})\quad (\because \sum_{i=1}^{8}\overrightarrow{OP_i}=0)$$

$$=-2(8\overrightarrow{OP_1})=-2(8\overrightarrow{OA_1})$$

따라서 크기는 48이다.

3. 정답 ①



문제의 그림에서 $\vec{c}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\vec{c}-\vec{b}-\vec{a})t \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})t$
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})t \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AY}}$
따라서 점 P가 나타내는 도형은 A를 지나고 $\overrightarrow{\mathrm{AY}}$에 평행한 직선이다. 곧, 직선 AY이다.

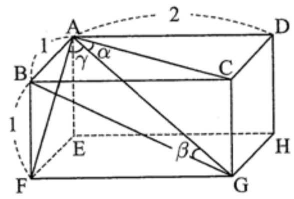
직선의 벡터 방정식
① 점 A을 지나고 벡터 $\vec{b}$에 평행한 직선 $\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{b}$ (t는 임의의 실수) ② 두 점 A, B을 지나는 직선의 벡터방정식 $\vec{x}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $\vec{x}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (단 t 임의의 실수) ※ 계수의 총합은 1일 때 일직선상에 존재.

4. 정답 $\frac{2}{3}\pi$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$의 종점은 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 방향이 같고 크기가 1인 벡터의 종점이므로
점근선의 방정식 $y=\pm\sqrt{3}x$
그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$의 종점은 y축을 기준으로 $\pm\frac{\pi}{6}$ 만큼의 범위에서 움직인다.
구하고자 하는 길이 $2l=2r\theta=\frac{2}{3}\pi$

5.정답 ③
[출제의도] 공간에서 방향코사인의 성질을 이해하여 주어진 벡터가 xy 평면과 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
좌표공간에서 벡터 $\vec{v}$가 x축, y축과 이루는 각의 크기가 각각 $60°$ 일 때, 벡터 $\vec{v}$가 z축과 이루는 각의 크기를 γ라 하면,
$\cos^2 60° + \cos^2 60° + \cos^2\gamma = 1$
이 되어 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 $\gamma=45°$ ($\because\ \cos\gamma>0$)가 된다. 즉, 벡터 $\vec{v}$가 z축과 이루는 각의 크기가 $45°$ 이므로 벡터 $\vec{v}$가 xy 평면과 이루는 각도 $45°$ 가 된다.

6. 정답 ③



$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BF}}=1$
$\overline{\mathrm{AD}}=2$ 이므로
$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BG}}=\sqrt{5}$
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{6}$
$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$
$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$

7. 정답 **17**
$\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=(1,-2)\cdot(5,-6)=5+12=17$

8. 정답 ③
$|\vec{a}-\vec{b}|=1$의 양변을 제곱하면
$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1 \qquad |\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로
$1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=1 \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$
따라서, $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ 이므로 $\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{1\cdot 1}=\frac{1}{2}$
$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}(\because 0\le\theta\le\pi)$

9. 정답 ⑤

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$= \dfrac{2\cdot 1+(-3)\cdot(-4)+2\cdot 0}{\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+0^2}}$

$= \dfrac{14}{17}$

10. 정답: ②

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$이므로

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3 \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2+4^2+(-1)^2} = 3\sqrt{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times1+2\times4+1\times(-1) = 9$

$\cos\theta = \dfrac{9}{3\times3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \theta = \dfrac{\pi}{4}$

11. 정답 ②

두 변 OA, OB가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 6\cos\theta = 2$ 에서 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\therefore \quad \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

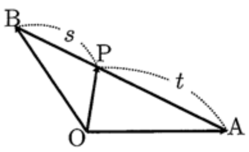
$\therefore$ (넓이) $= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 4\sqrt{2}$

12. 정답 ①

ㄱ. $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$(0 \leq t \leq 1)$이므로 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다. [참]

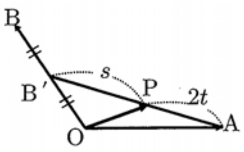


ㄴ. $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$= s\overrightarrow{OA}+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$이므로

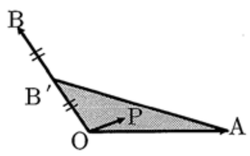
점 P가 그리는 도형은 선분 AB′

(이 때, $\overrightarrow{OB'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$)이고,



그 길이는 선분 AB의 길이보다 작은 경우도 있다. [거짓]

ㄷ. 양수 s, t가 $s+2t \leq 1$이면 점 P가 그리는 영역은 삼각형 OAB′이므로 삼각형 OAB에 포함 된다. [거짓]



따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

13. 정답 ③

$\overrightarrow{BA} = \vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{CA} = \boxed{\vec{a}+\vec{b}}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$= |\vec{a}-\vec{b}|^2+|\boxed{\vec{a}+\vec{b}}|^2$

$= |\vec{a}|^2-2\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}}+|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2+2\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}}+|\vec{b}|^2$

$= 2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

$= 2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

14. 정답 ⑤

점 B에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 D이라 하면

$a = \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAD$

$= \overline{AO}\times\overline{AD}$

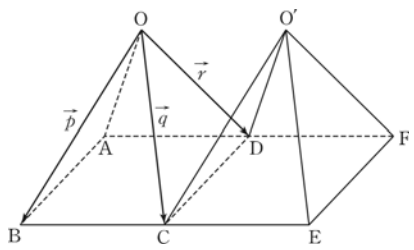
$b = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO} = 0$

$c = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle BOA$

$= \overline{OA}\times\overline{OD}$

$\therefore c > a > b (\because |\overline{OD}| > |\overline{AD}|)$

15. 정답 12



$\overrightarrow{OB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{q}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{r}$ 이라 하면

정사각뿔의 옆면은 모두 정삼각형이므로

$|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{r}| = 2$

$\vec{p}\cdot\vec{q} = \vec{q}\cdot\vec{r} = \vec{r}\cdot\vec{p} = 2\times2\times\cos60° = 2$

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{BC}$

$= \vec{r}+\vec{q}-\vec{p}$

$|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}| = |\vec{p}+(\vec{r}+\vec{q}-\vec{p})|^2$

$= |\vec{r}+\vec{q}|^2$

$= |\vec{r}|^2+|\vec{q}|^2+2\vec{r}\cdot\vec{q}$

$= 2^2+2^2+2\times2 = 12$

16.정답 ③

[출제의도] 공간도형의 성질을 이해하고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 C 를 원점으로하고 선분 BC 와 선분 CE 를 연결한 선분을 x 축으로 선분 CD 를 y 축, 점 C 를 지나며 평면 DCEF 에 수직인 직선을 z 축으로 하는 좌표공간을 정하자. 점 O 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 G 라 하면 G 는 삼각형 ABC 의 무게중심이 된다. 따라서 G 의 좌표는 $\left(-1, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 이다.

또한, O′ 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H 라 하면 H 는 사각형 CEFD 의 대각선의 중심이 된다. 따라서 H 좌표는

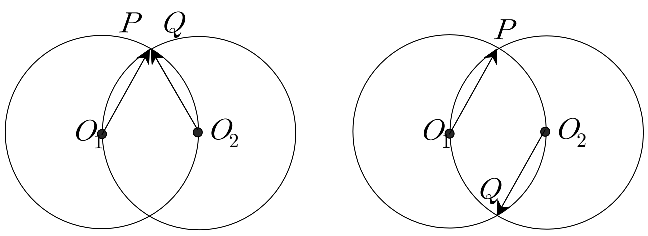
(1, 1, 0) 이다. 사면체의 높이와 정사각뿔의 높이를 구하여 O 와 O′ 의 좌표를 구하면 $O\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $O'(1,\ 1,\ \sqrt{2})$ 가 된다.

$\therefore\ \overrightarrow{CO}=\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right),\ \overrightarrow{CO'}=(1,\ 1,\ \sqrt{2})$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO'}}{|\overrightarrow{CO}||\overrightarrow{CO'}|}=\frac{-1\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{2}}{2\times2}=\frac{5}{12}\sqrt{3}-\frac{1}{4}$$

17. 정답 ②

두 점 P, Q는 모두 반지름이 1인 호 위를 움직이므로, 두 벡터 $|\overrightarrow{O_1P}|=|\overrightarrow{O_2Q}|=1$이 되고, 이로부터 두 벡터의 내적이 최대와 최소를 이룰 때를 그림으로 표현하면 아래와 같다.



[최대일 때, $\theta=\frac{\pi}{3}$] [최소일 때, $\theta=\pi$]

따라서 최댓값(M)과 최솟값(m)은 각각 다음과 같다.

$M=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $m=1\cdot1\cdot\cos\pi=-1$

18. 정답 12

[출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

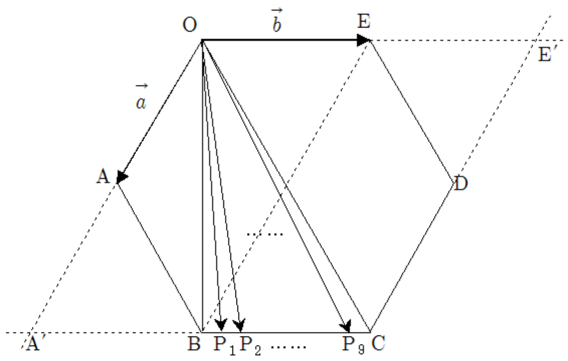
$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$이므로 $|\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}|^2=4$

따라서 $|\overrightarrow{AD}|^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+|\overrightarrow{AE}|^2=4$이므로

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=12$

19. 정답 45

아래 그림에서 $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+2\vec{b}$이다.



점 P_k는 선분 BC를 $k:10-k$로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OP_k}=\frac{(10-k)\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}}{10-k+k}=\frac{20\vec{a}+(10+k)\vec{b}}{10}$$

$$\sum_{k=1}^{9}\overrightarrow{OP_k}=\sum_{k=1}^{9}\frac{20\vec{a}+(10+k)\vec{b}}{10}=\sum_{k=1}^{9}2\vec{a}+\sum_{k=1}^{9}\vec{b}+\sum_{k=1}^{9}\frac{k}{10}\vec{b}$$

$$=18\vec{a}+9\vec{b}+\frac{9}{2}\vec{b}=18\vec{a}+\frac{27}{2}\vec{b}$$

$m=18,\ n=\frac{27}{2}$이므로 $m+2n=45$이다.

20. 정답 106

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB'}$인 점 B′에 대하여

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$

점B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을E, 점 E에서 선분 AB′에 내린 수선의 발을F라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{BF}\perp\overline{AB'}$이다.

$\cos(\angle BAE)=\frac{3}{5}$이므로 $\overline{BE}=\frac{9}{5}$, $\overline{AF}=\frac{27}{25}$

$\cos(\angle BAB')=\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\frac{9}{25}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$

$=\overline{AB}\cdot\overline{AB'}\cdot\cos(\angle BAB')=\frac{81}{25}$

$\therefore\ a+b=25+81=106$

21. 정답 ①

$\overrightarrow{PA}=(2-x,\ -y)$, $\overrightarrow{PB}=(-x,\ 2-y)$

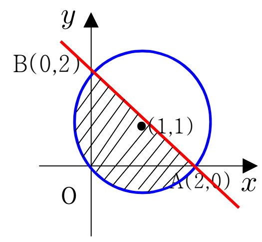
이므로 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2-2x+y^2-2y\leq0$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2\leq2$ ⋯ ㉠

$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(x,\ y)\cdot(2,\ 2)$

$=2x+2y\leq4\quad\therefore\ x+y\leq2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 점 P가 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다. 따라서 구하는 영역의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\pi=\pi$

22. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. $\overline{AB}$는 원의 지름이고, $\angle APB=90^\circ$이므로 내적은 0이다. (참)

ㄴ. △ABC에서 $\overline{AN}$은 ∠CAB의 이등분선이므로

$\overline{BA}:\overline{AC}=\overline{BN}:\overline{NC}=3:1$

따라서, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이다. (참)

ㄷ. $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$라 하자.

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BQ}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}\cdot(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)\cdot\left\{t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\vec{b}\right\}=0$

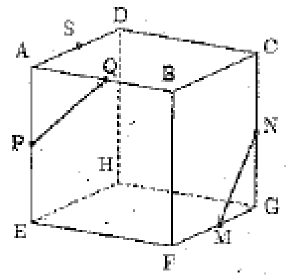
$\Leftrightarrow (2t-3)(\vec{b}\cdot\vec{c}+3)=0$

$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$이므로, $t=\frac{3}{2}$이다.

따라서, $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AM}$이다. (참)

23.정답 13

[출제의도] 평행이동시킨 벡터를 찾아 벡터의 내적계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.



AD 의 중점을 S라 하자.

$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{SP}$ 이고, $\triangle SPQ$ 는 정삼각형이므로

$\left|\overrightarrow{PQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SP}\right|$

$=|\overrightarrow{PQ}^2|+|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{SP}|\cos 120^\circ+\frac{1}{4}|\overrightarrow{SP}^2|$

$=(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}(\sqrt{3})^2=\frac{9}{4}$

따라서 $\left|\overrightarrow{PQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SP}\right|=\frac{3}{2}$ 이므로 $a^2+b^2=13$ 이다.

24. 정답 21

점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 P'이라 하면, 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP'}$ 이다. $\overrightarrow{AP'}$ 가 최대가 되는 점 P는 직선 AB와 수직인 기울기를 갖고, 타원에 접하는 접점 중에서 제2 사분면 위의 점이다. 따라서, 접선의 기울기는 2 이고, 접선의 방정식은

$y=2x+\sqrt{17}$

25. 정답 12

두 직각삼각형 PCO_1 , PCO_2 는 합동이므로

$\angle PCO_1=\angle PCO_2=60^\circ$ 이다.

따라서 두 원 위의 임의의 두 점 A, B에 대하여

$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=4$ 이다.

이 때, 두 벡터 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=32+2|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos\theta=32+32\cos\theta$

$\therefore\ |\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=4\sqrt{2+2\cos\theta}$

이 때, $\cos\theta$ 의 값은 두 점 A, B가 점 C와 일치할 때

$\cos\theta=\cos 0=1$ 로 최대이고,

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최댓값 은 $M=8$ 이다.

또, $\cos\theta$ 의 값은 두 점 A, B가 각각 두 반직선 CO_1, CO_2 와 두 원 S_1, S_2와 점 C가 아닌 점에서 만나는 점일 때,

$\cos\theta=\cos(\angle APB)=\cos(\angle APC+\angle BPC)$

$=\cos(2\cdot\angle CPO_1+\angle CPO_2)=$

$\cos(4\cdot\angle CPO_1)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$ 로 최소이고,

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최소값은 $m=4$ 이다.

$\therefore\ M+m=12$

(다른 풀이)

두 점 A, B가 점 C와 모두 일치할 때 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$는 최대이고 $\overline{PC}=4$ 이므로 최댓값은

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}|=|2\overrightarrow{PC}|=8$ 이다.

또, 두 점 A, B가 각각 두 반직선 $\overrightarrow{CO_1}, \overrightarrow{CO_2}$와 두 원 S_1, S_2와 점 C가 아닌 점에서 만나는 점일 때 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$는 최소이다. 이 때, 이 두 교점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{PM}=\overline{PN}=4$ 이고 $\angle MPN=\frac{2}{3}\pi$ 이므로 평행사변형법에 의해 최소값은 $2\times 4\times\cos\frac{1}{3}\pi=4$ 이다.

26. 정답 ⑤

[출제의도] 벡터의 내적을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (반례) $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$이지만 $|\vec{x}|=\sqrt{2}$, $|\vec{y}|=\sqrt{2}$ 인 경우가 있다. (거짓)

ㄴ. $|\vec{x}|=\sqrt{5}$, $|\vec{y}|=\sqrt{2}$이면 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$는 수직이 될 수 없다. $\therefore\ \vec{x}\cdot\vec{y}\neq 0$ (참)

ㄷ. 주어진 도형을 좌표평면에서 생각하면 $\vec{x}$, $\vec{y}$의 성분은 모두 정수이므로 $\vec{x}\cdot\vec{y}$는 항상 정수이다. (참)

27.정답 ②

점 A(1, 4, 2)는 직선 $\frac{x+1}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z-1}{2}$ 위에 있으므로 $a=4$, $b=4$

따라서 점 A(1, 4, 2)와

평면 $4x+4y+2z+48=0$사이의 거리는

$\frac{|4\times 1+4\times 4+2\times 2+48|}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}=\frac{72}{6}=12$

28. 정답 45

구가 평면에 의해 잘린 도형은 원이다.

세 점 (18, 0, 0),(0, 9, 0),(0, 0, 9)를 지나는 평면의 방정식은 $\frac{x}{18}+\frac{y}{9}+\frac{z}{9}=1$에서

$x+2y+2z=18$

원점에서 이 평면 사이의 거리는

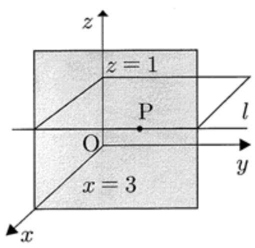
$\frac{|-18|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=6$

이므로 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{9^2-6^2}=\sqrt{81-36}=\sqrt{45}$ 이다.
따라서 구하는 도형의 넓이는 45π이다.

29. 정답 ④
평면 $2x-y=0$의 법선벡터를
$\overrightarrow{h_1}=(2,\ -1,\ 0)$
평면 $x-3y+kz+2=0$의 법선벡터를
$\overrightarrow{h_2}=(1,\ -3,\ k)$라 하면
$\cos 60=\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}=\dfrac{2+3}{\sqrt{5}\sqrt{10+k^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{k^2+10}}=\dfrac{1}{2}$
$\therefore k=\sqrt{10}\ (\because k>0)$

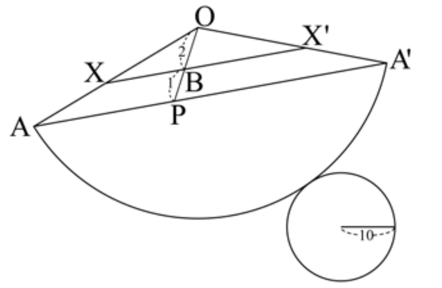
30. 정답 ②
점 P의 좌표를 $(3,\ y,\ 1)$ (t는 실수)로 놓으면
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+y^2+1^2}=\sqrt{10+y^2}$
이므로
$t=0$일 때, $\overline{\mathrm{OP}}$의 최소값은 $\sqrt{10}$ 이다.



31. 정답 14
[출제의도] 법선벡터가 정해진 평면과 공간도형이 교점이 가지는 경우를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.
평면 α가 각 꼭짓점과 만나기 위한 k의 값을 구하자.
$f(x,\ y,\ z)=2x+y-z-k$라 하면
$f(\mathrm{P})=-k-1=0\qquad\therefore\ k=-1$
$f(\mathrm{A})=-k-5=0\qquad\therefore\ k=-5$
$f(\mathrm{B})=-k+2=0\qquad\therefore\ k=2$
$f(\mathrm{C})=-k+9=0\qquad\therefore\ k=9$
$f(\mathrm{D})=-k-2=0\qquad\therefore\ k=-2$
이다. 따라서 사각뿔 P－ABCD 와 평면 α가 만나기 위한 k의 범위를 구하면 $-5\le k\le 9$ 이므로
$b-a=9-(-5)=14$ 이다.

32. 정답 ④
[출제의도] 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
접점으로 이루어진 도형을 포함하는 평면의 법선벡터는
$(1,3,5)-(1,7,2)=(0,-4,3)$이고,
xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이므로
$\cos\theta=\dfrac{|(0,-4,3)\cdot(0,0,1)|}{|(0,-4,3)|\times|(0,0,1)|}=\dfrac{3}{5}$

33. 정답 ④
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}}{3}$ 이므로 B는 선분 OP를 2 : 1 로 내분하는 점이다.
원뿔의 전개도에서 L은 선분 AA′이고 선분 OA와 선분 OA′을 2 : 1 로 내분하는 점을 각각 X, X′이라 하면 점 B의 자취는 선분 XX′이다.
부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 $30\times\theta=2\pi\times 10$에서
$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ 이므로
삼각형 OAA′에서



$\dfrac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{30}{\sin\dfrac{\pi}{6}}$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AA'}}=30\sqrt{3}$
$\therefore\ \overline{\mathrm{XX'}}=\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{AA'}}=20\sqrt{3}$

34. 정답:④
A(4, 0, 0), B(0, 6, 0), C(0, 0, 6)에 대하여
점 D, E의 좌표는 각각 D(2, 3, 0), E(0, 2, 4)이다.
점 P가 선분 DE위를 움직이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(2,\ 3,\ 0)+t(-2,\ -1,\ 4)$
$=(-2t+2,\ -t+3,\ 4t)$ (단, $0\le t\le 1$)
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-2t-2,\ -t+3,\ 4t)$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-2t+2,\ -t+3,\ 4t)\cdot(-2t-2,\ -t+3,\ 4t)$
$=(4t^2-4)+(t^2-6t+9)+16t^2=21t^2-6t+5$
$=21\left(t-\dfrac{1}{7}\right)^2+\dfrac{32}{7}$
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 최소값은 $t=\dfrac{1}{7}$일 때 $\dfrac{32}{7}$ 이다.

35. 정답 ③
그림에서 점 Q는 평행사변형 PBTC의 대각선 BC의 중점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{QT}}$ … ㉠
또, 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{QT}}$
사각형 AQTR는 평행사변형이므로 $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RT}}}$
따라서 △RBT는 △ABC의 세 중선의 길이를 각 변의 길이로 하는 삼각형이다.
한편, 두 선분 BC와 RT의 교점을 M이라고
하면, $\overline{\mathrm{AQ}}\,//\,\overline{\mathrm{RT}}$ 이고 점 R가 선분 AC의 중점이므로
점 M은 선분 CQ의 중점이다. $\therefore \overline{\mathrm{MB}}=\dfrac{3}{4}\overline{\mathrm{BC}}$
$\angle\mathrm{RMB}=\angle\mathrm{AQB}$ 이므로
$\triangle\mathrm{RBT}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RT}}\times\overline{\mathrm{MB}}\times\sin(\angle\mathrm{RMB})$
$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\dfrac{3}{4}\overline{\mathrm{BC}}\times\sin(\angle\mathrm{AQB})=\dfrac{3}{4}\ \triangle\mathrm{ABC}$

36. 정답:②

[출제의도] 직선과 삼각형이 만날 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

삼각형 ABC는 평면 $z=1$ 위에 있으므로 직선의 방정식에 $z=1$을 대입하면 삼각형 ABC를 품는 평면과 직선 l의 교점의 좌표는 $(-a-2,1,1)$이다.
평면 $y=1$과 선분 CA, CB의 교점의 x좌표가 각각 $2,-1$이므로 $-1\le -a-2\le 2$에서 $-4\le a\le -1$
따라서 구하는 정수 a의 개수는 4이다.

37. 정답 ②

$C:(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=6$의 중심을 $C_1(1,\ -1,\ -1)$이라 하자.
$\overrightarrow{C_1A}$가 평면 α의 법선벡터이다.
구하고자 하는 평면을 β라 하면 평면 β는 α에 평행하므로 법선벡터는 $\overrightarrow{C_1A}$이다.
평면 β와 구 C가 접하는 점을 $B(a,\ b,\ c)$라 하면 C_1은 $\overline{AB}$의 중점이다.

$(1,\ -1,\ -1)=\left(\frac{a+2}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{c-3}{2}\right)$

$(a,\ b,\ c)=(0,\ -2,\ 1)$

평면 β의 법선벡터는
$\overrightarrow{C_1A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC_1}=(1,\ 1,\ -2)$이며
접하는 점은 $(0,\ -2,\ 1)$이므로
$1\cdot(x-0)+1\cdot(y+2)-2(z-1)=0$
$\therefore\ x+y-2z+4=0$

38. 정답 ①

[출제의도] 벡터의 내적에 관한 성질을 알고 선분의 길이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{x}{2}=-y=-\frac{z}{2}=t$로 놓고 평면의 방정식에 대입하면 $t=-1$ $\therefore$ $A(-4,2,4)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}$에서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$이다.
따라서 점 P는 선분 OA를 지름으로 하는 구 위의 점이고, 이 구의 중심의 좌표는 $(-2,1,2)$, 반지름의 길이는 3이므로
구하는 최댓값은

$\frac{|-2+1+2-2|}{\sqrt{3}}+3=3+\frac{\sqrt{3}}{3}$

39.정답 160

[출제의도] 세 평면의 교점을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 네 평면 중 세 평면이 만나는 점이 사면체의 꼭짓점이므로 $A(0,0,4)$, $B(0,4,0)$, $C(2,2,0)$이다.
따라서 사면체 OABC의 부피는

$V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\times2\right)\times4=\frac{16}{3}$ $\therefore$ $30V=160$

40. 정답 11

원C 위의 점 P를 $(x_1,\ y_1,0)$이라 하면 $x_1{}^2+y_1{}^2=1$
직선 AP의 방정식을 구해보면

$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-3}{-3}$이고,

직선 위의 점은 $Q(x_1t,y_1t,\ -3t+3)$으로 나타낼 수 있다.
이 직선과 구의 교점을 구하면
$(x_1t)^2+(y_1t)^2+(-3t+1)^2=(x_1{}^2+y_1{}^2+9)t^2-6t+1=1$
정리하면 $10t^2-6t=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{3}{5}$

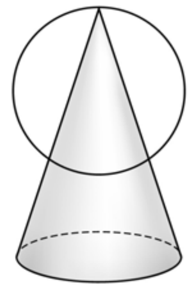
$t=0$이면 조건에 맞지 않고

$t=\frac{3}{5}$이면 $Q\left(\frac{3}{5}x_1,\frac{3}{5}y_1,\frac{6}{5}\right)$

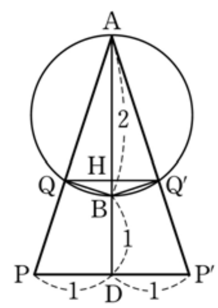
$\therefore$ Q의 자취는 $x^2+y^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2, z=\frac{6}{5}$

$\therefore$ 자취의 길이는 $2\pi\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\pi$ $\quad a+b=11$

[다른 풀이]



점 A와 원 C 위의 점 P를 이은 선분의 자취는 그림 ①과 같이 원뿔이 된다. 따라서 구하는 점은 원뿔과 구의 교점의 집합이다.
z축을 포함하는 평면으로 그림 ②와 같이 잘라보면 Q는 H로부터 거리가 일정하고
$\overline{QQ'}\perp\overline{AH}$이므로 자취는 원이 된다.



$\overline{AP}=\sqrt{10}$이므로
$\overline{AQ}=2\times cos(\angle QAB)$

$=2\times cos(\angle PAD)\ =\frac{6}{\sqrt{10}}$

$\therefore\overline{QH}=\overline{AQ}\cdot\sin(\angle PAD)$

$=\frac{6}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$

따라서, 반지름 $\frac{3}{5}$인 원이므로 자취의 길이는 $\frac{6}{5}\pi$이다.

$\therefore a+b=11$

41. 정답 ⑤

점 P의 xy평면으로의 정사영을 Q라 하자. $\triangle AQP$는 $\angle Q=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다. 그리고
$\overline{AQ}=\overline{PQ}=\sqrt{3}$, $\overline{AP}=\sqrt{6}$이다. $\overline{AC}=\overline{PC}=2$이고 $\triangle ACP$는 이등변삼각형이다. $S_1=\triangle ACP=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

$S_2 = \triangle AQC = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $S_1 \cos\theta = S_2$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{5}$

42. 정답 27

[출제의도] 공간에서 직선, 평면, 구 사이의 관계를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

좌표공간 위의 세 점 $\mathrm{P}(3,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 3,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ 을 포함하는 평면 α 의 방정식은

$x+y+z=3$

이다. 또한, $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 외접원 C_1 은 중심이 $(1,\ 1,\ 1)$ 이고 반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원이다.

그리고, 구 S의 방정식은 $(x-6)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=1$ 이고, 평면 α와 구 S가 만나서 생기는 원 C_2 의 중심은 구의 중심 $(6,\ -3,\ -3)$ 에서 평면 α 에 내린 수선 $x-6=y+3=z+3$ 이 평면 α 와 만나는 점이므로 연립방정식

$$\begin{cases} x-6=y+3=z+3 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

의 해 $(7,\ -2,\ -2)$ 가 된다. 또한, 구의 중심, 원 C_2 의 중심, 접점을 연결하여 얻은 삼각형이 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 원 C_2 의 반지름은 $\sqrt{r^2-3}$ 이 된다.

한편, 두 원 C_1, C_2 는 외접하므로 반지름의 합과 중심거리가 같게 된다. 즉,

$\sqrt{r^2-3}+\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

따라서, $r^2=27$

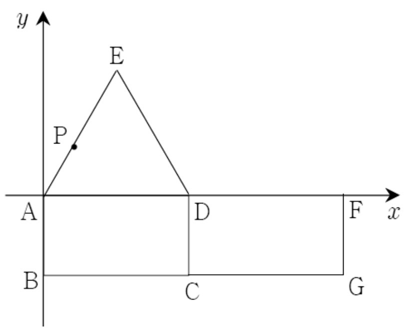
43. 정답 ⑤

ㄱ. $|\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\overline{\mathrm{PB}}$ 이므로

선분 PB의 길이는 점 P가 점 A와 일치할 때 최소이다.

따라서, 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB}}=1$ 이다. (참)

ㄴ.



$\triangle\mathrm{ACD}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{DC}}=1$ 이므로

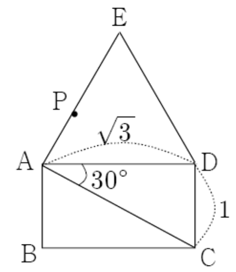
$\angle\mathrm{CAD}=30°$

$\triangle\mathrm{EAD}$ 가 정삼각형이므로

$\angle\mathrm{EAD}=60°$

$\therefore\ \angle\mathrm{EAC}=\angle\mathrm{PAC}=90°$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$



$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{CA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\bullet(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2+0$

$=2^2=4$ (참)

ㄷ. 점 A를 원점, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DF}}$ 인 x축 위의 점을 F라 하고

직사각형 DCGF를 그리면

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{GC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{GP}}$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|$의 최솟값은

점 $\mathrm{G}(2\sqrt{3},-1)$에서 직선 AE에 이르는 거리와 같다.

직선 AE의 방정식은

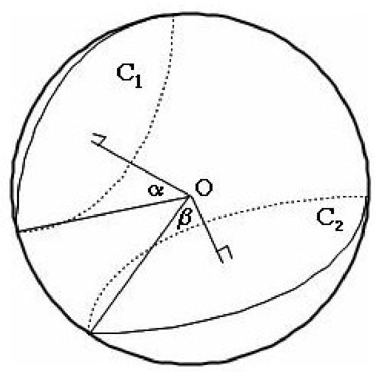
$y=\sqrt{3}x$ 즉, $\sqrt{3}x-y=0$ 이므로

구하는 최솟값은

$\frac{|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{7}{2}$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

44. 정답 40



원 C_1과 중심에서 원 C_1에 그은 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 평면 α의 법선 벡터가 이루는 각을 α라 하면

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{6}$

원 C_2과 중심에서 원 C_2에 그은 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 평면 β의 법선 벡터가 이루는 각을 β라 하면

$\cos\beta=\frac{1}{2}$ $\therefore\ \beta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

평면 α의 법선 벡터와 평면 β의 법선 벡터가 이루는

각 θ는 $\cos\theta=\frac{4}{5}$

따라서 최단거리를 나타내는 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 벡터 $\overrightarrow{OQ}$가

이루는 각은 $\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=\frac{3}{5}$이다.

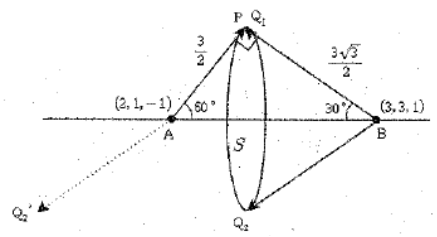
$\overline{PQ}^2=|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|^2=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$

를 정리하면 최소값은 40이다.

(제이코사인 법칙도 사용 가능하다.)

45. 정답 35

[출제의도] 공간에서 직선, 평면, 구 사이의 관계를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|\cos\theta$ 이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\frac{3}{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이므로 두 벡터가 이루는 각 θ 에 의하여 최댓값과 최솟값이 결정된다. 최댓값은 원 S에서 P 와 Q 가 서로 만날 대, 최솟값은 원 S의 지름의 양 끝 점에서 두 벡터의 종점이 위치할 때의 값이다. 두 구의 중심 A 와 B 사이의 거리는 $\sqrt{3-2)^2+(3-1)^2+(1+1)^2}=3$ 이고

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\frac{3}{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

이므로, 내적의 최댓값은 두 벡터가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 일 때이고 그 값은 0 이다. 내적의 최솟값은 두 벡터가 이루는 각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$ 일 때 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|\cos\theta=\frac{3}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{27}{8}$

이므로 $M-m=0-\left(-\frac{27}{8}\right)=\frac{27}{8}$ 이다.

따라서 $a+b=35$ 이다.

46. 정답 15

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=1$에서, $\overline{\mathrm{FP}}$ 의 중점을 Q 라고 하면

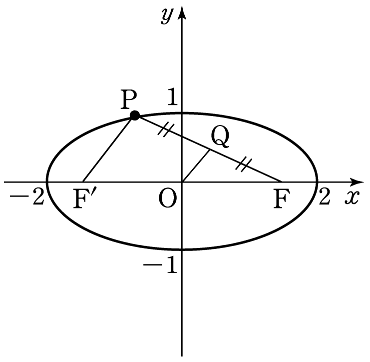
$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{2}\right|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\frac{1}{2}$

한편, $\overrightarrow{\mathrm{F'P}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{F'P}}|=\overline{\mathrm{PF'}}=1$이다.

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로, $\overline{\mathrm{PF}}=\mathrm{k}=3$

$\therefore 5k=15$



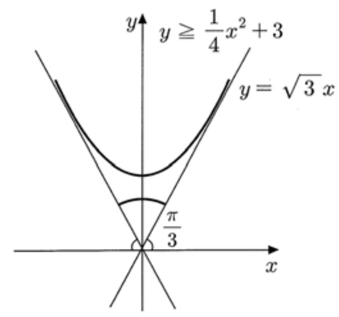
47. 정답 ①

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$ 의 종점 B은 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 방향이 같고 크기가 1 인 종점이므로 원점을 지나고 곡선 $y\geq\frac{1}{4}x^2+3$에 접하는 접선의 방정식을 $y=mx$라 하면 $\frac{1}{4}x^2+3=mx$에서

$\frac{1}{4}x^2-mx+3=0$이 중근을 가지므로

판별식 $\mathrm{D}=m^2-3=0$ $\therefore m=\pm\sqrt{3}$

그러므로 B는 단위원 위에서 y축을 기준으로 $\pm\frac{\pi}{6}$만큼의 범위에서 움직인다. 따라서 구하는 길이는 $l=r\theta=\frac{\pi}{3}$



48. 정답 ③

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ b)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(c,\ d)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(a+3,\ b+1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=(c+3,\ d+1)$

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(a,\ b)-(a+3,\ b+1)$

$=(-3,\ -1)$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ [참]

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(a,\ b)-(c,\ d)=(a-c,\ b-d)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=(a+3,\ b+1)-(c+3,\ d+1)$

$=(a-c,\ b-d)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$ [참]

ㄷ. (반례) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,\ 2)$일 때,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1\cdot1+1\cdot2=3$이다.

그런데, $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(4,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=(4,\ 5)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=4\cdot4+2\cdot5=26$

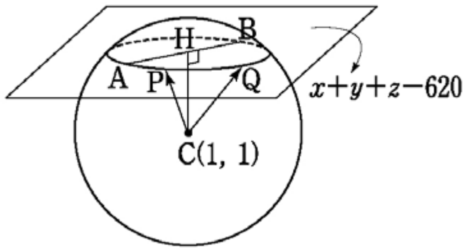
$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \neq \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'}$ [거짓]
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

49. 정답 12
점 H를 원점으로 하고, 반직선 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면
A(4, 0, 8), D(0, 0, 8), E(4, 0, 0),
F(4, 4, 0), G(0, 4, 0)이므로
네 점 P, Q, R, S, T의 좌표는 각각
P(4, 0, 6), Q(4, 2, 8), R(2, 0, 8)
S(2, 4, 0), T(3, 1, 8)이다.
이때
$\overrightarrow{TP}=(1,-1,-2)$,
$\overrightarrow{QS}=(-2,2,-8)$
이므로
$\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{QS}=(1,-1,-2)\cdot(-2,2,-8)$
$=-2-2+16=12$

50. 정답 ②
직선 l: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$이 평면 α에 수직이므로
직선의 방향 벡터 (1, −2, 3)는 평면의 법선벡터이다
따라서 점 A(1, 2, 3)을 지나고 법선벡터 (1, −2, 3)인 평면 α의 방정식은 $1\cdot(x-1)-2\cdot(y-2)+3\cdot(z-3)=0$
$\therefore\ x-2y+3z-6=0$
평면 α와 직선 m: $x-2=y=\dfrac{z-6}{5}$의 교점 B을 구하면
$x-2=y=\dfrac{z-6}{5}=t$라 하면
$x=t+2,\ y=t,\ z=5t+6$
이 때, 점 B의 좌표를 $(t+2,\ t,\ 5t+6)$이라 놓으면
B는 평면 α위에 있으므로
$(t+2)-2t+3(5t+6)-6=0$
$14t+14=0 \qquad \therefore\ t=-1$
$\therefore$ B(1, −1, 1)
$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{0^2+3^2+2^2}=\sqrt{13}$

51. 정답 43
A를 원점, $\overline{AB}$가 x축, α를 xy평면, $\overline{AD}$를 z축으로 하는 좌표축을 도입하면
$A(0,0,0),\ B(3,0,0),\ C\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\sqrt{3}, 0\right),\ D(0,0,4)$
$\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2=\left|(3,0,0)+\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{3},-4\right)\right|^2$
$=\left|\left(-\dfrac{9}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, -4\right)\right|^2$
$=\dfrac{81}{4}+\dfrac{27}{4}+16=27+16=43$

52. 정답 ①



$\overrightarrow{CP}$와 $\overrightarrow{CQ}$가 이루는 각을 θ라 하면
$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=|\overrightarrow{CP}|\times|\overrightarrow{CQ}|\times\cos\theta$
$=3\times3\times\cos\theta=9\cos\theta$
이므로 θ가 최대일 때 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}$가 최소이다.
따라서 원 S의 한 지름을 AB라 하면
두 점 P, Q가 각각 점 A와 B에 있을 때 θ가 최대이다.
C에서 평면 $x+y+z-6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{CH}=\dfrac{|1+1+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$
$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}$
$=2\sqrt{3^2-\sqrt{3}^2}=2\sqrt{6}$
$\therefore \cos(\angle ACB)=\dfrac{3^2+3^2-(2\sqrt{6})^2}{2\cdot3\cdot3}=-\dfrac{1}{3}$
$\therefore \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=9\cos\theta \geqq 9\times\cos(\angle ACB)$
$=9\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-3$

53. 정답 18
점 A(3,6,0)을 지나고 평면 $\sqrt{3}y-z=0$의 법선벡터 $\vec{h}=(0,\sqrt{3},-1)$과 평행한 직선의 방정식은
$\dfrac{y-6}{\sqrt{3}}=\dfrac{z}{-1}$, $x=3$
이 때, $\dfrac{y-6}{\sqrt{3}}=\dfrac{z}{-1}=t$라 하면 점 B의 좌표는
$(3,\ \sqrt{3}t+6, -t)$로
나타낼 수 있다. 점 B는 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 위의 점이어야 하므로
$3t+6\sqrt{3}+t=0 \quad \therefore\ t=-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$
따라서 점 A에서 평면에 내린 수선의 발 B의 좌표는
$B\left(3, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$이다.
$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(3,6,0)\cdot\left(3,\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$
$=9+9=18$
[별해] 원점 O는 평면 $\sqrt{3}y-z=0$위의 점이므로
두 벡터 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BA}$는 서로 수직이다.

점 $\mathrm{A}(3,6,0)$과 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 사이의 거리는

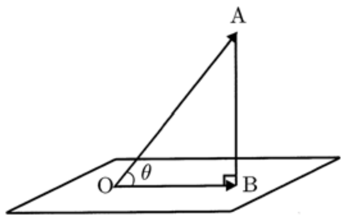
$$\frac{|\sqrt{3}\cdot 6-0|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+6^2+0^2}=3\sqrt{5}$

이므로 직각삼각형 OAB에서

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{45-27}=3\sqrt{2}$

그런데, $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하면



$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$ 이므로

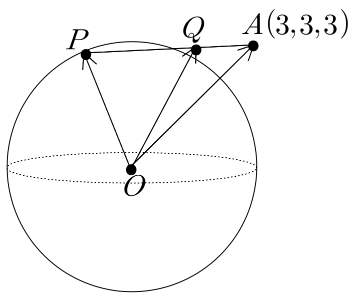
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\cos\theta=\overline{\mathrm{OB}}^2=(3\sqrt{2})^2=18$

54. 정답 30

선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라고 할 때,

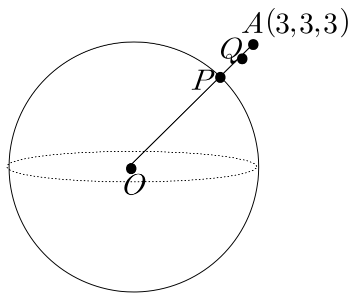
$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}$

이다.



$|\overrightarrow{OP}|=3$, $|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{3}$로 일정하므로

$|\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대가 되는 것은 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$의 방향이 같을 때이다.



$\overline{PQ}=\dfrac{2}{3}\overline{PA}=\dfrac{2}{3}(3\sqrt{3}-3)=2\sqrt{3}-2$

이므로

$|\overrightarrow{OQ}|=3+(2\sqrt{3}-2)=1+2\sqrt{3}$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ 10(a+b)=10(1+2)=30$

[다른 풀이]

점P의 좌표를 (x,y,z)라 하면

$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}(3,3,3)+\dfrac{1}{3}(x,y,z)$

$=\dfrac{1}{3}(x+6,\ y+6,\ z+6)$

이므로

$\left|\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|$

$=\left|\dfrac{1}{3}(x+6,\ y+6,\ z+6)\right|$

$=\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$

$\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$ 는

구면 위의 점 $P(x,y,z)$와

점 $Q(-6,-6,-6)$ 사이의 거리이므로

$\overline{PQ}$의 최댓값은

$\overline{OQ}+3=\sqrt{6^2+6^2+6^2}+3=6\sqrt{3}+3$

이다.

따라서, $\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$ 의 최댓값은

$\dfrac{1}{3}(6\sqrt{3}+3)=2\sqrt{3}+1$

이므로 $a=1,\ b=2$이다.

$\therefore\ 10(a+b)=10(1+2)=30$

55. 정답 ③

점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(3-x,\ 1-y,\ 1-z)$

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(1-x,\ -3-y,\ -1-z)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(4-2x,\ -2-2y,\ -2z)$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\sqrt{(4-2x)^2+(-2-2y)^2+(-2z)^2}$

$=2\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+z^2}$

이 때, $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+z^2}$은 $(2,\ -1,\ 0)$에서

평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$까지의 거리이므로

최소값은 점 $(2,\ -1,\ 0)$에서 평면까지의 직선거리이다.

따라서 $(2,\ -1,\ 0)$에서 평면 $x-y+z=0$까지의 거리는

$\dfrac{|2-1\cdot(-1)+0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{3}$ 이므로 구하는 최소값은 $2\sqrt{3}$이다.

[별해] 선분 AB의 중점을 C라 하면

$\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})=\overrightarrow{\mathrm{PC}}$이므로

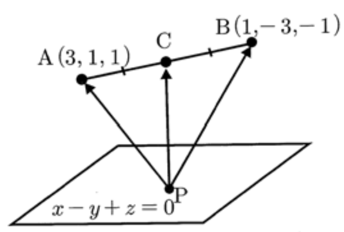
$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$가 최소일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$도 최소이다.

점 C의 좌표는 선분 AB의

중점이므로 $\mathrm{C}(2,-1,0)$이다.

그러므로 $\mathrm{C}(2,-1,0)$에서

평면 $x-y+z=0$까지 거리가



$\dfrac{|2+1+0|}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\geq\sqrt{3}$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\geq 2\sqrt{3}$

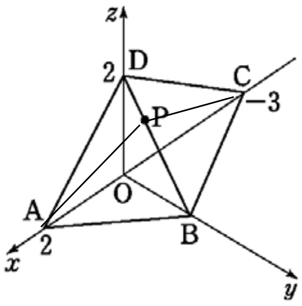
56. 정답 11

실수 t에 대하여

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OB}+(1-t)\overrightarrow{OD}$ $(0 \leq t \leq 1)=(0,\ t,\ 2-2t)$이라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{CP}|^2$

$=10t^2-16t+21$



$=10\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{73}{5}$

$\therefore\ t=\frac{4}{5}$일 때 최소가 된다.

$\therefore\ P\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)=(a,\ b,\ ,c)$

$\therefore\ a=0,\ b=\frac{4}{5},\ c=\frac{2}{5}$

$\therefore\ a+b+c=0+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\ =\frac{6}{5}=\frac{q}{p}$

$\therefore\ p+q=11$

57. 정답:18

$\overrightarrow{AB}\ //\vec{h}=(0,\ \sqrt{3}\ ,\ -1)$에서

$\overrightarrow{AB}=(0,\ \sqrt{3}\,t,\ -t)$라 하면

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(3,6+\sqrt{3}\,t,\ -t)$이고,

B는 평면 위의 점이므로 $\sqrt{3}\,(6+\sqrt{3}\,t)-(-t)=0$에서

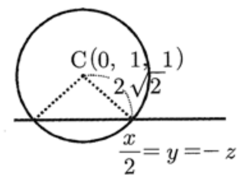
$t=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore\overrightarrow{OB}=\left(3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{OA}\ \cdot\overrightarrow{OB}=9+9=18$

58. 정답 12

구의 방정식은 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$

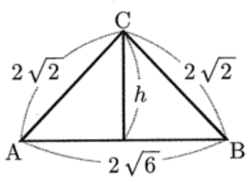
또한, $\frac{x}{2}=y=-z=t$에서 직선 위의



임의의 점은 $(2t,\ t,\ -t)$로 놓을 수 있고,

이 점이 구 위에 있으므로

$(2t)^2+(t-1)^2+(-t-1)^2=8$



$6t^2=6$에서 $t=\pm1$

$\therefore A(2,\ 1,\ -1),\ B(-2,-1,\ 1)$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{16+4+4}=2\sqrt{6}$

$\overline{BC}=\sqrt{4+4+0}=2\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{4+0+4}=2\sqrt{2}$

이 때, 높이는 $\sqrt{8-6}=\sqrt{2}$ 이므로

$S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{2}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ S^2=12$

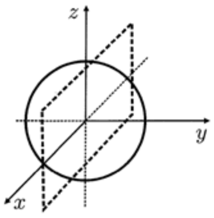
59. 정답 ③

좌표공간은 xy평면, yz평면, zx평면에 의해 다음과 같이 8개의 영역으로 나누어진다.

① $x>0,\ y>0,\ z>0$인 영역,

② $x>0,\ y>0,\ z<0$인 영역,

③ $x>0,\ y<0,\ z>0$인 영역,



④ $x>0,\ y<0,\ z<0$인 영역,

⑤ $x<0,\ y>0,\ z>0$인 영역,

⑥ $x<0,\ y>0,\ z<0$인 영역,

⑦ $x<0,\ y<0,\ z>0$인 영역,

⑧ $x<0,\ y<0,\ z<0$인 영역,

한편, 주어진 구

$C:(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$

의 중심은 $(-2,\ 3,\ 4)$이므로 구 C의 중심은 ⑤의 영역에 있다.

따라서 구 C는 ⑤의 영역을 지난다.

또, 구의 반지름의 길이 r는 $r=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$이고,

$|-2|<r,\ 3<r,\ 4<r$이므로 구 C는 yz평면, zx평면, xy평면에 의하여

두 부분으로 나누어진다. 따라서 구 C는 ①, ⑦, ⑥의 영역을 지난다.

한편, $\sqrt{(-2)^2+3^2}<r$이므로 구 C는 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ③의 영역을 지난다.

또, $\sqrt{(-2)^2+4^2}<r$이므로 구 C는 y축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ②의 영역을 지난다.

하지만, $\sqrt{3^2+4^2}>r$이므로 구 C는 x축과 만나지 않는다.

따라서 ⑧의 영역을 지나지 않는다.

또, $\sqrt{(-2)^2+3^2+4^2}>r$이므로 원점의 구 C의 외부에 있다.

따라서 ④의 영역을 지나지 않는다.

따라서 구 C가 지나는 영역은 ①, ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦의 6개이다.

60. 정답 27

구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=4$에 $z=-1$을 대입하면

$x^2+y^2=3$이므로

원 C는 중심이 $(0,\ 0,\ -1)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고

평면 $z=-1$에 놓인 원이다.

이 때, x축을 포함하고 이 원과 오직 한 점에서 만나는 평면 α는 두 점 $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(0,\ \sqrt{3}\ ,\ -1)$

(또는 $B(0,\ -\sqrt{3}\ ,\ -1)$)을 지나야 한다.

따라서 평면 α는 x축과 직선 OA (또는 OB)를 포함한다.

이 때, x축의 방향벡터는 $\vec{x}=(1,\ 0,\ 0)$

이고 직선 OA의 방향벡터 (또는 직선 OB의 방향벡터)는

$\vec{a}=(0,\ \sqrt{3}\ ,\ -1)$ (또는 $\vec{b}=(0,\ -\sqrt{3}\ ,\ -1)$)

이므로 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}$은 벡터 $\vec{x}$와 벡터 $\vec{a}$ (또는 $\vec{b}$)와 각각 수직이어야 한다.

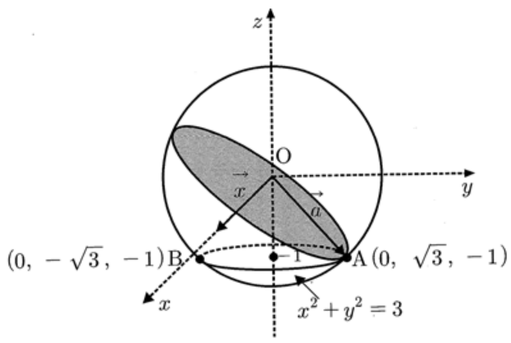
그런데 한 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ 3,\ b)$이므로

$\vec{n}\cdot\vec{x}=(a,\ 3,\ b)\cdot(1,\ 0,\ 0)=0$에서 $a=0$이고,

$\vec{n}\cdot\vec{a}=(a,\ 3,\ b)\cdot(0,\ \sqrt{3}\ ,\ -1)=0$에서

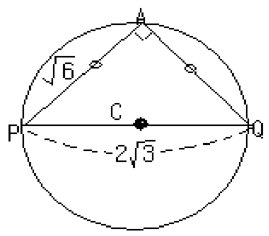
$3\sqrt{3}-b=0 \qquad \therefore\ b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=0+27=27$



61. 정답 15

구 S의 중심 (0, 0, 0)과 평면 α 사이의 거리 d는



$d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=1$

이므로 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원 C의 반지름의 길이 r는

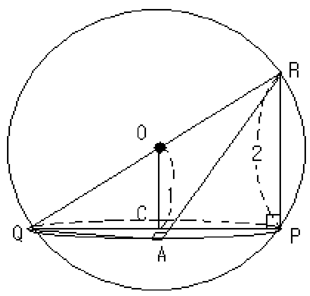
$r=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

이다. 원 C 위의 세 점 A, P, Q의 위치관계는 다음과 같다.

또한, 다음 그림에서

$\overline{\mathrm{PR}}=2\overline{\mathrm{OC}}=2$

이고 선분 QR는 구 S의 지름임을 알 수 있다.



이때 점 A는 구 위의 점이므로 삼각형 ARQ는 $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{QR}}^2-\overline{\mathrm{QA}}^2}$

$=\sqrt{16-6}=\sqrt{10}$

$\therefore\ s=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{AR}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{10}$

$=\sqrt{15}$

$\therefore\ s^2=15$

62. 정답 84

$x^2+y^2+z^2=81 \ \cdots$ ㉠

$x^2+(y-5)^2+z^2=56 \ \cdots$ ㉡

에서 ㉠ −㉡을 계산하여 정리하면 $y=5$

따라서 두 구가 만나는 원은 평면 $y=5$위에 있다.

구의 방정식 ㉠에 $y=5$를 대입하면

$x^2+z^2=56 \ \cdots$ ㉢

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 방정식은

$x^2+z^2=56,\ y=5$

이 원 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 5,\ z)$의 xy평면 위로의 정사영은 $\mathrm{P}'(x,\ 5,\ 0)$이고,

두 점 Q, R의 좌표는 각각 (0, 9, 0), (0, −9, 0)이므로

삼각형 QP′R의 넓이 S는

$\mathrm{S}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{QR}}\cdot|x|=9|x|$

이 때, 사면체 PQP′R의 높이는 $|z|$이므로 이 사면체의 부피 V는

$\mathrm{V}=\dfrac{1}{3}\cdot\mathrm{S}\cdot|z|=3|xz|$

그런데, 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의해

$x^2+z^2=56\geq 2\sqrt{x^2z^2}=2|xz|$

이므로 $|xz|\leq 28$

$\therefore\ \mathrm{V}=3|xz|\leq 3\cdot 28=84$

따라서 구하는 사면체의 부피의 최대값은 84이다.

63. 정답 216

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x,y,z)$라 하면 $\mathrm{Q}(x,y,0)$, $\mathrm{R}(0,y,z)$, $\mathrm{S}(x,0,z)$ 이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=z$, $\overline{\mathrm{PR}}=x$, $\overline{\mathrm{PS}}=y$ 이다.

이 때, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PS}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 이므로

$\triangle\mathrm{PRS}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PR}}\cdot\overline{\mathrm{PS}}=\dfrac{1}{2}xy$

따라서 사면체 PQRS의 부피 V는

$\mathrm{V}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{PRS}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{6}xyz$

그런데, $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{z^2+x^2}$, $\overline{\mathrm{QS}}=\sqrt{z^2+y^2}$ 이고,

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{QS}}$ 이어야 하므로 $x=y$ ($\because x>0,\ y>0$)

이 때, $x+2y+2z=54$ 에서 $z=\dfrac{1}{2}(54-3x)$ ($\because x=y$)

$\mathrm{V}=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{1}{6}x^2z=\dfrac{1}{12}x^2(54-3x)=\dfrac{1}{4}(-x^3+18x^2)$

이 때, $\dfrac{d\mathrm{V}}{dx}=\dfrac{1}{4}(-3x^2+36x)=0$ 에서 $x=12$ ($\because\ x\neq 0$)

$x=12$ 에서 극대이면서 최대이다. 따라서 구하는 사면체 PQRS의 부피의 최소값은

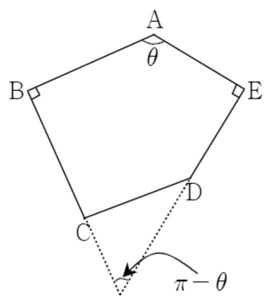
$\mathrm{V}=\dfrac{1}{4}(-12^3+18\times 12^2)=36(-12+18)=36\times 6=216$

64. 정답 ⑤

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$은 평행하다. (참)

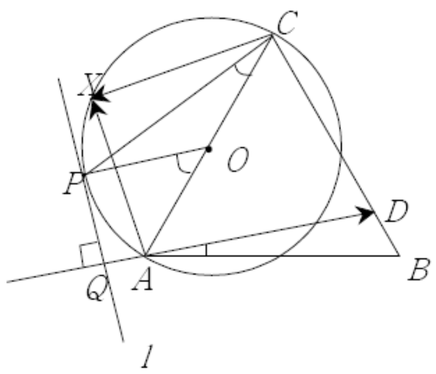
ㄴ. (참)

$\angle B = \angle E = 90°$이므로 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각을 θ라 하면 $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{ED}$가 이루는 각은 $\pi-\theta$이다.
따라서
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta$



$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos(\pi-\theta)=-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos\theta$
이때, $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$이므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$ (참)
ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}+|\overrightarrow{ED}|^2$
$|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2-2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$ 이때,
$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$이고 'ㄴ'에 의해 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$이 성립하므로
$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{BE}|^2$
따라서 $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$이 성립한다. (참)

65.[정답] 17
[해설]



$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AC})$
$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ ……㉠
세 점 A, C, D는 고정된 점이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$는 상수이다.
따라서, ㉠에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되려면 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}$의 값이 최소가 되어야 한다.
두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AX}|\cos\theta$이고, $|\overrightarrow{AD}|$의 값은 상수이므로
$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$의 값이 최소이어야 한다.
그림과 같이 직선 AD와 수직인 직선이 원과 접할 때의 접점을 P라 하면
$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta \ge |\overrightarrow{AP}|\cos\theta$
$=-|\overrightarrow{AQ}|$
이 때, $\angle POA=\angle OAD=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{15}=\dfrac{4}{15}\pi$이므로
$2\angle ACP=\angle AOP$에서
$\angle ACP=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{15}\pi=\dfrac{2}{15}\pi$
$\therefore p+q=15+2=17$