[준킬러][미적] 4미분법2

06 미적

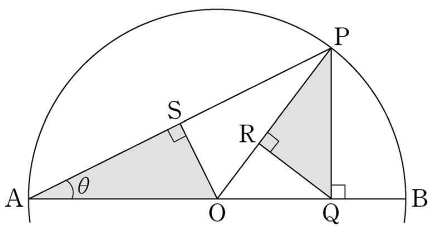
05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

06 활용4 (원과 도형)

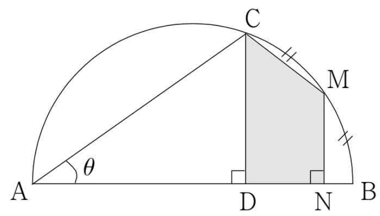
[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 11월 27

1. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 R, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 S라 하자. $\angle PAQ = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$일 때, 삼각형 AOS의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{q}{p}$일 때, $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



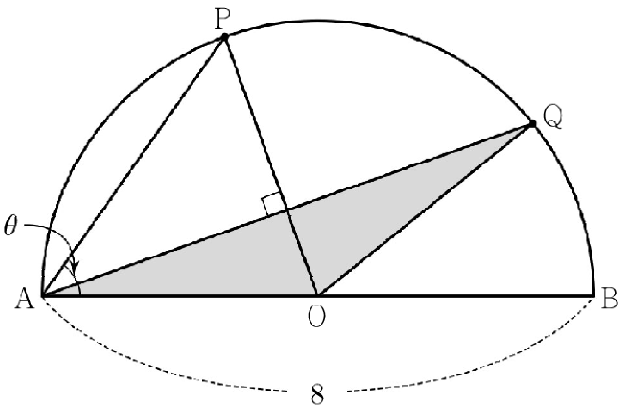
[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

2. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위를 움직이는 점 C가 있다. 호 BC의 길이를 이등분하는 점을 M이라 하고, 두 점 C, M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 D, N이라 하자. $\angle CAB = \theta$라 할 때, 사각형 CDNM의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = a$일 때, $16a$의 값을 구하시오. (단, 점 C는 선분 AB의 양 끝점이 아니다.)



[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 11월 28

3. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 P가 있다. 점 A를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 반원과 만나는 점을 Q라 하자. $\angle PAO=\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$일 때, 삼각형 AOQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}+}\frac{S(\theta)}{\theta-\frac{\pi}{4}}$의 값을 구하시오.

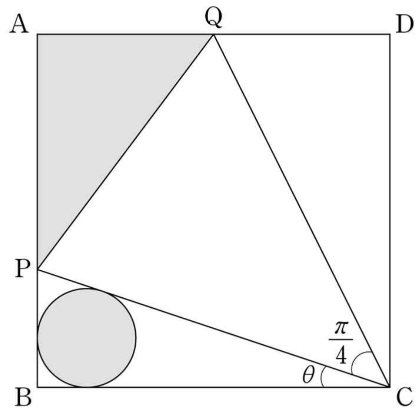


[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 29

4. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 변 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle BCP=\theta$라 하고, 변 AD 위의 점 Q를 $\angle PCQ=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡는다. 삼각형 APQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 BCP의 내접원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

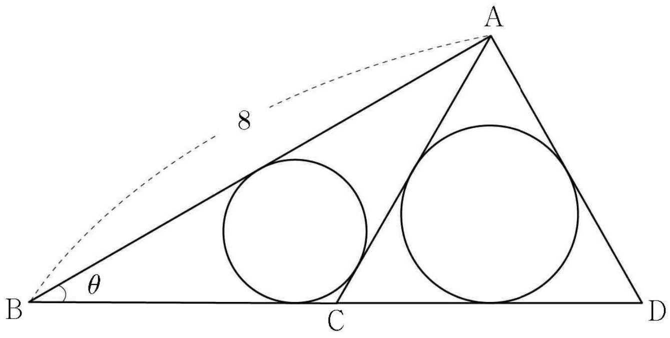
$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\pi$$

이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월

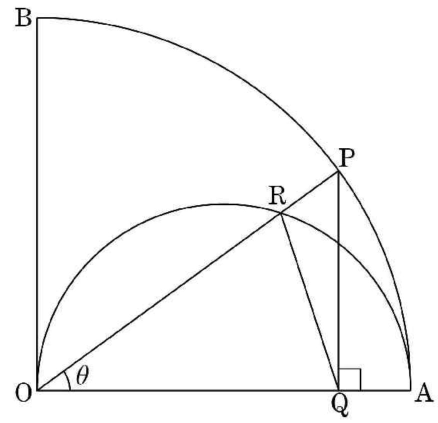
5. $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ABC=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 점 D를 잡는다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r_1 r_2}{\theta^2}$의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 19

6. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB와 선분 OA를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 Q, 선분 OP와 반원의 교점 중 O가 아닌 점을 R라 하고, $\angle POA=\theta$라 하자. 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?

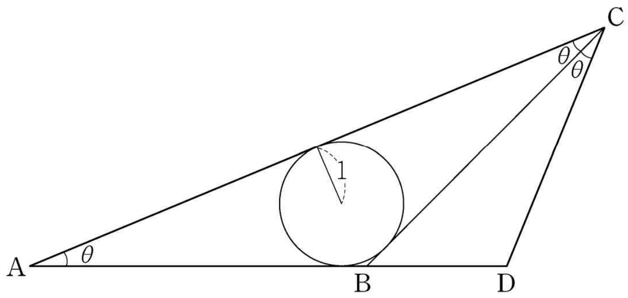


① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[준킬러][미적] 4미분법2

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 20

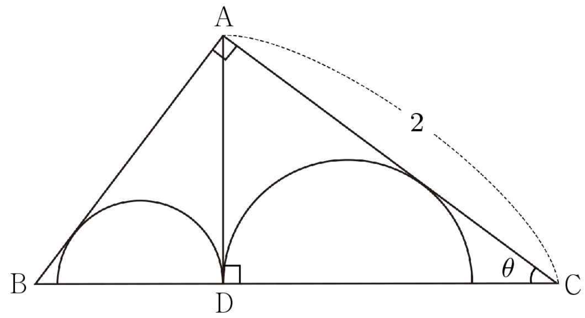
7. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle CAB = \angle BCA = \theta$ 인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle DCB = \theta$ 가 되도록 잡는다. 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은? $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{10}{9}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

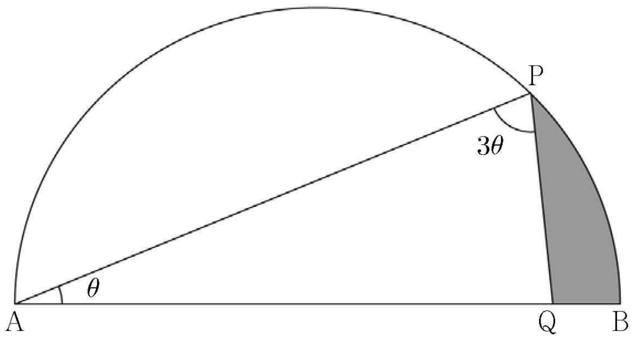
[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 11월 29

8. 그림과 같이 선분 AC의 길이가 2이고 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고 $\angle ACD = \theta$라 하자.
삼각형 ABD에서 변 BD 위에 지름이 놓여 있고 변 AB에 접하면서 점 D를 지나는 반원의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 ADC에서 변 DC 위에 지름이 놓여 있고 변 AC에 접하면서 점 D를 지나는 반원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2 \times T(\theta)} = \alpha$일 때, 60α의 값을 구하시오. (단, 두 반원의 호는 점 D에서 만난다.)



[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 29

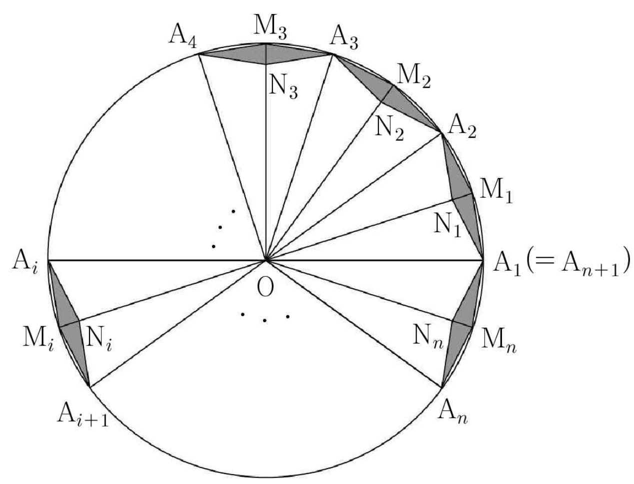
9. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 $\angle \mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$인 점 P가 있다. $\angle \mathrm{APQ}=3\theta$가 되도록 선분 AB 위의 점 Q를 잡을 때, 두 선분 PQ, QB와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 21

10. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 $n(n\geq 4)$등분한 점을 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이라 하자. 호 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$을 이등분한 점을 M_i라 하고 사각형 $\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{N}_i$가 마름모가 되도록 하는 선분 OM_i 위의 점을 N_i라 하자. n개의 사각형
$\mathrm{A}_1\mathrm{M}_1\mathrm{A}_2\mathrm{N}_1$, $\mathrm{A}_2\mathrm{M}_2\mathrm{A}_3\mathrm{N}_2$, $\mathrm{A}_3\mathrm{M}_3\mathrm{A}_4\mathrm{N}_3$, $\cdots$, $\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{N}_n$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(n^2\times S_n\right)$의 값은?

(단, $\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_1$)

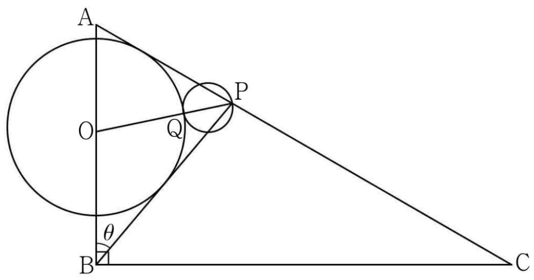


① π^3 ② $2\pi^3$ ③ $3\pi^3$
④ $4\pi^3$ ⑤ $5\pi^3$

[준킬러][미적] 4미분법2

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

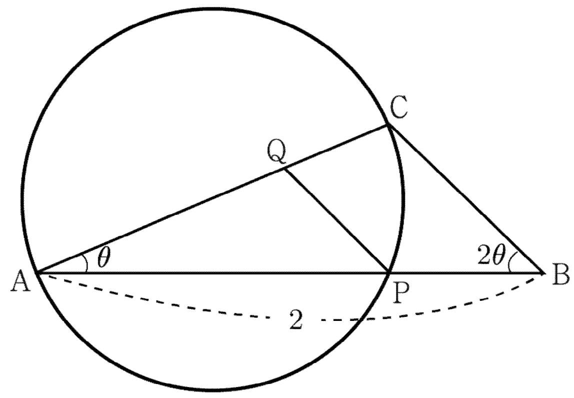
11. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 CA 위의 점 P에 대하여 $\angle ABP=\theta$라 할 때, 선분 AB 위의 점 O를 중심으로 하고 두 선분 AP, BP에 동시에 접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 이 원과 선분 PO가 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^2}$의 값은?



① $\frac{17-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\frac{18-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\frac{19-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ④ $\frac{18-4\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $\frac{19-4\sqrt{3}}{3}\pi$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 21

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$이고 $\angle ABC=2\angle BAC$를 만족하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC를 지름으로 하는 원과 직선 AB가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P, 점 P를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하자. $\angle BAC=\theta$라 할 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

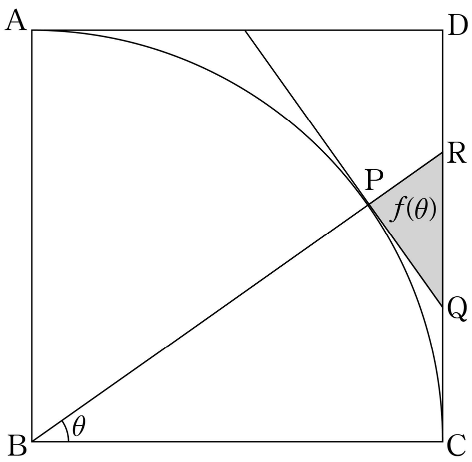


① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{19}{27}$ ⑤ $\frac{20}{27}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 27

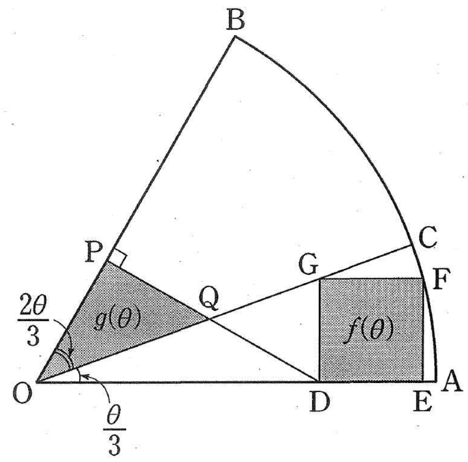
13. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD 안에 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 BCA가 있다. 호 AC 위의 점 P에서의 접선이 선분 CD와 만나는 점을 Q, 선분 BP의 연장선이 선분 CD와 만나는 점을 R라 하자. $\angle PBC = \theta$일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{8f(\theta)}{\theta^3}$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



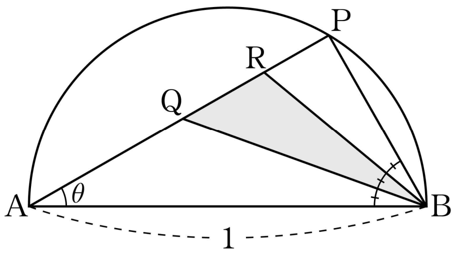
[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 28

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 이고, } \overline{OD} < \overline{OE} \text{ 이다.}\right)$



[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 19

15. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle ABP$를 삼등분하는 두 직선이 선분 AP와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle PAB = \theta$일 때, 삼각형 BRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



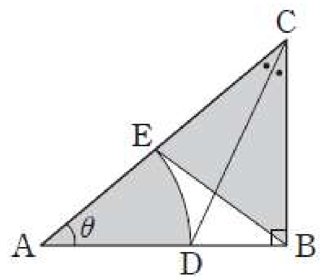
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 18

[출처] 2020 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

[출처] 2022 일반_시중교재 좋은책신사고 홍범준,김의석,김형정,김형균,신사고수학콘텐츠연구회 쎈

16. 그림과 같이 $\overline{AB} = 1$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle C$를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. $\angle A = \theta$일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.



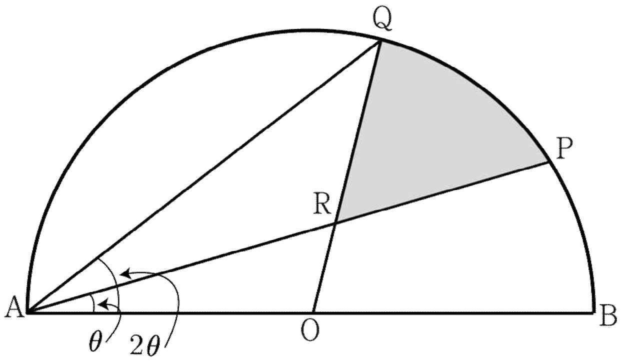
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 20

17. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QAB=2\theta$가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OQ와 선분 AP가 만나는 점을 R라 하자. 호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2

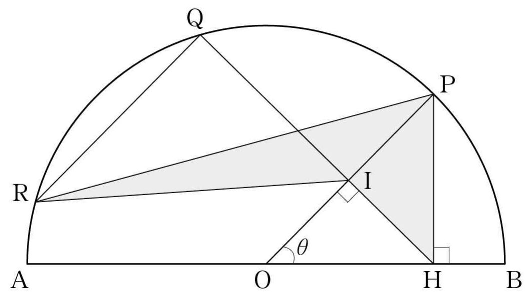
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 19

18. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H를 지나고 선분 OP에 수직인 직선이 선분 OP, 호 AB와 만나는 점을 각각 I, Q라 하자.

점 Q를 지나고 직선 OP에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자. $\angle POB=\theta$일 때, 두 삼각형 RIP, IHP의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ③ $\sqrt{2}-1$

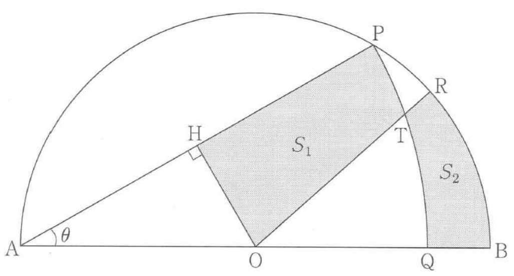
④ $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 28

19. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AP}}$인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.
호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3 : 7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.
세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 할 때,

$\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{S_1 - S_2}{\overline{\mathrm{OH}}} = a$이다. $50a$의 값을 구하시오.

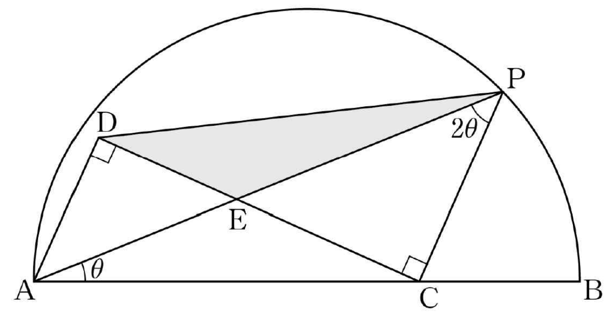
$\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 21

20. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB위의 점 P와 선분 AB위의 점 C에 대하여 $\angle\mathrm{PAC}=\theta$일 때, $\angle\mathrm{APC}=2\theta$이다.

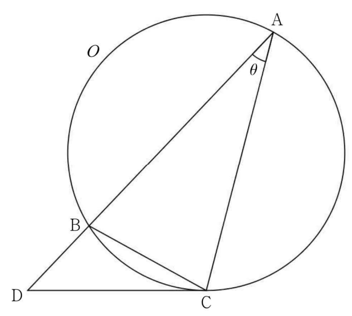
$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{PCD}=\dfrac{\pi}{2}$인 점 D에 대하여 두 선분 AP와 CD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 DEP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$



① $\dfrac{5}{9}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{7}{9}$
④ $\dfrac{8}{9}$ ⑤ 1

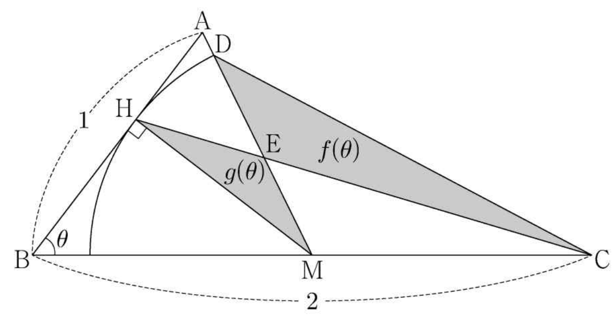
[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=4$인 이등변삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 C를 지나고 원 O에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 D라 하자. $\angle CAB=\theta$라 할 때, 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$)



[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 28

22. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



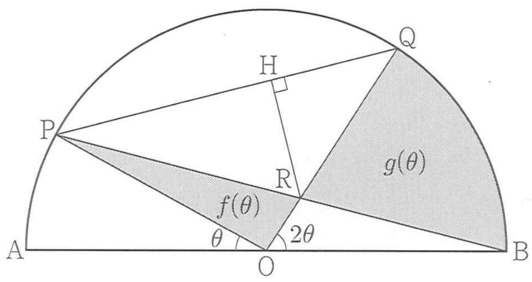
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 28

23. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA=\theta$, $\angle QOB=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}} = \frac{q}{p}$$

이다. $p+q$의 값을 구하시오.

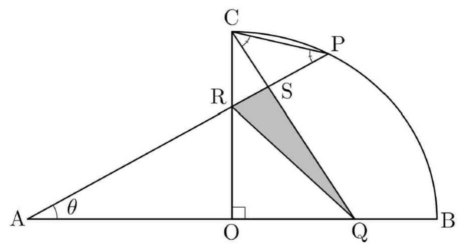
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 28

24. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OB를 반지름으로 하는 사분원 OBC가 있다.
호 BC위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OB위의 점 Q가 $\angle APC=\angle PCQ$를 만족시킨다. 선분 AP가 두 선분 CO, CQ와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 RQS의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

$\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

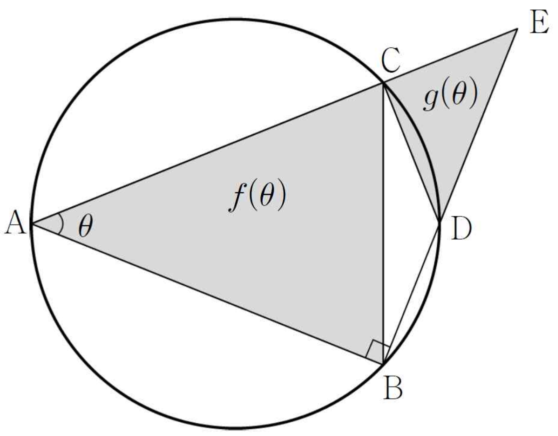


① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 28

25. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원에 내접하고, $\overline{AB}=\overline{AC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC=\theta$라 하고, 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D, 직선 BD와 직선 AC가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CDE의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

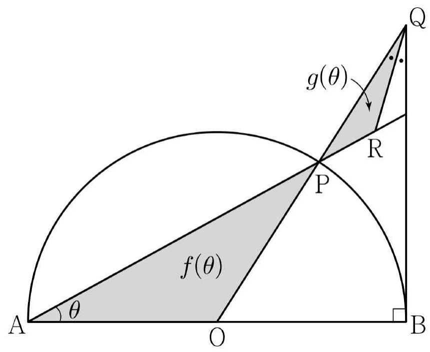
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 28

26. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자.

$\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

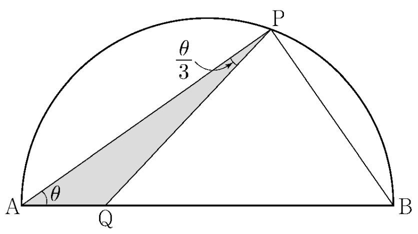


① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 28

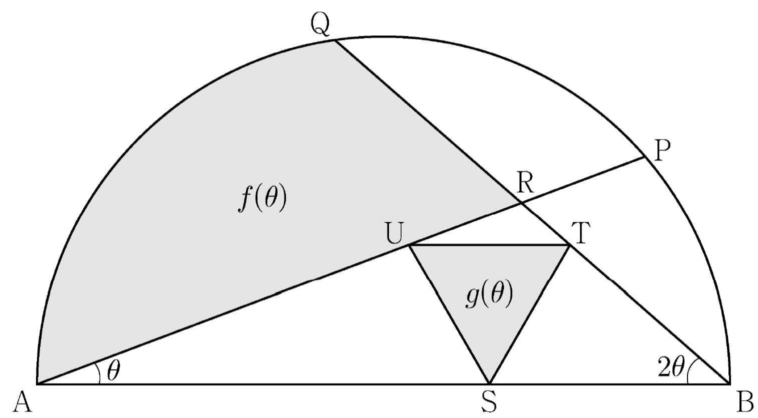
27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있고, 선분 AB 위에 점 Q가 있다. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$이고 $\angle \mathrm{APQ}=\dfrac{\theta}{3}$일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 PB의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+}\dfrac{S(\theta)}{l(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)



① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{12}$

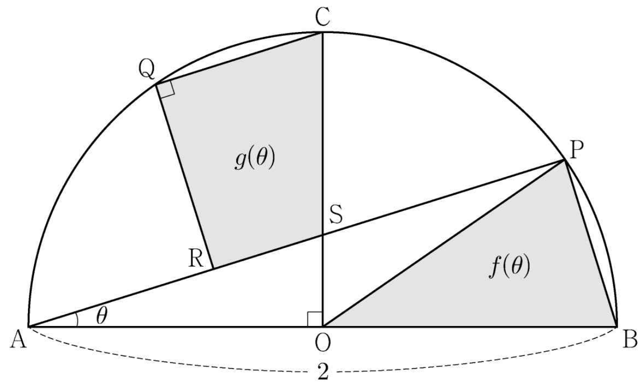
[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 29

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$, $\angle \mathrm{QBA}=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)}=\dfrac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 28

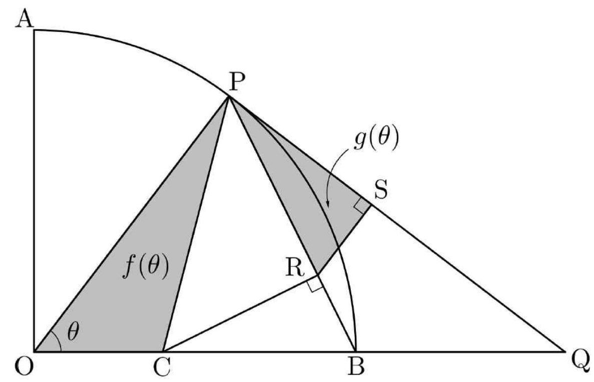
29. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle \mathrm{AOC}=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QC}}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle \mathrm{CQR}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

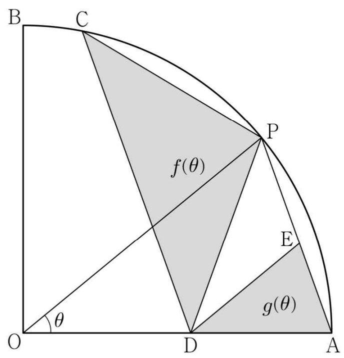
[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 29

30. 그림과 같이 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OB를 2 : 3으로 내분하는 점을 C라 하자. 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OB의 교점을 Q라 하고, 점 C에서 선분 PB에 내린 수선의 발을 R, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 S라 하자. $\angle \mathrm{POB}=\theta$일 때, 삼각형 OCP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $80\times \lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 28

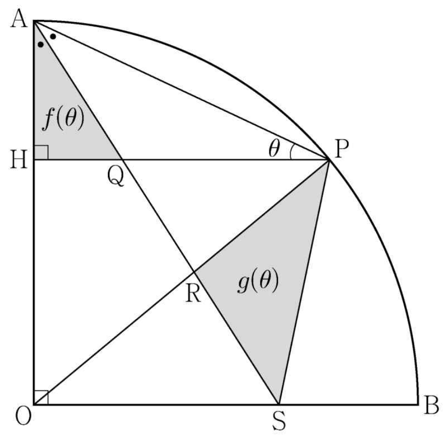
31. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 29

32. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle OAP$를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle APH=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)}=k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

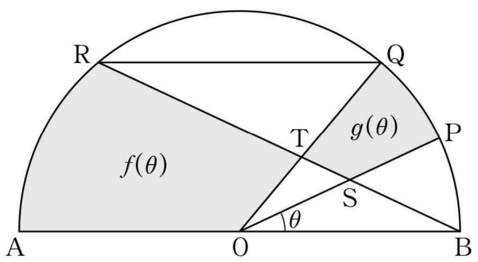


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 29

33. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고 호 AB 위에 두 점 P, Q를

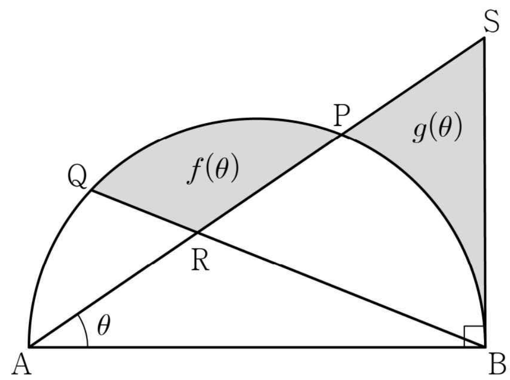
$\angle\mathrm{BOP}=\theta,\quad \angle\mathrm{BOQ}=2\theta$

가 되도록 잡는다. 점 Q를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하고, 선분 BR가 두 선분 OP, OQ와 만나는 점을 각각 S, T라 하자.
세 선분 AO, OT, TR와 호 RA로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, 세 선분 QT, TS, SP와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 29

34. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle\mathrm{BAP}=\theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



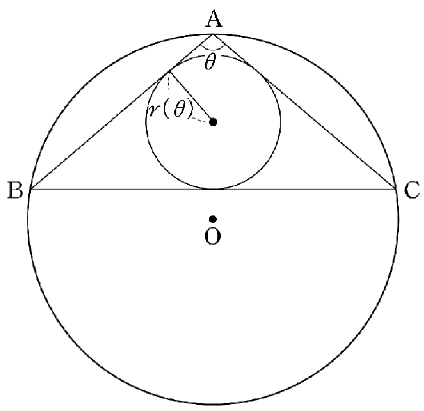
06 미적 05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

07 활용5 (두 개 이상의 원 또는 부채꼴의 관계)

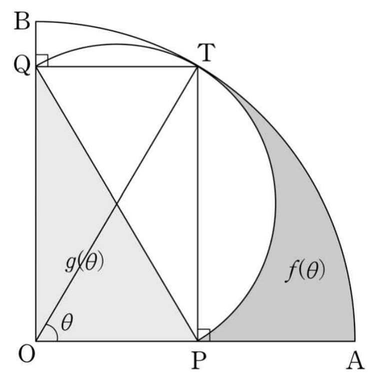
[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 미분과 적분 30

35. 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 점 A가 있다. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 원 O 위의 두 점 B, C를 $\angle \mathrm{BAC}=\theta$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$가 되도록 잡는다. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to \pi-} \frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 미분과 적분 30

36. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 T에서 선분 OA와 선분 OB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고 $\angle \mathrm{TOP}=\theta$라 하자. 점 P와 점 Q를 지름의 양끝으로 하고 점 T를 지나는 반원을 C라 할 때, 반원 C의 호 TP, 선분 PA, 부채꼴 OAT의 호 AT로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta+f(\theta)}{g(\theta)}=a$일 때, $100a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

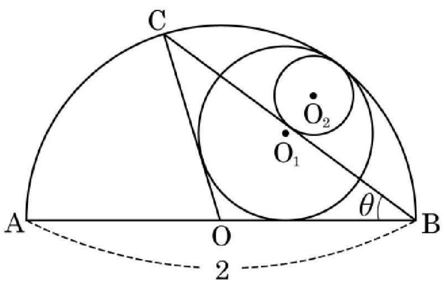


[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 03월 27

37. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점 O와 반원 위를 움직이는 점 C에 대하여 부채꼴 OBC에 내접하는 원을 O_1, 현 BC와 호 BC로 둘러싸인 부분에 내접하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 원을 O_2라 하자. $\angle ABC=\theta$라 하고 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 할 때,

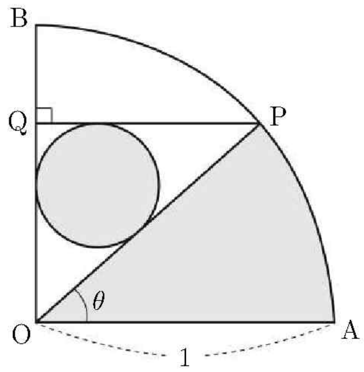
$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2} = \frac{q}{p}$$

이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 11월 19

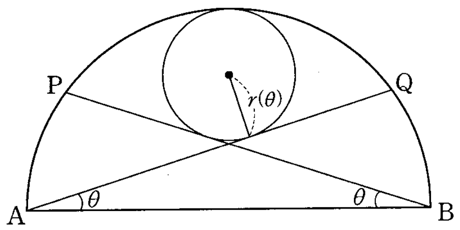
38. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 Q라 하고 $\angle POA=\theta$라 하자. 부채꼴 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ에 내접하는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \cdot f(\theta)}$의 값은? $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$
④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

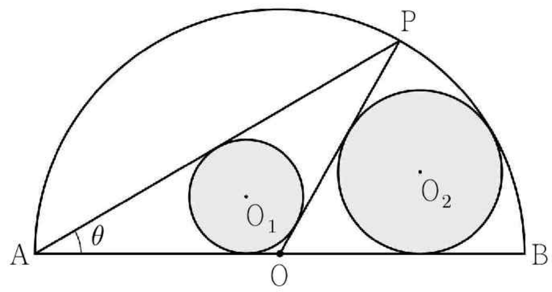
[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 29

39. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{ABP} = \angle \mathrm{BAQ} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$가 되도록 잡는다. 두 선분 AQ, BP와 호 PQ에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta} = p\sqrt{2} + q$이다. $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)



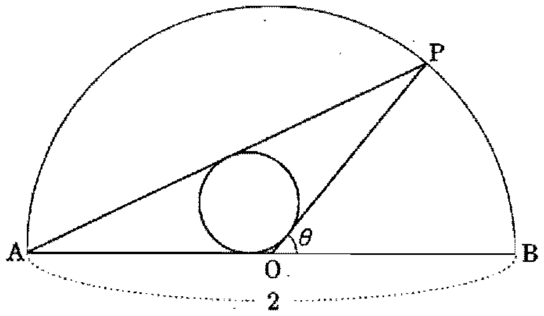
[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 11월 27

40. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 AOP에 내접하는 원을 O_1, 부채꼴 OBP에 내접하는 원을 O_2라 하자. $\angle \mathrm{PAB} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$일 때, 원 O_1의 넓이를 $f(\theta)$, 원 O_2의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. 이때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값을 구하시오.



[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 03월 20

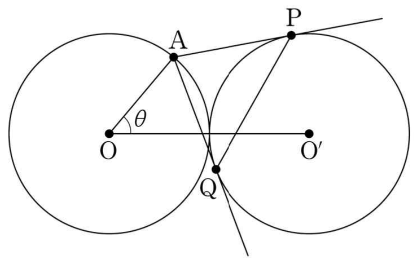
41. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle POB=\theta$일 때, 삼각형 PAO에 내접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$이다.)



① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{8}$
④ $\frac{\pi}{16}$ ⑤ $\frac{\pi}{32}$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 21

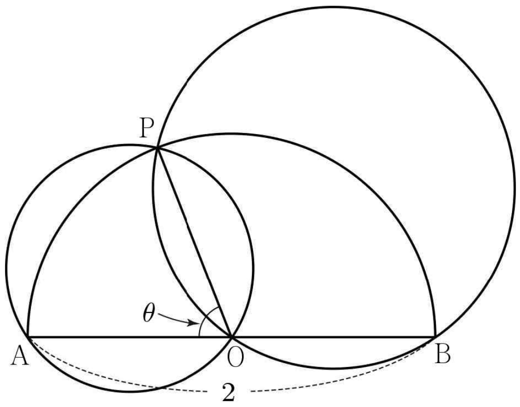
42. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O'이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A에서 원 O'에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\angle AOO'=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{PQ}}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 19

43. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{AOP}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$일 때, 세 점 A, O, P를 지나는 원의 넓이를 $f(\theta)$, 세 점 B, O, P를 지나는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)-f(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$의 값은?



① π ② $\frac{2\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$

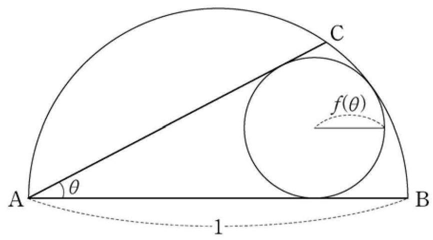
④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}$

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 29

44. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\alpha$$

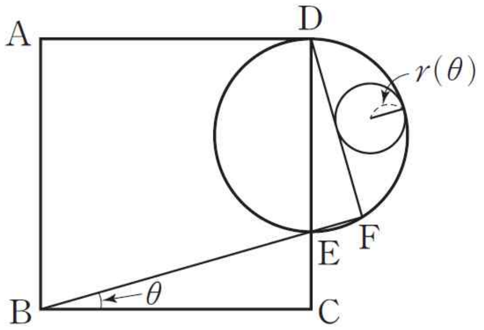
이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 20

45. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC=\theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$　② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$

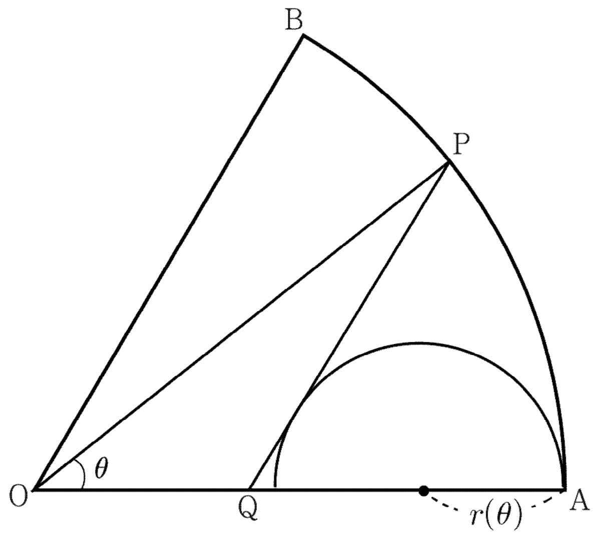
③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$　④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$

⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

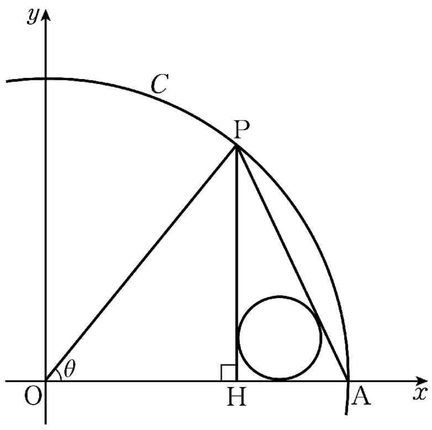
46. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 Q라 하고 $\angle AOP=\theta$라 하자. 점 A를 지름의 한 끝점으로 하고 지름이 선분 AQ 위에 있으며 선분 PQ에 접하는 반원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta}=a+b\sqrt{3}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, a, b는 유리수이다.)



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 21

47. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C가 x축의 양의 방향과 만나는 점을 A, 원 C 위에 있고 제 1사분면에 있는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\angle\mathrm{POA}=\theta$라 하자. 삼각형 APH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

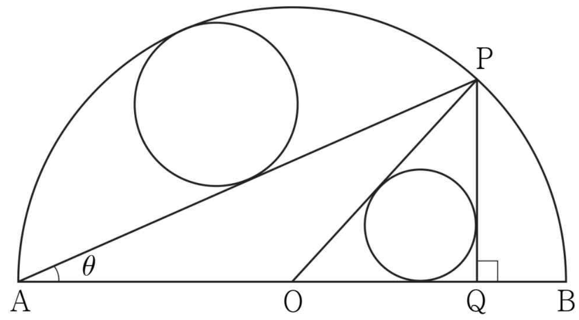


① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 29

48. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 선분 AP와 호 AP에 동시에 접하는 가장 큰 원의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 POQ의 내접원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.

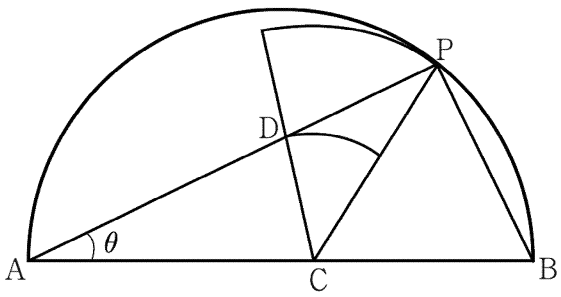
$\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times T(\theta)}{S\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 21

49. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP}=\overline{BC}$가 되도록 선분 AB 위의 점 C를 잡고, $\overline{AC}=\overline{AD}$가 되도록 선분 AP 위의 점 D를 잡는다.
$\angle PAB=\theta$에 대하여 선분 CD를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle PCD$인 부채꼴의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 CP를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle PCD$인 부채꼴의 넓이를 $T(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{T(\theta)-S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\angle PCD$는 예각이다.)

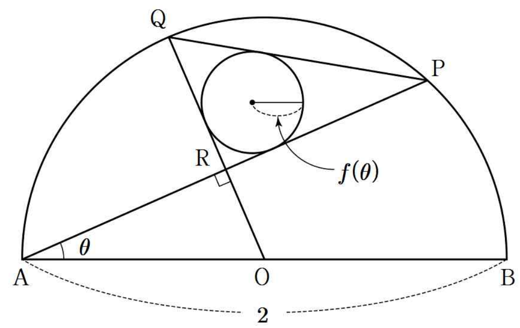


① $\frac{\pi}{16}$ ② $\frac{\pi}{8}$ ③ $\frac{3}{16}\pi$

④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}\pi$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 21

50. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하고, 점 O를 지나고 선분 AP에 수직인 직선이 호 AP와 만나는 점을 Q, 선분 AP와 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 PQR에 내접하는 원의 반지름을 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{f(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



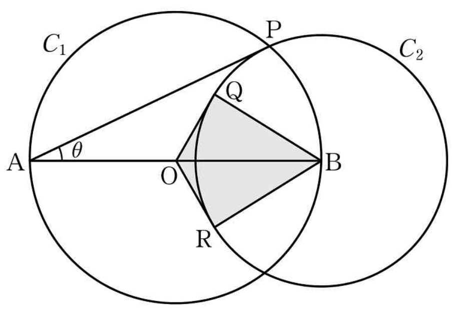
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 16

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 16

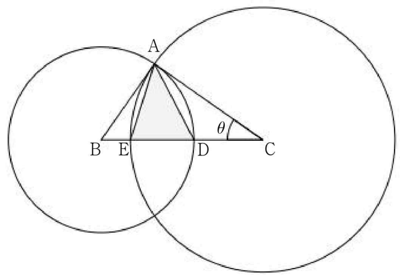
51. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1과 점 B를 중심으로 하고 원 C_1 위의 점 P를 지나는 원 C_2가 있다. 원 C_1의 중심 O에서 원 C_2에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$일 때, 사각형 ORBQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$



① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ 1
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

52. 그림과 같이 선분 BC를 빗변으로 하고, $\overline{\mathrm{BC}}=8$인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}$인 원이 선분 BC와 만나는 점을 D, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AC}}$인 원이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\angle\mathrm{ACB}=\theta$라 할 때, 삼각형 AED의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

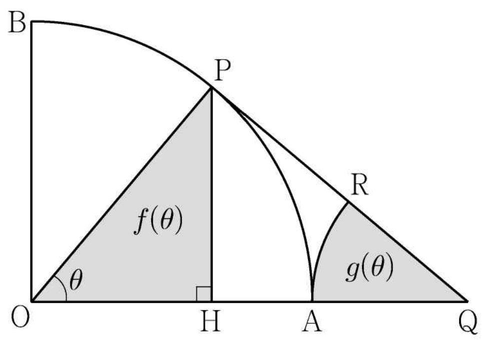


① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 20

53. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OA의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이가 삼각형 OHP의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 QRA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)}$의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



① $\frac{\sqrt{\pi}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$

④ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ⑤ $\sqrt{\pi}$

06 미적

05 삼각함수의 미분

03 삼각함수의 도함수

04 조건해석2 (극한식의 해석)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

54. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)\sin x$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x^2} = 0$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{x} = 6$

① 11 ② 12 ③ 13

④ 14 ⑤ 15

06 미적 05 삼각함수의 미분

03 삼각함수의 도함수

06 조건해석4 (미분가능성)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 04월 30

55. 함수 $f(x)=x+\cos x+\frac{\pi}{4}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=|f(x)-k|$ (k는 $0<k<6\pi$ 인 상수)

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}\pi$ 라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

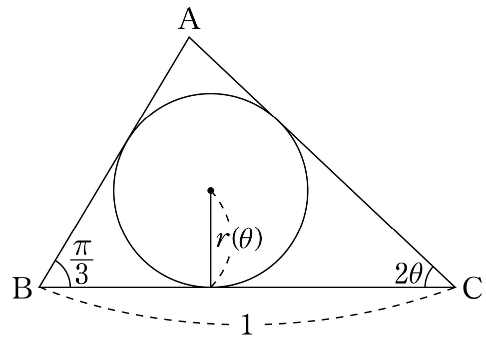
06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

04 삼각함수4 (함수 구하기)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 12

56. 그림과 같이 $\overline{BC}=1$, $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$, $\angle ACB=2\theta$ 인 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $h(\theta)=\frac{r(\theta)}{\tan\theta}$ 일 때, $h'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$)



① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

12 로그함수4 (함수 구하기)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 21

57. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x)=\ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=3,\ \lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은?

① 57 ② 55 ③ 53

④ 51 ⑤ 49

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

13 초월함수의 미분가능성

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

58. 함수 $f(x)=\begin{cases}1+\sin x & (x\le0)\\ -1+\sin x & (x>0)\end{cases}$에 대하여

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)f(-x)=-1$

ㄴ. 함수 $f(f(x))$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[준킬러][미적] 4미분법2(빠른 정답)

준킬러미적 2023.01.06

1. [정답] 65
2. [정답] 36
3. [정답] 32
4. [정답] 41
5. [정답] ③

6. [정답] ②
7. [정답] ④
8. [정답] 15
9. [정답] 18
10. [정답] ①

11. [정답] ⑤
12. [정답] ①
13. [정답] **9**
14. [정답] **20**
15. [정답] ②

16. [정답] ②
17. [정답] ⑤
18. [정답] ②
19. [정답] **40**
20. [정답] ④

21. [정답] 8
22. [정답] 15
23. [정답] 23
24. [정답] ④
25. [정답] ②

26. [정답] ①
27. [정답] ③
28. [정답] 11
29. [정답] ②
30. [정답] 49

31. [정답] ④
32. [정답] 50
33. [정답] 20
34. [정답] 4
35. [정답] 17
36. [정답] 50
37. [정답] 17
38. [정답] ②
39. [정답] 8
40. [정답] 4

41. [정답] ④
42. [정답] ③
43. [정답] ①
44. [정답] 25
45. [정답] ④

46. [정답] **5**
47. [정답] ④
48. [정답] 16
49. [정답] ②
50. [정답] ①

51. [정답] ①
52. [정답] ⑤
53. [정답] ④
54. [정답] ②
55. [정답] **37**

56. [정답] ②
57. [정답] ④
58. [정답] ②

[준킬러][미적] 4미분법2(해설)

준킬러미적 2023.01.06

1) [정답] 65

[해설]

$\overline{AS}=\cos\theta$이므로 삼각형 ASO의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta$이다.

$\overline{AP}=2\cos\theta$이므로 $\overline{PQ}=2\cos\theta\cdot\sin\theta$ 이고

$$\overline{PR}=\overline{PQ}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$
$$=2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin2\theta$$

이다.

따라서 삼각형 PQR의 넓이 $g(\theta)$는

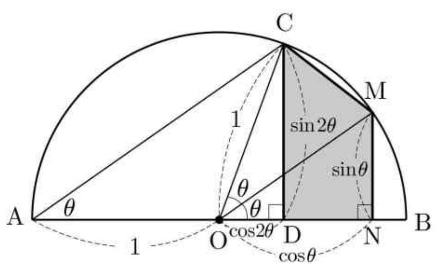
$$g(\theta)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$$
$$=2\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\sin2\theta\cdot\cos2\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\theta^2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\sin2\theta\cdot\cos2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos\theta\cdot\cos2\theta}\cdot\frac{\theta^2}{\sin\theta\cdot\sin2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{4}\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{2\theta}{\sin2\theta}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{8}$$

따라서 $p^2+q^2=64+1=65$

2) [정답] 36

[해설]



반원의 중심을 O라 하면

$\angle COD=2\theta$, $\angle MON=\theta$이고

반지름의 길이가 1이므로

$\overline{CD}=\sin2\theta$, $\overline{MN}=\sin\theta$

$\overline{DN}=\overline{ON}-\overline{OD}=\cos\theta-\cos2\theta$

$$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{CD}+\overline{MN})\overline{DN}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin2\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\cos2\theta)$$
$$=\frac{(\sin2\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta-\cos^22\theta)}{2(\cos\theta+\cos2\theta)}$$
$$=\frac{(\sin2\theta+\sin\theta)(\sin^22\theta-\sin^2\theta)}{2(\cos\theta+\cos2\theta)}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\cdot2+\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left\{\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^2\cdot4-\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\right\}$$
$$\cdot\frac{1}{2(\cos\theta+\cos2\theta)}$$
$$=(1\cdot2+1)(1^2\cdot4-1^2)\cdot\frac{1}{2(1+1)}=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ a=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ 16a=36$$

3) [정답] 32

[해설]

삼각형 OPA가 $\overline{OA}=\overline{OP}$인 이등변삼각형이므로

$$\angle PAO=\angle APO=\theta,\ \angle AOP=\pi-2\theta$$

삼각형 AOQ에서 $\angle AOQ=2\angle AOP$이므로

$\angle AOQ=2\pi-4\theta$이고 $\overline{OA}=\overline{OQ}=4$

$$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}\times4^2\times\sin(2\pi-4\theta)$$
$$=8\sin(2\pi-4\theta)$$

$\theta-\frac{\pi}{4}=t$라 하면, $\theta\to\frac{\pi}{4}+$일 때, $t\to+$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}+}\frac{S(\theta)}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}+}\frac{8\sin(2\pi-4\theta)}{\theta-\frac{\pi}{4}}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{8\sin(\pi-4t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{8\sin4t}{t}=32$$

따라서 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}+}\frac{S(\theta)}{\theta-\frac{\pi}{4}}=32$

4) [정답] 41

[해설]

$\triangle BCP$에서 $\overline{PB}=\tan\theta$, $\overline{PC}=\frac{1}{\cos\theta}$

$\triangle BCP$의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하고, 삼각형의 넓이를 이용하면

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan\theta = \frac{1}{2}r\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)$

$r = \dfrac{\tan\theta}{1+\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta+1}$

$\therefore\ g(\theta) = \dfrac{\pi\sin^2\theta}{(\cos\theta+\sin\theta+1)^2}$

$\triangle$CDQ에서 $\overline{\mathrm{QD}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AQ}} = 1-\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

또한, $\overline{\mathrm{PB}} = \tan\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = 1-\tan\theta$

$\therefore\ f(\theta) = \frac{1}{2}(1-\tan\theta)\left(1-\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$

$= \frac{1}{2}(1-\tan\theta)\cdot\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$= \dfrac{\tan\theta(1-\tan\theta)}{1+\tan\theta}$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to +}\dfrac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}$

$= \lim\limits_{\theta\to +}\dfrac{\pi\sin^2\theta}{(\cos\theta+\sin\theta+1)^2}\cdot\dfrac{1+\tan\theta}{\theta\tan\theta(1-\tan\theta)}$

$= \lim\limits_{\theta\to +}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\dfrac{\theta}{\tan\theta}\cdot\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\times\dfrac{\pi}{(\cos\theta+\sin\theta+1)^2}$

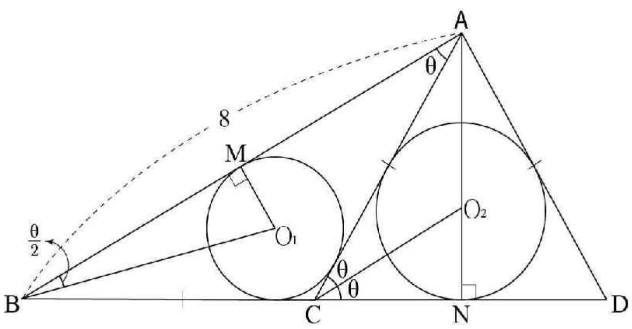
$= 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\pi$

$\therefore\ p=4,\ q=1$

$\therefore\ 10p+q=41$

5) [정답] ③

[해설]



삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 하자.

삼각형 $\mathrm{BO_1M}$에서 $r_1 = 4\tan\frac{\theta}{2}$

삼각형 BCM에서 $\overline{\mathrm{BC}} = \dfrac{4}{\cos\theta} = \overline{\mathrm{AC}}$

삼각형 ACN에서 $\overline{\mathrm{CN}} = \dfrac{4}{\cos\theta}\times\cos 2\theta$

삼각형 $\mathrm{CNO_2}$에서

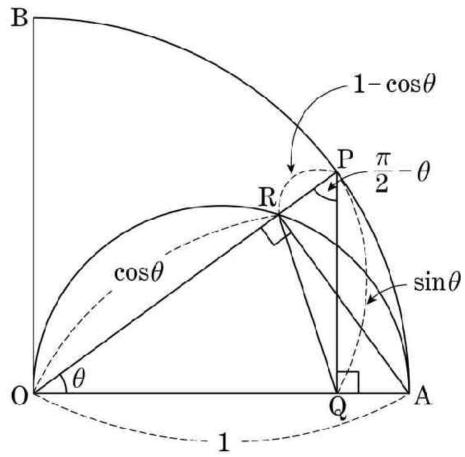
$r_2 = \overline{\mathrm{CN}}\tan\theta = \dfrac{4\tan\theta\cos 2\theta}{\cos\theta}$

따라서

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{r_1r_2}{\theta^2} = \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{16\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta\cos 2\theta}{\theta^2\cos\theta} = 8$

6) [정답] ②

[해설]



$\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OR}} = 1-\cos\theta$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sin\theta$

$\angle\mathrm{QPR} = \frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$S(\theta) = \frac{1}{2}\times(1-\cos\theta)\times\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$= \dfrac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$

$= \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)} = \frac{1}{4}$

[다른 풀이]
(삼각형 PRQ의 넓이)
=(삼각형 POQ의 넓이)-(삼각형 ROQ의 넓이)
이므로

$S(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\cos 2\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$

$= \lim\limits_{\theta\to +0}\dfrac{\sin 3\theta^3(1+\cos\theta)}{2} = \frac{1}{4}$

7) [정답] ④

[해설]

내접원과 선분 AC의 접점을 M이라 하면

$$\overline{AM}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

이므로

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\frac{\overline{AM}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

또한, 선분 AD의 연장선에 점 C에서 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH}=\overline{BC}\times\sin2\theta=\frac{\sin2\theta}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore\ \overline{CD}=\frac{\overline{CH}}{\sin3\theta}=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}\times\sin\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\frac{\theta}{2}\sin3\theta\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{4}{3}\right\}$$

$$=1^2\times1^2\times1\times1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

[다른 풀이]

내접원과 선분 AB의 접점을 E라 하면

$$\overline{AE}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\overline{BE}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\tan\theta$$

$$\therefore\ \overline{AB}=\overline{BC}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta$$

또한,

$$\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{BD}$$
$$=\overline{BC}:\overline{BD}$$

이므로

$$\overline{BC}\times\overline{CD}=\overline{AC}\times\overline{BD}$$

이때,

$$\overline{AC}=2\overline{AE}=\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

이고 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\theta}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin3\theta}$$

$$\therefore\ \overline{BD}=\sin\theta\left(\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin3\theta}\right)$$

$$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{CD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}\times\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin3\theta}\times\sin^2\theta$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin3\theta}\times\sin^2\theta$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\times\frac{\sin^2\theta}{\sin3\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\{\theta\times S(\theta)\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{2\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\cos\frac{\theta}{2}\times\left(2\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\frac{\theta}{2}+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}\times\frac{1}{3}\right\}$$

$$=2\times1\times1\times(2\times1\times1\times1+0)\times1\times1\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{4}{3}$$

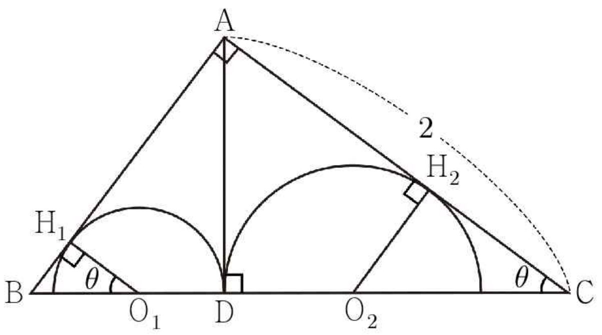
8) [정답] 15

[해설]

그림과 같이 삼각형 ABD의 내부의 반원의 중심을 O_1, 반지름의 길이를 r라 하고, 삼각형 ADC의 내부의 반원의 중심을 O_2, 반지름의 길이를 R라 하자.

두 반원이 두 선분 AB, AC와 접하는 점을 각각 H_1, H_2라

하자.



삼각형 ADC에서

$\overline{AH_2}=\overline{AD}=2\sin\theta$, $\overline{CH_2}=2(1-\sin\theta)$이므로

$R=2\tan\theta(1-\sin\theta)$

$\therefore\ T(\theta)=2\pi(1-\sin\theta)^2\tan^2\theta$

삼각형 ABD에서

$\overline{AH_1}=\overline{AD}=2\sin\theta$, $\overline{AB}=2\tan\theta$,

$\overline{BH_1}=2(\tan\theta-\sin\theta)$

$\angle BO_1H_1=\theta$이므로

$r=\dfrac{2(\tan\theta-\sin\theta)}{\tan\theta}=2(1-\cos\theta)$

$\therefore\ S(\theta)=2\pi(1-\cos\theta)^2$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2\times T(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\pi(1-\cos\theta)^2}{\theta^2\times2\pi(1-\sin^2)^2\tan\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^2(1-\sin\theta)^2\tan^2\theta(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin4}{\theta^4}\times\frac{\theta^2}{\tan^2\theta}\times\frac{1}{(1-\sin\theta)^2(1+\cos\theta)^2}\right\}$$

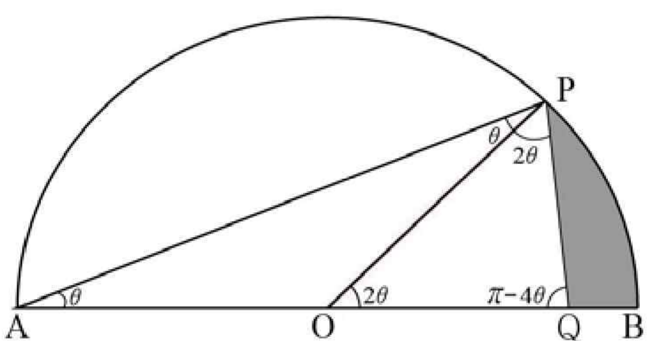
$$=1\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

따라서 $60\alpha=15$

9) [정답] 18

[해설]

반원의 중심을 O라 하자.



$\overline{OP}=6$, $\angle OAP=\angle OPA=\theta$

$\angle POQ=\angle OPQ=2\theta$, $\angle OQP=\pi-4\theta$

삼각형 OQP에서 $\dfrac{\overline{PQ}}{\sin2\theta}=\dfrac{6}{\sin(\pi-4\theta)}$

$\overline{PQ}=\dfrac{6\sin2\theta}{\sin4\theta}=\dfrac{6\sin2\theta}{2\sin2\theta\cos2\theta}=\dfrac{3}{\cos2\theta}$

삼각형 OQP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times6\times\dfrac{3}{\cos2\theta}\times\sin2\theta=\dfrac{9\sin2\theta}{\cos2\theta}$

$S(\theta)=$(부채꼴 OBP의 넓이)

$-$(삼각형 OQP의 넓이)

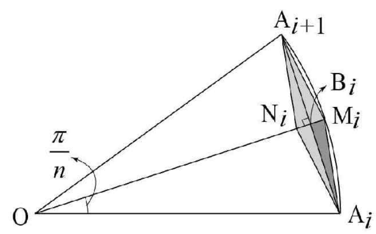
$$=\frac{1}{2}\times6^2\times2\theta-\frac{9\sin2\theta}{\cos2\theta}$$

$$=36\theta-\frac{9\sin2\theta}{\cos2\theta}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{36\theta-\dfrac{9\sin2\theta}{\cos2\theta}}{\theta}=18$

10) [정답] ①

[해설]



선분 M_iN_i의 중점을 B_i라 하면

$\angle A_iOM_i=\dfrac{\pi}{n}$이므로

$\overline{A_iB_i}=\sin\dfrac{\pi}{n}$, $\overline{B_iM_i}=1-\overline{OB_i}=1-\cos\dfrac{\pi}{n}$

$A_iM_iA_{i+1}N_i=4\times\triangle A_iM_iB_i$

$$=4\times\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{n}\times\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$S_n=n\times\square A_iM_iA_{i+1}N_i=2n\sin\dfrac{\pi}{n}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$

$n^2\times S_n=2n^3\sin\dfrac{\pi}{n}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$

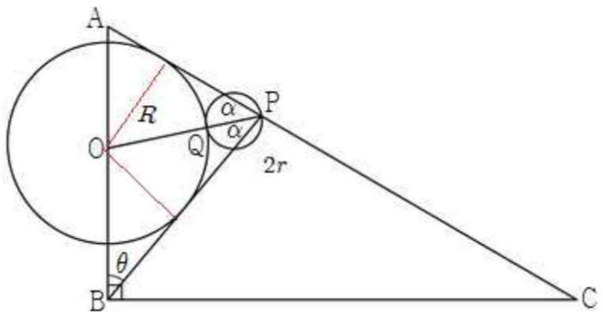
$$=2\pi^3\times\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi^3}{n^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$=2\pi^3\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}\times\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}\right\}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2\times S_n)=\pi^3$

11) [정답] ⑤

[해설]



두 원의 반지름의 길이를 각각 $R(\theta)$, $r(\theta)(R(\theta)>r(\theta))$이라 하자.

$\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}R(\theta)+\dfrac{R(\theta)}{\sin\theta}=2$

$R(\theta)=\dfrac{2\sqrt{3}\sin\theta}{2\sin\theta+\sqrt{3}}$

$\therefore\ f(\theta)=\pi R(\theta)^2$

$\angle APO=\angle BPO=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}$이므로

$\overline{OP}=\dfrac{R(\theta)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}$

$\overline{PQ}=\overline{OP}-\overline{OQ}$

$=\dfrac{R(\theta)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}-R(\theta)=\left(\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}\right)R(\theta)$

$r(\theta)=\dfrac{\overline{PQ}}{2}=\left(\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}\right)R(\theta)$

$\therefore\ g(\theta)=\pi\left(\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}\right)^2R(\theta)^2$

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to0+}\pi\dfrac{R(\theta)^2+r(\theta)^2}{\theta^2}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\pi\dfrac{R(\theta)^2}{\theta^2}\left\{1+\left(\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}\right)^2\right\}$

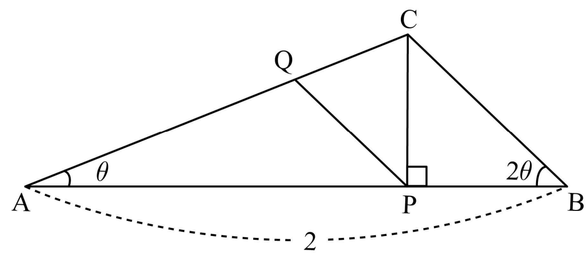
$=\lim\limits_{\theta\to0+}\pi\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sin\theta+\sqrt{3}}\right)^2\left\{1+\left(\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}\right)^2\right\}$

$=\pi\times1^2\times2^2\times\left\{1+\left(\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}$

$=\dfrac{19-4\sqrt{3}}{3}\pi$

12) [정답] ①

[해설]



선분 AC가 원의 지름이므로 $\angle APC=\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\overline{AP}=a$, $\overline{AQ}=b$라 하자.

두 삼각형 APC와 CPB는 직각삼각형이므로

$a\tan\theta=\overline{CP}=(2-a)\tan2\theta$

$a=\dfrac{2\tan2\theta}{\tan\theta+\tan2\theta}$

삼각형 ABC와 삼각형 APQ는 닮음이므로

$\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$

$a:2=b:a\sec\theta$

$b=\dfrac{1}{2}a^2\sec\theta$

삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때,

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{1}{2}a^2\sec\theta\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{4}\times a^3\times\tan\theta$

$=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{2\tan2\theta}{\tan\theta+\tan2\theta}\right)^3\times\tan\theta$

따라서

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0+}\left\{\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{\dfrac{2\tan2\theta}{2\theta}\times2}{\dfrac{\tan\theta}{\theta}+\dfrac{\tan2\theta}{2\theta}\times2}\right)^3\times\dfrac{\tan\theta}{\theta}\right\}=\dfrac{16}{27}$

13) [정답] 9

[해설]

삼각형 BPQ와 삼각형 BCQ는 서로 합동이므로

$\angle QBC=\dfrac{\theta}{2}$이고 $\overline{PQ}=\overline{QC}=3\tan\dfrac{\theta}{2}$

직각삼각형 RPQ에서 $\angle RQP=\theta$이므로

$\overline{PR}=\overline{PQ}\tan\theta=3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$$
$$=\frac{1}{2}\times 3\tan\frac{\theta}{2}\times 3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta$$
$$=\frac{9}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{8f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{36\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^3}=9$$

14) [정답] 20

[해설]

$\overline{OD}=k(k>0)$으로 놓으면

(i) $\overline{GD}=k\tan\frac{\theta}{3}$이므로

$$f(\theta)=\left(k\tan\frac{\theta}{3}\right)^2=k^2\tan^2\frac{\theta}{3}$$

(ii) $\overline{OP}=k\cos\theta$, $\overline{PQ}=\overline{OP}\tan\frac{2\theta}{3}=k\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times k\cos\theta\times k\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}$$
$$=\frac{k^2}{2}\times\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{k^2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\times\frac{k^2}{2}\times\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\times\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{9\times\frac{\theta^2}{9}}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{\cos^2\theta}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{2\theta}{3}}{\tan\frac{2\theta}{3}}$$
$$=\frac{2}{9}\times 1\times\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$$

따라서 $k=\frac{1}{3}$이므로 $60k=60\times\frac{1}{3}=20$

15) [정답] ②

[해설]

$\angle BPA=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle QBR=\alpha$라 하면

$$3\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta,\quad \alpha=\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}$$

$\overline{BP}=\sin\theta$이므로

$\overline{PQ}=\sin\theta\tan 2\alpha$

$\overline{PR}=\sin\theta\tan\alpha$

이다. 따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PQ}-\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PR}$$
$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta(\tan 2\alpha-\tan\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\left\{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2=1$$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

16) [정답] ②

[해설]

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$, $\angle A=\theta$이므로

$\overline{AC}=\sec\theta$, $\overline{BC}=\tan\theta$

이때 $\overline{AD}=k$라 하면 선분 CD가 $\angle C$를 이등분하므로

$\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{BC}$

$k:(1-k)=\sec\theta:\tan\theta$,

$$k=\frac{\sec\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{1}{1+\sin\theta}$$

즉, $\overline{AD}=\frac{1}{1+\sin\theta}$ 이므로

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\times\theta=\dfrac{\theta}{2(1+\sin\theta)^2}$

한편 $\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AD}}$에서

$\overline{\mathrm{CE}}=\sec\theta-\dfrac{1}{1+\sin\theta}=\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

이므로

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin(\angle\mathrm{C})$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}\times\tan\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{(1+\sin\theta-\cos\theta)\sin\theta}{2(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left\{\dfrac{\theta}{2(1+\sin\theta)^2}\right\}^2}{\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)\sin\theta}{2(1+\sin\theta)\cos\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}\right\}$$

이때

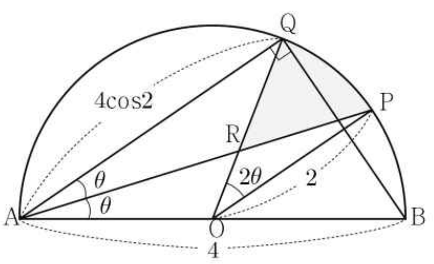
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\theta}+\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}}$$
$$=\frac{1}{1+0}=1$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{(1+0)^3}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

17) [정답] ⑤

[해설]



부채꼴 OPQ는 반지름의 길이가 2이고
중심각의 크기가 2θ이므로 부채꼴 OPQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2^2\times2\theta=4\theta$

직각삼각형 ABQ에서 $\overline{\mathrm{AQ}}=4\cos2\theta$

삼각형 AOQ에서 $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OQ}}=2$, $\overline{\mathrm{RQ}}=2-\overline{\mathrm{OR}}$
선분 AR는 각 QAO의 이등분선이므로
$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{OR}}:\overline{\mathrm{RQ}}$

$2:4\cos2\theta=\overline{\mathrm{OR}}:(2-\overline{\mathrm{OR}})$

$\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{2}{2\cos2\theta+1}$

삼각형 OPR의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin2\theta=\dfrac{2\sin2\theta}{2\cos2\theta+1}$

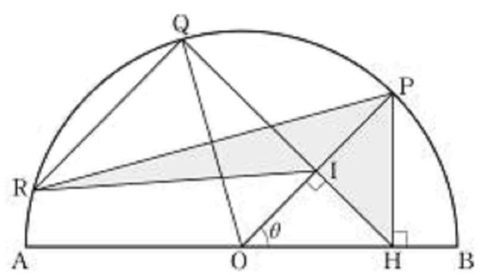
호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분은
부채꼴 OPQ에서 삼각형 OPR를 제외한 부분이므로

$S(\theta)=4\theta-\dfrac{2\sin2\theta}{2\cos2\theta+1}$

$$\therefore\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left\{4-\frac{2\sin2\theta}{\theta(2\cos2\theta+1)}\right\}$$
$$=4-4\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

18) [정답] ②

[해설]



$\angle\mathrm{OHP}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\theta=\cos\theta$

$\angle\mathrm{HIO}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{OH}}\cos\theta=\cos^2\theta$

$\overline{\mathrm{IH}}=\overline{\mathrm{OH}}\sin\theta=\cos\theta\sin\theta$

$\overline{\mathrm{IP}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OI}}$

$= 1 - \cos^2\theta$

$= \sin^2\theta$

삼각형 IHP의 넓이 $T(\theta)$는

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{IH} \times \overline{IP}$$
$$= \frac{1}{2} \times (\cos\theta\sin\theta) \times \sin^2\theta$$
$$= \frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta$$

직선 OP와 직선 RQ가 평행이므로 삼각형 RIP의 높이는 $\overline{QI}$이다.

$\overline{OQ} = 1$, $\angle OIQ = \frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 OIQ에서

$$\overline{QI}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OI}^2$$
$$\overline{QI} = \sqrt{1 - (\cos^2\theta)^2}$$
$$= \sqrt{(1 - \cos^2\theta)(1 + \cos^2\theta)}$$
$$= \sin\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

삼각형 RIP의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{IP} \times \overline{QI}$$
$$= \frac{1}{2} \times \sin^2\theta \times \left(\sin\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sin^3\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}$$

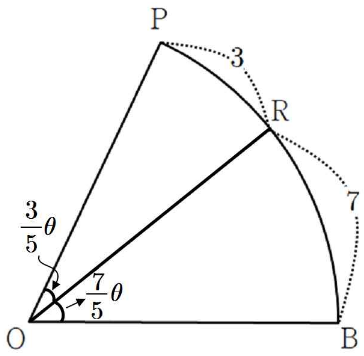
$$S(\theta) - T(\theta) = \frac{1}{2}\sin^3\theta\left(\sqrt{1 + \cos^2\theta} - \cos\theta\right)$$

따라서

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^3}$$
$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\sin^3\theta\left(\sqrt{1 + \cos^2\theta} - \cos\theta\right)}{\theta^3}$$
$$= \lim_{\theta \to 0+} \left\{\frac{1}{2} \times \frac{\sin^3\theta}{\theta^3} \times \left(\sqrt{1 + \cos^2\theta} - \cos\theta\right)\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

19) [정답] 40

[해설]



위 그림과 같이 부채꼴의 호의 길이와 중심각은 비례하므로 $\angle BOR = \frac{7}{10} \cdot 2\theta = \frac{7}{5}\theta$에서 부채꼴 OBR의 넓이는

$$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{7}{5}\theta = \frac{7}{10}\theta \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\overline{AH} = \cos\theta$에서 $\overline{AP} = 2\cos\theta$이므로 부채꼴 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 4\cos^2\theta \cdot \theta = 2\theta\cos^2\theta \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

삼각형 AOH의 넓이는 $\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$ …… ㉢

점 O, T, Q로 둘러싸인 넓이를 W라 하면

점 H, O, Q, P로 둘러싸인 도형의 넓이는

$S_1 + W =$(㉡−㉢)

부채꼴 OBR의 넓이는 $S_2 + W =$㉠이므로

$$S_1 - S_2 = \left(2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right) - \frac{7}{10}\theta$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S_1 - S_2}{\overline{OH}} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta - \frac{7}{10}\theta}{\sin\theta}$$

$(\because \overline{OH} = \sin\theta)$

$$= \lim_{\theta \to 0+}\left(2\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{7}{10}\right)$$

$\left(\because \lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1\right)$

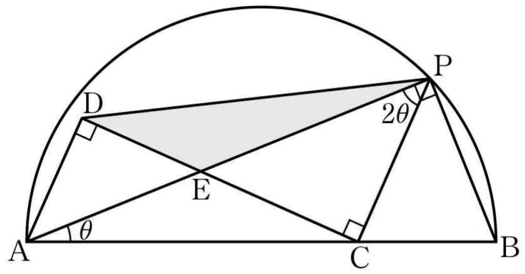
$$= \frac{4}{5}$$

$\therefore a = \frac{4}{5}$

$\therefore\ 50a = 40$

20) [정답] ④

[해설]



두 직각삼각형 PCE와 ADE는 닮음이므로

$\overline{EP}$: $\overline{EA}=\overline{EC}$: $\overline{ED}$에서 $\overline{EP}\times\overline{ED}=\overline{EA}\times\overline{EC}$

$\angle DEP=\frac{\pi}{2}+2\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{EP}\times\overline{ED}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{EA}\times\overline{EC}\times\cos 2\theta$$

직각삼각형 APB에서 $\overline{AP}=2\cos\theta$

삼각형 ACP에서 $\angle ACP=\pi-3\theta$이므로

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta}=\frac{\overline{AP}}{\sin(\pi-3\theta)}$에서

$$\overline{AC}=\frac{2\sin 2\theta\cos\theta}{\sin 3\theta}$$

삼각형 ACE에서 $\angle ACE=\frac{\pi}{2}-3\theta$, $\angle CEA=\frac{\pi}{2}+2\theta$이고

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{EC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{EA}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}=\frac{\overline{AC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}\text{이므로}$$

$$\overline{EC}=\frac{\overline{AC}\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2\sin 2\theta\sin\theta\cos\theta}{\sin 3\theta\cos 2\theta}$$

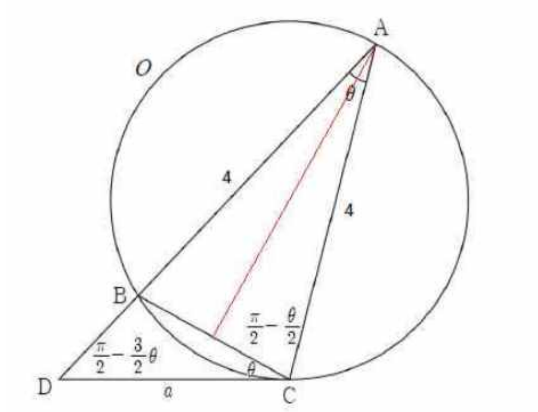
$$\overline{EA}=\frac{\overline{AC}\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2\sin 2\theta\cos\theta\cos 3\theta}{\sin 3\theta\cos 2\theta}$$

$$S(\theta)=\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos 3\theta}{\sin^2 3\theta\cos 2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos 3\theta}{\theta\sin^2 3\theta\cos 2\theta}$$
$$=\frac{8}{9}\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\right)^2\left(\frac{\cos^2\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta}\right)$$
$$=\frac{8}{9}$$

21) [정답] 8

[해설]



이등변삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=8\sin\frac{\theta}{2}$

삼각형 ACD에 사인법칙에 의하면

$$\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=\frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta\right)},\ \overline{CD}=\frac{4\sin\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin\theta=\frac{16\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=8$$

22) [정답] 15

[해설]

직각삼각형 BMH에서 $\overline{MB}=1$

$\sin\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{MB}}$에서

$\overline{MH}=\overline{MB}\times\sin\theta=\sin\theta$

삼각형 DMC에서

$\overline{MD}=\overline{MH}=\sin\theta$

$\overline{MC}=1$,

$$\angle DMC=\pi-\angle DMB$$
$$=\pi-\angle AMB$$
$$=\pi-\frac{\pi-\theta}{2}$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\ \text{이므로}$$

$$\triangle DMC=\frac{1}{2}\times\overline{MD}\times\overline{MC}\times\sin(\angle DMC)$$
$$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times 1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}$$

삼각형 HMC에서

$\overline{\mathrm{MH}}=\sin\theta$

$\overline{\mathrm{MC}}=1$

$\angle\mathrm{HMC}=\pi-\angle\mathrm{HMB}$

$=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{\pi}{2}+\theta$ 이므로

$\triangle\mathrm{HMC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MH}}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\sin(\angle\mathrm{HMC})$

$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times 1\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

이때 $f(\theta)-g(\theta)$

$=\triangle\mathrm{DMC}-\triangle\mathrm{HMC}$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

$=\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left\{\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2-\frac{1}{4}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\right\}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\left(1^2-\frac{1}{4}\times1^2\right)\times\frac{1}{1+1}$$

$$=\frac{3}{16}$$

따라서 $a=\frac{3}{16}$이므로

$80a=80\times\frac{3}{16}=15$

23) [정답] 23

[해설]

중심각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{AOP}=\theta$이므로

$\angle\mathrm{ABP}=\frac{\theta}{2}$

삼각형 OBR에서

$\angle\mathrm{BRO}=\pi-\left(2\theta+\frac{\theta}{2}\right)=\pi-\frac{5\theta}{2}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\left(\pi-\frac{5\theta}{2}\right)}=\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$\frac{1}{\sin\frac{5\theta}{2}}=\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ 에서 $\overline{\mathrm{OR}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}$

(ⅰ) 삼각형 POR에서 $\angle\mathrm{POR}=\pi-3\theta$ 이므로

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin(\pi-3\theta)$

$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\times\sin3\theta$

$=\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin3\theta}{2\sin\frac{5\theta}{2}}$

(ⅱ) $g(\theta)$는 부채꼴 QOB의 넓이에서 삼각형 OBR의 넓이를 뺀 것이므로

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin2\theta$

$g(\theta)=\theta-\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\times\sin2\theta$

$g(\theta)=\theta-\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin2\theta}{2\sin\frac{5\theta}{2}}$

(ⅲ) 이등변삼각형 POQ에서 점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{\mathrm{OH'}}=\overline{\mathrm{OP}}\times\cos\left(\frac{\pi-3\theta}{2}\right)$

$=1\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\theta}{2}\right)$

$=\sin\frac{3\theta}{2}$

두 삼각형 OQH′, RQH가 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OH'}}:\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{RQ}}=1:(1-\overline{\mathrm{OR}})$

$$\overline{RH}=\overline{OH'}\times(1-\overline{OR})=\sin\frac{3\theta}{2}\times\left(1-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)$$

(i), (ii), (iii)에서

$f(\theta)+g(\theta)=\theta+\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}}\times(\sin3\theta-\sin2\theta)$ 이고,

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}}{\frac{\sin\frac{5\theta}{2}}{\theta}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{5}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta+\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}}\times(\sin3\theta-\sin2\theta)}{\sin\frac{3\theta}{2}\times\left(1-\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1+\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}}\times\left(\dfrac{\sin3\theta}{\theta}-\dfrac{\sin2\theta}{\theta}\right)}{\dfrac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\theta}\times\left(1-\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

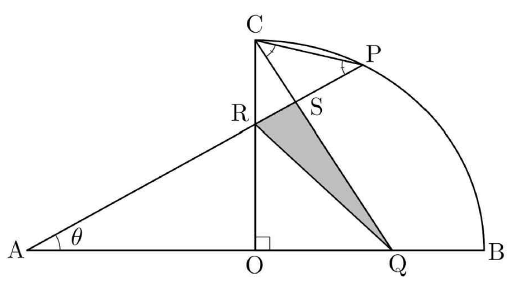
$$=\frac{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times(3-2)}{\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)}$$

$$=\frac{\frac{11}{10}}{\frac{6}{5}}=\frac{11}{12}$$

따라서 $p+q=12+11=23$

24) [정답] ④

[해설]



$\triangle$OAP는 이등변삼각형이므로 $\angle OPA=\theta$이고 $\angle POQ=2\theta$이다.

$\triangle$OAP에 한 점O에서 마주보는 변CP에 수선의 발을 점 M이라 두자.

$\angle COQ=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle COP=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$이다.

이등변삼각형의 꼭짓각은 밑변을 수직이등분하므로

$\angle MOP=\dfrac{\pi}{4}-\theta$ ($\angle MOP=\angle COM=\angle ROS$····· ㉠)이고

$\triangle$OPS의 한 외각인 $\angle PSM=\dfrac{\pi}{4}$이다.

이때 $\angle CSP$는 $\angle PSM$의 2배이므로 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\overline{AO}=2$이므로 $\overline{RO}=2\tan\theta$

$\overline{CO}$의 길이는 $\overline{CO}-\overline{RO}=2-2\tan\theta$

$\triangle$AOR과 $\triangle$CSR은

$\angle ORA=\angle SRC$($\because$ 맞꼭짓각)

$\angle AOR=\angle CSR=90^\circ$

이므로 AA닮음이다.

따라서 $\angle RAO=\angle RCS=\theta$이므로 $\overline{RS}=(2-2\tan\theta)\sin\theta$

□SOQR의 마주보고 있는 두 각인 $\angle ROQ$와 $\angle RSQ$의 합이 π이므로 □SOQR은 원에 내접하는 사각형이다. 따라서

$\angle ROS$와 $\angle RQS$는 원주각으로 같고 $\dfrac{\pi}{4}-\theta$ ($\because$ ㉠)이다.

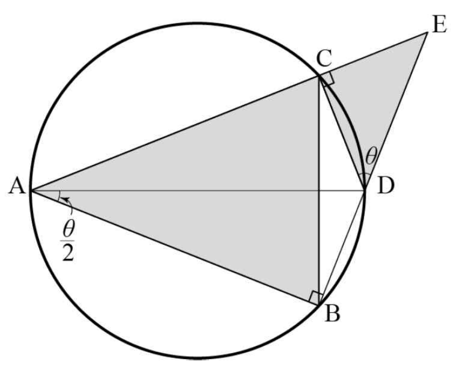
$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot(1-\tan\theta)^2\cdot\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$\therefore\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{2^2\cdot(1-\tan\theta)^2\cdot\sin^2\theta}{2\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cdot\theta^2}$$

$=2$

25) [정답] ②

[해설]



$\angle ABD=\dfrac{\pi}{2}$이므로 선분 AD는 원의 지름이다.

$\angle ECD=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle DAB=\angle CAD=\dfrac{\theta}{2}$

$\overline{AB}=10\cos\frac{\theta}{2}$, $\overline{CD}=\overline{BD}=10\sin\frac{\theta}{2}$

$\angle AEB=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle CDE=\theta$

$\overline{CE}=10\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta$

따라서 $f(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(10\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta$,

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times10\sin\frac{\theta}{2}\times10\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{50\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times50\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times\sin\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{1\times\frac{1}{4}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}$$

26) [정답] ①

[해설]

그림에서 $\overline{OA}=\overline{OP}=$(반지름)$=1$이므로 $\triangle AOP$는 이등변삼각형이다.

즉, $\angle APO=\theta$

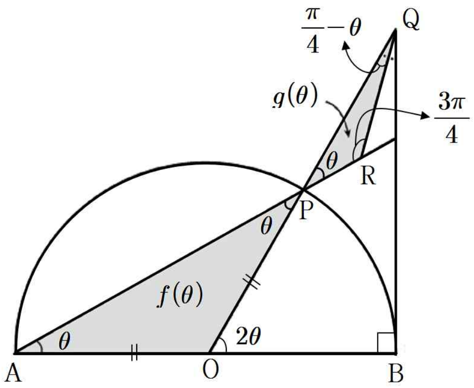
또, $\angle AOP=\pi-2\theta$이므로 $\angle QOB=2\theta$

$\triangle QOB$가 $\angle B$가 직각인 직각삼각형이므로 $\angle OQB=\frac{\pi}{2}-2\theta$

따라서 $\angle PQQ=\frac{1}{2}\angle OQB=\frac{\pi}{4}-\theta$

$\triangle QPR$에서 $\angle APO=\angle QPR=\theta$ (맞꼭지각)이고,

$\angle PQQ=\frac{\pi}{4}-\theta$이므로 $\angle QRP=\frac{3}{4}\pi$



$\triangle AOP$의 넓이 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{OP}\cdot\sin(\angle AOP)$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\sin2\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\triangle QOB$에서 $\overline{OB}=1$이므로 $\overline{OQ}=\frac{1}{\cos2\theta}$이므로

$$\overline{QP}=\overline{OQ}-\overline{OP}=\frac{1}{\cos2\theta}-1=\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}$$

따라서 $\triangle PQR$에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{\overline{QR}}{\sin\theta},$$

$$\therefore \overline{QR}=\sqrt{2}\sin\theta\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)$$

즉, $\triangle PQR$의 넓이 $g(\theta)$는

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{QR}\cdot\sin(\angle PQR)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)\cdot\sqrt{2}\sin\theta\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2\sin\theta\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)}{\theta^4\sin2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}\right)^2 (\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta)}{2\theta^4 \sin\theta\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}\right)^2}{2\theta^4} \cdot \frac{(\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}\right)^2}{2\theta^4} \cdot (1-\tan\theta)$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}\right)^2}{2\theta^4} \cdot \lim_{\theta \to 0+} (1-\tan\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right)^2 \left(\frac{1-\cos 2\theta}{\theta^2}\right)^2 \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right)^2 \left(\frac{\sin^2 2\theta}{\theta^2} \times \frac{1}{1+\cos 2\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \left(2^2 \times \frac{1}{1+1}\right)^2$$

$$= 2$$

27) [정답] ③

[해설]

$$\overline{AP} = 2\cos\theta,\ \ \overline{AQ} = \overline{AP} \times \frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta} = \frac{2\cos\theta \sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\overline{AP}\,\overline{AQ}\sin\theta = \frac{2\cos\theta \sin\frac{\theta}{3} \sin\theta}{\sin\frac{4}{3}\theta}$$

$l(\theta) = 2\sin\theta$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{l(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta} = \frac{1}{4}$$

28) [정답] 11

[해설]

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\angle AMQ = 2 \times \angle ABQ = 2 \times 2\theta = 4\theta$

이므로

(부채꼴 AMQ의 넓이)$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times 4\theta = 2\theta$,

(삼각형 MBQ의 넓이)$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin(\pi - 4\theta) = \frac{1}{2}\sin 4\theta$

삼각형 RAB에서 $\angle ARB = \pi - 3\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{BR}}{\sin\theta},$$

즉

$$\overline{BR} = \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

(삼각형 RAB의 넓이)$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BR} \times \sin 2\theta$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \sin 2\theta$$

$$= \frac{2\sin\theta \sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

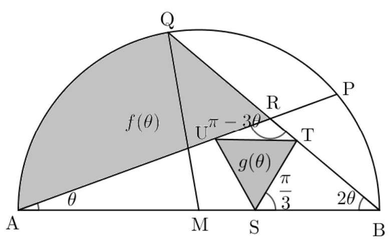
그러므로

$$f(\theta) = 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - \frac{2\sin\theta \sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \left(2 + 2 \times \frac{\sin 4\theta}{4\theta} - \frac{4 \times \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}{3 \times \frac{\sin 3\theta}{3\theta}} \right)$$

$$= 2 + 2 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \cdots\cdots ㉠$$



정삼각형 STU의 한 변의 길이를 a라 하면 삼각형 TSB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{BT}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

즉

$$\overline{BT} = \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta}$$

두 삼각형 RUT, RAB가 서로 닮음이므로

$\overline{RT} : \overline{RB} = \overline{UT} : \overline{AB}$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta} : \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} = a : 2$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}a$$

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} + \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}\right)a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\frac{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}{\sin 2\theta \sin 3\theta}a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\sin 2\theta \sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}$$

이때

$g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

이고

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{a}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin3\theta}\times\frac{\sin2\theta\sin3\theta}{2\sin\theta\sin2\theta+\sqrt{3}\sin3\theta}\times\frac{1}{\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin3\theta}\times\frac{\frac{\sin2\theta\sin3\theta}{\theta^2}}{\frac{2\sin\theta\sin2\theta+\sqrt{3}\sin3\theta}{\theta}}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{2\times3}{0+3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{a}{\theta}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\frac{16\sqrt{3}}{27}\cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$=\frac{\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{27}}{\frac{8}{3}}$$

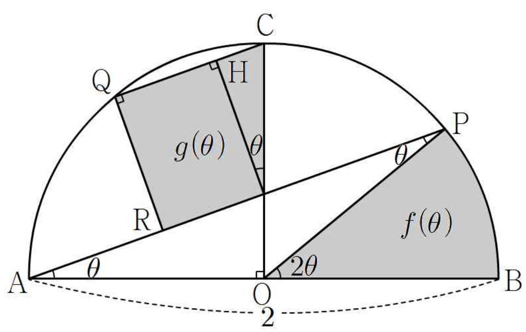
$$=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

이므로

$p+q=9+2=11$

29) [정답] ②

[해설]



$\angle OAP=\angle OPA=\theta$이므로 $\angle BOP=2\theta$

$$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta$$

또한, $\overline{OA}=1$에서 $\overline{OS}=\tan\theta$이므로

$\overline{CS}=1-\tan\theta$

이때, $\angle BOP=\angle COQ=2\theta$이고 삼각형 OCQ는 이등변삼각형이므로

$\angle SCQ=\frac{\pi}{2}-\theta$

또한, $\angle CSR=\theta+\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle QRS=\frac{\pi}{2}$

따라서 점 S에서 변 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle CSH=\theta$

이므로

$\overline{SH}=\overline{RQ}=(1-\tan\theta)\cos\theta$

$\overline{CH}=(1-\tan\theta)\sin\theta$

이고

$\overline{CQ}=\overline{BP}=2\sin\theta$

$\overline{RS}=\overline{QH}=\overline{CQ}-\overline{CH}$

$=2\sin\theta-(\sin\theta-\sin\theta\tan\theta)$

$=\sin\theta+\sin\theta\tan\theta$

$=\sin\theta(1+\tan\theta)$

$$\therefore g(\theta)=\frac{1}{2}\times(\overline{CQ}+\overline{RS})\times\overline{QR}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta(3+\tan\theta)\times(1-\tan\theta)\cos\theta$$

$$3f(\theta)-2g(\theta)=\frac{3}{2}\sin2\theta-\sin\theta\cos\theta(3+\tan\theta)(1-\tan\theta)$$

$$=3\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta(3+\tan\theta)(1-\tan\theta)$$

$$=\sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)$$

$$\therefore\lim_{\theta\to0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$$

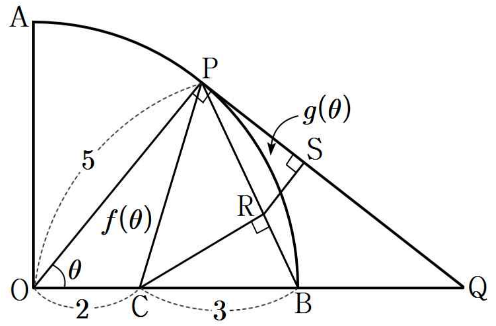
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\cos\theta\times(\tan\theta+2)\right\}$$

$$=1\times1\times1\times2=2$$

30) [정답] 49

[해설]



$\overline{OC}=2$, $\overline{OP}=5$이므로

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\times 5\sin\theta=5\sin\theta$ …… ㉠

삼각형 OBP는 이등변삼각형이므로

$\overline{BP}=2\times 5\sin\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}$

$\angle OBP=\frac{\pi-\theta}{2}$이므로 $\angle BCR=\frac{\theta}{2}$이고 $\overline{BR}=3\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore \overline{PR}=\overline{BP}-\overline{BR}=7\sin\frac{\theta}{2}$ …… ㉡

$\angle OPQ=\frac{\pi}{2}$이고 $\angle OPB=\frac{\pi-\theta}{2}$이므로

$\angle RPS=\frac{\theta}{2}$ …… ㉢

$\therefore \overline{PS}=\overline{PR}\cos\frac{\theta}{2}=7\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times 7\sin\frac{\theta}{2}\times 7\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$

$=\frac{49}{2}\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ …… ㉤

㉠, ㉤에서

$$80\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$

$$=80\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{49}{2}\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\times 5\sin\theta}$$

$$=8\times 49\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\times\sin\theta}$$

$$=8\times 49\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^3\times\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)}\times\frac{1}{8}$$

$$=8\times 49\times\frac{1}{8}=49$$

31) [정답] ④

[해설]

$\overline{AP}=\overline{PC}$이므로 삼각형 OPC에서

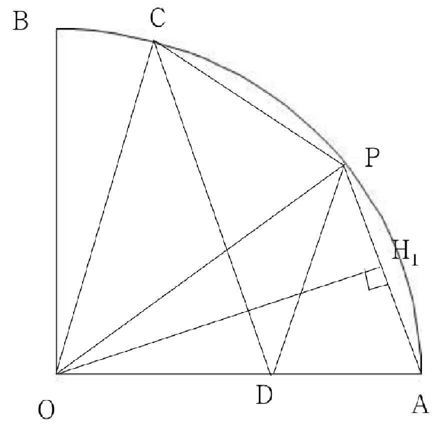
$\angle COP=\angle POA=\theta$

또, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

$\angle H_1OA=\frac{\theta}{2}$

이므로

$\overline{AP}=2\overline{AH_1}=2\times\overline{OA}\sin\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}$ …… ㉠



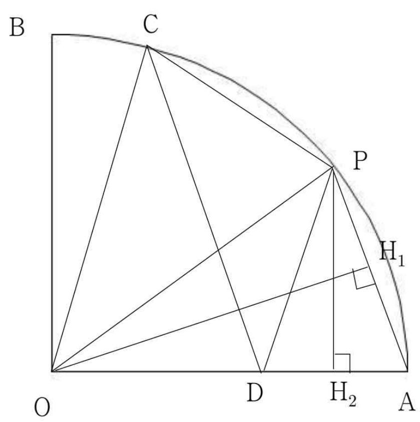
한편, 점 P에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$\angle APD=2\angle APH_2$

$=2\times\{\pi-(\angle PH_2A+\angle H_2AP)\}$

$=2\times\left[\pi-\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]$

$=\theta$



또한

$\angle APO=\angle OPC=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$

이므로

$\angle DPC=\angle APO+\angle OPC-\angle APD$

$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\theta$

$=\pi-2\theta$ ……㉡

㉠과 ㉡으로부터

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{PC}\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta$

$=2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta$

또, ㉠으로부터 삼각형 APD에서

$\overline{DA}=2\overline{AP}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$

$=2\times2\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$

$=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$

이때, 두 삼각형 OAP, DAE는 닮음이고 $\overline{OA}=1$,

$\overline{DA}=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$이므로

$g(\theta)=\triangle DAE$

$=4^2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\triangle OAP$

$=16\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\sin\theta$

$=8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta$

따라서,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta}{\theta^2\times2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta}{\theta^2\times\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{4}}{\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

32) [정답] 50

[해설]

직각삼각형 AHP에서 $\angle APH=\theta$이므로

$\angle HAP=\frac{\pi}{2}-\theta$

한편, 삼각형 OPA는

$\overline{OP}=\overline{OA}=1$

인 이등변삼각형이므로

$\angle AOP=\pi-2\times\angle HAP$

$=\pi-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=2\theta$

그러므로

$\overline{AH}=1-\overline{OH}$

$=1-\overline{OP}\cos2\theta$

$=1-\cos2\theta\cdots\cdots$㉠

또,

$\angle HAQ=\frac{1}{2}\angle HAP$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

이므로

$\overline{HQ}=\overline{AH}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$=(1-\cos2\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cdots\cdots$㉡

㉠과 ㉡에서

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{HQ}$

$=\frac{1}{2}\times(1-\cos2\theta)^2\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta}{(1+\cos2\theta)^2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

그러므로

$\lim_{\theta\to0-}\frac{f(\theta)}{\theta^4}$

$$=\frac{1}{2}\times16\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^4\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{(1+\cos2\theta)^2}\times\lim_{\theta\to0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$=\frac{1}{2}\times16\times1^2\times\frac{1}{4}\times1$

$=2\cdots\cdots$㉢

한편, 이등변삼각형 OPA에서 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 ㉠에서 $\angle H'OP=\theta$이므로

$\overline{AP}=2\overline{PH'}$

$=2\times\overline{OP}\times\sin\theta$

$=2\sin\theta$

삼각형 AOP에서 각의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$\overline{AO}:\overline{AP}=\overline{OR}:\overline{RP}$

$1:2\sin\theta=\overline{OR}:1-\overline{OR}$

$2\sin\theta\times\overline{OR}=1-\overline{OR}$

$\overline{OR}=\frac{1}{1+2\sin\theta}\cdots\cdots$㉣

또,

$\overline{OS}=\overline{OA}\tan(\angle SAO)$

$=1\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ $\cdots-(a)$

㉣과 ㉤에서

$g(\theta)=\triangle OSP-\triangle OSR$

$=\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OP}\times\sin(\angle POS)$

$-\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OR}\times\sin(\angle POS)$

$=\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\sin(\angle POS)\times(\overline{OP}-\overline{OR})$

$=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\times\left(1-\frac{1}{2\sin\theta+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\times\frac{2\sin\theta}{2\sin\theta+1}$

그러므로

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}$

$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\lim_{\theta\to0+}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\times2\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2\sin\theta+1}$

$=\frac{1}{2}\times1\times1\times2\times1\times1=1\cdots\cdots$㉥

따라서, ㉢과 ㉥을 이용하면

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta^4}}$

$=\frac{1}{2}$

이므로

$100k=100\times\frac{1}{2}=50$

33) [정답] 20

[해설]

$\angle RBO=\angle BRQ=\frac{1}{2}\angle BOQ=\theta$이므로

$\angle OST=2\theta$, $\angle OTS=\pi-3\theta$

삼각형 OBS에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OS}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-2\theta)}$, $\overline{OS}=\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}$

삼각형 OBT에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OT}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}$, $\overline{OT}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\angle ROA=2\times\angle RBA=2\theta$, $\angle TOR=\pi-4\theta$

$f(\theta)=$(부채꼴 ORA의 넓이)+(삼각형 OTR의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta+\frac{1}{2}\times1\times\overline{OT}\times\sin(\pi-4\theta)$

$=\theta+\frac{\sin\theta\sin4\theta}{2\sin3\theta}$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(1+\frac{4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin4\theta}{4\theta}}{6\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right)$

$=1+\frac{4\times1\times1}{6\times1}=\frac{5}{3}$

$g(\theta)=$(부채꼴 OPQ의 넓이)$-$ (삼각형 OST의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times1^2\times\theta-\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OT}\times\sin\theta$

$=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin^3\theta}{2\sin2\theta\sin3\theta}$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3}{12\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right\}$

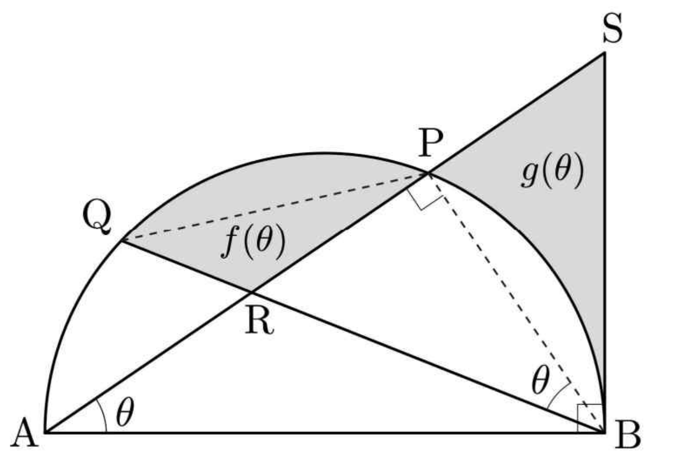
$=\frac{1}{2}-\frac{1^3}{12\times1\times1}=\frac{5}{12}$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}=\frac{1}{4}$

따라서 $a=\frac{1}{4}$이므로 $80a=80\times\frac{1}{4}=20$

34) [정답] 4

[해설]



호 PB와 호 PQ의 길이가 서로 같으므로 원주각의 성질에 의하여 $\angle PAB=\angle QBP=\theta$

$\angle ABS=\angle APB=\frac{\pi}{2}$이고 $\angle PBA=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle SBP=\theta$

두 삼각형 SPB, RPB는 서로 합동이므로 두 삼각형 SPB, RPB의 넓이가 서로 같다.
선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 PB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같다.
그러므로 $f(\theta)+g(\theta)$는 삼각형 QBP의 넓이와 같다.

$\overline{PB}=\overline{PQ}=2\sin\theta$

$$f(\theta)+g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{PQ}\times\sin(\pi-2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\times(2\sin\theta)^2\times\sin2\theta$$
$$=2\sin^2\theta\sin2\theta$$

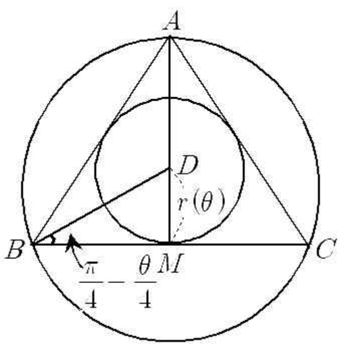
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta\sin2\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{\sin2\theta}{\theta}\right)$$
$$=2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\right)$$
$$=2\times1^2\times2=4$$

35) [정답] 17

[해설]
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2\cdot1$$
$$\therefore \overline{BC}=2\sin\theta$$

따라서 선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{BM}=\sin\theta$이다.



또, 내접원의 중심을 D라고 하면 위 그림의 직각삼각형 BMD에서

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\frac{r(\theta)}{\sin\theta}$$
$$\therefore r(\theta)=\sin\theta\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)$$

이때, $\pi-\theta=t$로 놓으면 $\theta\to\pi-$ 일 때 $t\to0+$ 이고

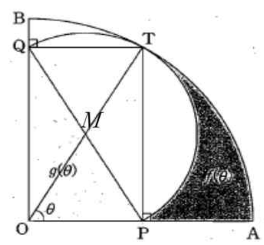
$\sin\theta=\sin(\pi-t)=\sin t$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\tan\frac{t}{4}$ 이다.

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t\times\tan\frac{t}{4}}{t^2}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to0+}\frac{\tan\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}}$$
$$=\frac{1}{4}\times1\times1=\frac{1}{4}$$

$p^2+q^2=16+1=17$

36) [정답] 50

[해설]
점 T의 좌표를 $T(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$라 하고, 직사각형 OPTQ에서 두 대각선 OT, PQ의 교점을 M이라 하자.



$f(\theta)=$(부채꼴 OAT의 넓이) - (삼각형 OPM의 넓이)$-$(부채꼴 MPT의 넓이)

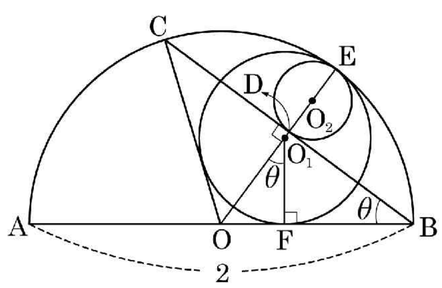
$$=\frac{1}{2}\times2^2\times\theta-\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times1\times\sin\theta-\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta$$
$$=\theta-\cos\theta\sin\theta$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times2\sin\theta=2\cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore\ a=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta+f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta-\cos\theta\sin\theta}{2\cos\theta\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\theta}{\cos\theta\sin\theta}-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ 100a=50$$

37) [정답] 17

[해설]
점 O_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F, 직선 O_1O_2와 현 BC, 호 BC의 교점을 각각 D, E라 하자.



$\overline{O_1F}=\overline{O_1E}=f(\theta)$, $\angle OO_1F=\theta$

$$\overline{OE}=\overline{OO_1}+\overline{O_1E}=\frac{f(\theta)}{\cos\theta}+f(\theta)=1$$

$$f(\theta)=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$\overline{OD}=\sin\theta$, $\overline{ED}=1-\sin\theta$ 이므로

$$g(\theta)=\frac{1-\sin\theta}{2}$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{1-\sin\theta}{2}}{\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)^2}{2\cos^2\theta}$$

$\frac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면, $\theta=\frac{\pi}{2}-t$이고

$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$, $\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

$\theta\to\frac{\pi}{2}-$일때 $t\to 0+$이다.

(주어진 식)$=\lim_{t\to 0+}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2\sin^2 t}$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2(1-\cos^2 t)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(1+\sin t)^2}{2(1+\cos t)}$$

$$=\frac{1}{4}=\frac{q}{p}$$

따라서 $p=4$, $q=1$이므로 $p^2+q^2=17$이다.

38) [정답] ②

[해설]

부채꼴 OAP 의 넓이 $f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta=\frac{1}{2}\theta$

삼각형 OPQ 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{1}{2}\times(\sin\theta+\cos\theta+1)\times r=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\cos\theta$$

$r=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}$이므로

삼각형 OPQ 에 내접하는 원의 넓이

$g(\theta)=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}\pi$이다.

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\cdot f(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\pi\sin^2\theta\cos^2\theta}{\theta^2(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}$$

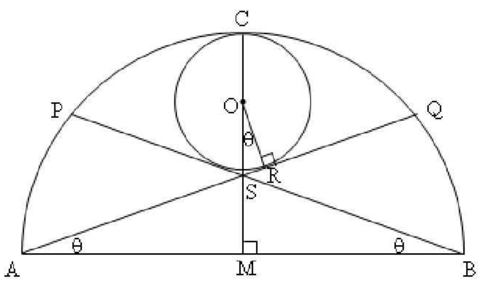
$$=\frac{\pi}{2}$$

39) [정답] 8

[해설]

다음과 같이 선분 AB의 중점을 M, 두 선분 AQ, BP 의 교점을 S라 하자.

또, 내접하는 원의 중심을 O, 이 원과 반원의 교점을 C라 하고, 이 원과 선분 AQ의 접점을 R라 하자.



위의 그림에서 맞꼭지각의 성질에 의해

$\angle ASM=\angle OSR$

이고, $\angle AMS=\angle ORS=90^\circ$ 이므로 $\angle SOR=\angle SAM=\theta$이다.

이 때, $\overline{CO}+\overline{OS}+\overline{SM}=\overline{CM}=\overline{AM}=1$이므로

$$r(\theta)+r(\theta)\times\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta=1$$

$$\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)r(\theta)=1-\tan\theta$$

$$\therefore\ r(\theta)=\frac{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{1}{\cos\theta}}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{1+\cos\theta}$$

한편, $\frac{\pi}{4}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\frac{\pi}{4}-$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\therefore\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{(1+\cos\theta)\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)}\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)}\times\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\times 1=\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

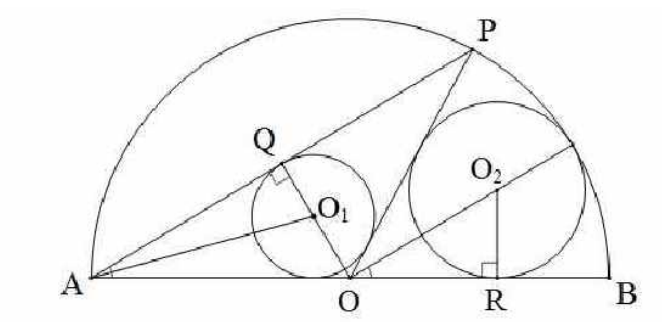
$$=\sqrt{2}(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$$

$\therefore\ p=2$, $q=-2$

$\therefore\ p^2+q^2=8$

40) [정답] 4

[해설]



그림과 같이 원 O_1과 직선 AP와의 접점을 점 Q, 원 O_2와 직선 AB와의 접점을 점 R라 하고, 원 O_1의 반지름을 r_1, 원 O_2의 반지름을 r_2라 하자.

삼각형 QAO에서 $\overline{AQ} = \cos\theta$, $\angle QAO_1 = \dfrac{\theta}{2}$이므로

$r_1 = \cos\theta\tan\dfrac{\theta}{2}$이다.

$\therefore\ f(\theta) = \pi\cos^2\theta\tan^2\dfrac{\theta}{2}$

부채꼴 OBP에서 $\angle O_2OR = \theta$이므로

$\overline{OO_2} = \dfrac{r_2}{\sin\theta}$이다.

$\dfrac{r_2}{\sin\theta} + r_2 = 1$이므로 $r_2 = \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$이다.

$\therefore\ g(\theta) = \dfrac{\pi\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}$

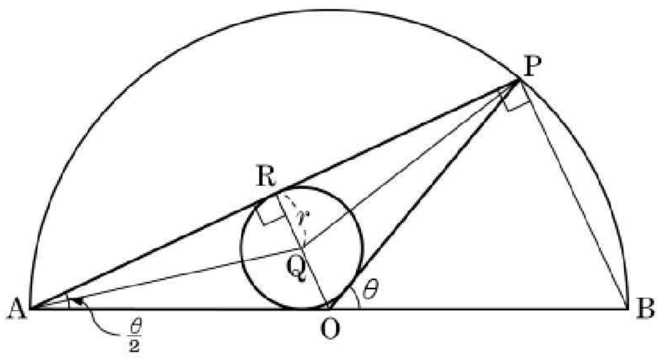
$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)} = \lim_{\theta\to +0}\frac{\pi\sin^2\theta}{\pi\cos^2\theta\tan^2\dfrac{\theta}{2}(1+\sin^2\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\dfrac{\theta^2}{4}}{\tan^2\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{4}{\cos^2\theta\ (1+\sin\theta)^2} = 4$$

41) [정답] ④

[해설]

삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q, 반지름의 길이를 r라 하자.



$\triangle AOP = \triangle AOQ + \triangle OPQ + \triangle PAQ$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{OP}\cdot\sin(\pi-\theta) = \frac{r}{2}\cdot\overline{AO} + \frac{r}{2}\cdot\overline{OP} + \frac{r}{2}\cdot\overline{PA}$$

$\therefore\ \sin\theta = r(2+\overline{PA})$ …… ㉠

직각삼각형 ABP에서

$\overline{PA} = \overline{AB}\cos\dfrac{\theta}{2} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ …… ㉡이므로

㉠, ㉡에 의하여 $r = \dfrac{\sin\theta}{2+2\cos\dfrac{\theta}{2}}$이다.

따라서 $f(\theta) = \pi r^2 = \dfrac{\pi\sin^2\theta}{\left(2+2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\pi}{\left(2+2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\lim_{\theta\to 0+}\frac{\pi}{\left(2+2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= 1^2\cdot\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$$

[다른 풀이]

삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q라 하고 원 Q와 변 AP의 접점을 R라 하면 $\overline{OR}\perp\overline{AP}$, $\overline{QR}\perp\overline{AP}$이다.

삼각형 AOR에서 $\angle RAO = \dfrac{\theta}{2}$이므로

$\overline{AR} = \overline{OA}\cos\dfrac{\theta}{2} = \cos\dfrac{\theta}{2}$

삼각형 AQR에서 $\angle RAQ = \dfrac{\theta}{4}$이므로

$\overline{QR} = \overline{AR}\tan\dfrac{\theta}{4} = \cos\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{4}$

따라서 $f(\theta) = \pi\overline{QR}^{\,2} = \pi\cos^2\dfrac{\pi}{2}\tan^2\dfrac{\theta}{4}$이다.

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{\pi\cos^2\dfrac{\theta}{2}\tan^2\dfrac{\theta}{4}}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\pi\cos^2\dfrac{\theta}{2}\tan^2\dfrac{\theta}{4}}{\left(\dfrac{\theta}{4}\right)^2\cdot 16}$$

$$= \frac{\pi}{16}\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan^2\dfrac{\theta}{4}}{\left(\dfrac{\theta}{4}\right)^2}\lim_{\theta\to 0+}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\pi}{16}\cdot 1^2\cdot 1^2 = \frac{\pi}{16}$$

42) [정답] ③

[해설]

삼각형 AOO′에서

$\overline{AO}=1,\ \overline{OO'}=2$

$\overline{AO'}=\sqrt{1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\theta}$

$=\sqrt{5-4\cos\theta}$

직각삼각형 PAO′에서

$\overline{AP}=\sqrt{5-4\cos\theta-1}$

$=\sqrt{4(1-\cos\theta)}$

$=\sqrt{4\cdot 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$

$=2\sqrt{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\ \left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\overline{AO'}$은 $\overline{PQ}$를 수직이등분하므로

$\overline{AO'}$, $\overline{PQ}$의 교점을 M이라 하면

$\overline{PM}\times\overline{AO'}=\overline{AP}\times\overline{PO'}$

$$\overline{PM}=\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

$$\therefore\ \overline{PQ}=2\overline{PM}=\frac{4\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{1}\times\frac{1}{2}$$

$$=2\sqrt{2}$$

43) [정답] ①

[해설]

△ABP에서 $\angle ABP=\dfrac{\theta}{2}$이고 $\overline{AB}=2$이므로

$\overline{AP}=2\sin\dfrac{\theta}{2},\ \overline{BP}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$

△AOP의 외접원의 반지름의 길이를 R_1,

△BOP의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면

사인법칙에 의하여

$R_1=\dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$이고 $f(\theta)=\pi\dfrac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$R_2=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$이고 $g(\theta)=\pi\dfrac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)-f(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\dfrac{\pi}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}-\dfrac{\pi}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{\pi}{2}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

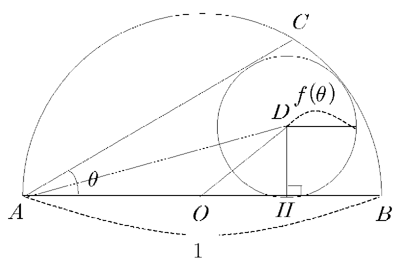
$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\cos\theta}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta}$$

$\dfrac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\dfrac{\pi}{2}-$일 때 $t\to0+$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\cos\theta}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta}=\lim_{t\to0+}\frac{\pi\sin t}{t\cos^2 t}=\pi$

44) [정답] 25

[해설]



호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하 는 원의 중심을 D, 점 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H, 선분 AB의 중점을 O라 하자.

$\angle BAC=\theta$이므로 $\angle HAD=\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore\ \overline{AH}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

한편, 직각삼각형 DOH에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}$$

이므로

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{1}{4}-f(\theta)+\{f(\theta)\}^2-\{f(\theta)\}^2$$

$$=\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}^2-\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}+\frac{1}{4}$$

$$-f(\theta)=\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}^2-\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}$$

의 양변에 $\tan^2\frac{\theta}{2}$을 곱하여 정리하면

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $f(\theta)>0$이므로

$$-\tan^2\frac{\theta}{2}=f(\theta)-\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \alpha=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$

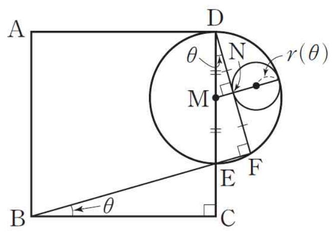
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{4}{4}$$

$$\therefore\ 100\alpha=25$$

45) [정답] ④

[해설]



$\angle BEC=\angle DEF=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 직각삼각형 DEF에서

$\angle EDF=\theta$이다.

$\overline{EC}=\tan\theta$이므로

$$\overline{DE}=1-\tan\theta$$

이고, 선분 DE의 중점을 M이라 하면

$$\overline{DM}=\frac{1-\tan\theta}{2}$$

직선 DF가 작은 원과 접하는 점을 N이라 하면 직각삼각형

DMN에서 $\overline{MN}=\overline{DM}\times\sin\theta=\frac{1-\tan\theta}{2}\times\sin\theta$

이므로 $\overline{DM}=\overline{MN}+2r(\theta)$에서

$$r(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{DM}-\overline{MN})$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1-\tan\theta}{2}-\frac{1-\tan\theta}{2}\times\sin\theta\right)$$

$$=\frac{(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{4}$$

한편, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$에서 $\frac{\pi}{4}-\theta=t$로 놓으면 $\theta\to\frac{\pi}{4}-$일

때, $t\to0+$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\lim_{t\to0+}\frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1-\frac{1-\tan t}{1+\tan t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2\tan t}{t(1+\tan t)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\tan t}{t}\times\lim_{t\to0+}\frac{2}{1+\tan t}$$

$$=1\times2=2$$

따라서

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\sin\theta}{4}$$

$$=2\times\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$$

46) [정답] 5

[해설]

작은 원의 중심을 O′, P에서 OA에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$O'A=r(\theta),\ O'Q=\frac{2}{\sqrt{3}}r(\theta)$$

$$PH=\sin\theta,\ QH=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta,\ OQ=\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$$

$$OA=\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}r(\theta)+r(\theta)=1$$

$$r(\theta)=\frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)+\sin\theta}{2+\sqrt{3}}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2+\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{\theta}+\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

$\therefore a=2,\ b=-1 \therefore a^2+b^2=5$

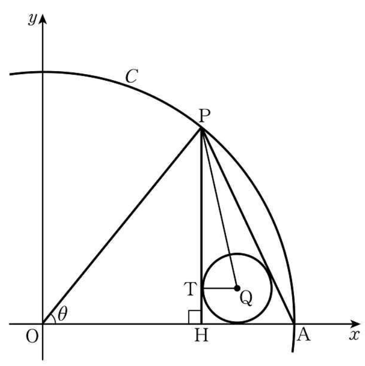
47) [정답] ④

[해설]
삼각형 OAP가 이등변삼각형이므로

$\angle OAP=\angle OPA=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이고 삼각형 APH에서

$\angle APH+\angle PAH=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle APH=\frac{\theta}{2}$이다.

내접원의 중심을 Q라 하고, 내접원과 선분 PH의 교점을 T라 하면 $\angle QPT=\frac{\theta}{4}$이다.



$\overline{PH}=\sin\theta$이므로 삼각형 QPT에서

$$\tan\frac{\theta}{4}=\frac{\overline{QT}}{\overline{PT}}=\frac{r(\theta)}{\sin\theta-r(\theta)}$$

$$\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)r(\theta)=\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}$$

이므로

$$r(\theta)=\frac{\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}}{1+\tan\frac{\theta}{4}}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}}{\theta^2\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)}\right\}$$

$$=1\times1\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$$

[다른 풀이]
내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하면

$$\triangle APH=\frac{1}{2}\times(\triangle APH\text{의 둘레의 길이})\times r(\theta)$$

$$\triangle APH=\frac{1}{2}r(\theta)\left(\overline{PH}+\overline{AH}+\overline{AP}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{PH}$$

따라서

$$\frac{\sin\theta+(1-\cos\theta)+2\sin\frac{\theta}{2}}{2}\times r(\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\times(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\right)r(\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)$$

따라서 $\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}+1\right)r(\theta)=(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}$

$r(\theta)=\dfrac{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$$

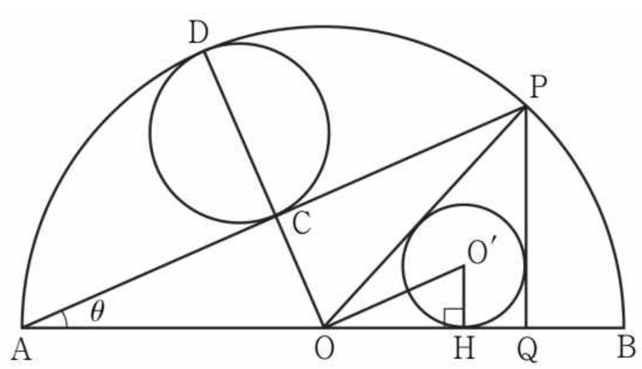
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{1+1+0}\times1^2\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}$$

48) [정답] 16

[해설]



선분 AP와 호 AP에 동시에 접하는 가장 큰 원이 선분 AP와 접하는 점을 C, 호 AP와 접하는 점을 D라 하자.
$\overline{CO}=\sin\theta$, $\overline{CD}=1-\overline{CO}=1-\sin\theta$이므로 선분 AP와 호 AP에

동시에 접하는 가장 큰 원의 반지름의 길이는 $\frac{1-\sin\theta}{2}$

$\therefore\ S(\theta)=\frac{\pi}{4}(1-\sin\theta)^2$

삼각형 POQ의 내접원의 중심을 O′, 점 O′에서 선분 OQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{POQ}=2\theta,\ \angle\mathrm{O'OH}=\theta$

삼각형 POQ의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{r}{\tan\theta},\ \overline{\mathrm{HQ}}=r$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{r}{\tan\theta}+r=\cos2\theta$

$r=\frac{\cos2\theta\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$\therefore\ T(\theta)=\pi\left(\frac{\cos2\theta\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2$

$S\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}\left\{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2=\frac{\pi}{4}(1-\cos\theta)^2$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times T(\theta)}{S\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times\frac{\pi\cos^2 2\theta\tan^2\theta}{(1+\tan\theta)^2}}{\frac{\pi}{4}(1-\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\theta^2\cos^2 2\theta\tan^2\theta}{(1+\tan\theta)^2(1-\cos\theta)^2}$$

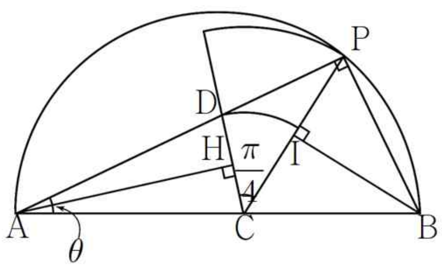
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\theta^2\cos^2 2\theta\tan^2\theta(1+\cos\theta)^2}{(1+\tan\theta)^2\sin^4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{4\cos^2 2\theta(1+\cos\theta)^2}{(1+\tan\theta)^2}\times\frac{\theta^4}{\sin^4\theta}\times\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\right\}$$

$=16$

49) [정답] ②

[해설]



$\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=\sin\theta=\overline{\mathrm{BC}},\ \overline{\mathrm{AC}}=1-\sin\theta$

삼각형 ACD에서 $\angle\mathrm{ACD}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이고

삼각형 BPC에서 $\angle\mathrm{BCP}=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$이므로

$\angle\mathrm{PCD}=\frac{\pi}{4}$

점 A에서 $\overline{\mathrm{CD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{CD}}=2\overline{\mathrm{CH}}=2\overline{\mathrm{AC}}\sin\frac{\theta}{2}=2(1-\sin\theta)\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times4(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\times\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\pi}{2}\times(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}$

점 B에서 $\overline{\mathrm{CP}}$에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{\mathrm{CP}}=2\overline{\mathrm{CI}}=2\overline{\mathrm{BC}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

$\therefore T(\theta)=\frac{1}{2}\times4\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\pi}{2}\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{T(\theta)-S(\theta)}{\theta^2}$$

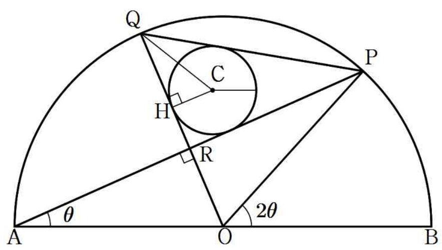
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)-(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2}-\frac{(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{4\times\frac{\theta^2}{4}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times1\right)=\frac{\pi}{8}$$

50) [정답] ①

[해설]



삼각형 ORA에서 $\angle\mathrm{OAR}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OR}}=\sin\theta,\ \overline{\mathrm{QR}}=1-\sin\theta$이고

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{AR}}=\cos\theta$

삼각형 OPQ에서 $\angle POQ=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\overline{OP}=\overline{OQ}=1$이므로 $\angle OQP=\angle OPQ$이고

$$\angle OQP=\frac{1}{2}\left\{\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$$

삼각형 QRP의 내접원의 중심을 C라 하고

점 C에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 QHC에서 $\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)=\frac{f(\theta)}{\overline{QH}}$이므로

$$\overline{QR}=\overline{QH}+\overline{HR}=\frac{f(\theta)}{\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}+f(\theta)=1-\sin\theta$$

$$\therefore\ f(\theta)=\frac{(1-\sin\theta)\times\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}$$

$\frac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\frac{\pi}{2}-$일 때, $t\to 0+$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{f(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}\times\frac{(1-\sin\theta)\times\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^2}\times\frac{(1-\cos t)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin^2 t}{t^2}\times\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}\times\frac{1}{1+\cos t}=\frac{1}{4}$$

51) [정답] ①

[해설]

$\overline{AB}=2$이므로 직각삼각형 ABP에서 $\overline{BP}=2\sin\theta$

두 선분 BP, BQ는 모두 원 C_2의 반지름이므로

$$\overline{BP}=\overline{BQ}=2\sin\theta$$

$\overline{OB}=1$이므로 피타고라스 정리에 의해

직각삼각형 OBQ에서 $\overline{OQ}=\sqrt{1-4\sin^2\theta}$

즉, $S(\theta)=2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}$

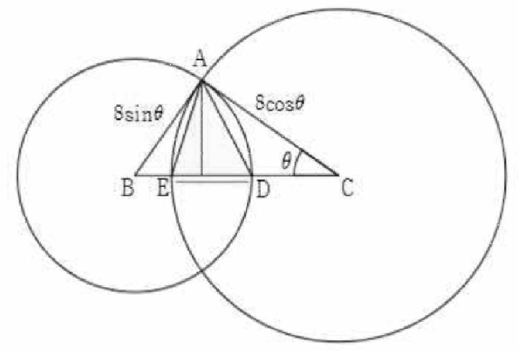
따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta}=2$$

52) [정답] ⑤

[해설]

직각삼각형의 삼각비에서



$\overline{AB}=\overline{BD}=8\sin\theta$, $\overline{AC}=\overline{CE}=8\cos\theta$

$\overline{ED}=\overline{BD}+\overline{CE}-8=8(\sin\theta+\cos\theta-1)$

그리고 삼각형의 높이는 $h=8\sin\theta\cos\theta$이다.

따라서 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{ED}\times h=32\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)$

$$\frac{S(\theta)}{\theta^2}=32\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{\cos\theta-1}{\theta}\right)$$

여기서 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$, $\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}=0$, $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$이므로

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=32$$

53) [정답] ④

[해설]

$\overline{OH}=\cos\theta$, $\overline{PH}=\sin\theta$이므로 $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\sin 2\theta$

$\angle OPQ=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{OQ}=\frac{1}{\cos\theta}$이고,

$\overline{AQ}=\frac{1}{\cos\theta}-1=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$이다.

이때 $\angle AQR=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\text{이다.}$$

$$\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)}=\frac{4}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin 2\theta}}$$

$$=\frac{4}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\frac{\theta}{\sin 2\theta}}$$

그러므로 $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

54) [정답] ②

[해설]

$\frac{g(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2} \times \sin x$인데, 여기서 $\sin x$는 진동발산한다.

$x \to \infty$일 때, $\frac{g(x)}{x^2}$이 0으로 수렴하려면 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$이다.

따라서 $f(x) = ax + b$와 같이 일차이하의 다항식이다.

$g(x) = (ax+b)\sin x$에서

$g'(x) = a\sin x + (ax+b)\cos x$

$\frac{g'(x)}{x} = a\frac{\sin x}{x} + \left(a + \frac{b}{x}\right)\cos x$인데,

이것이 $x \to 0$일 때 6으로 수렴하려면

$b = 0,\ 2a = 6$

$\therefore\ f(x) = 3x,\ f(4) = 12$

55) [정답] **37**

[해설]

$f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f(x) = k$인 x에서 $f'(x) = 0$이어야 한다.

$f'(x) = 0$의 해가 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$($n$은 정수)이므로

$k = f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{3}{4}\pi$

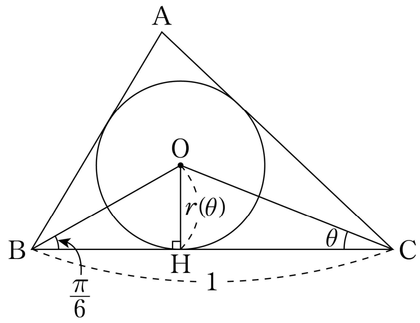
$0 < k < 6\pi$이므로 $k = \frac{3}{4}\pi$ 또는 $k = \frac{11}{4}\pi$ 또는 $k = \frac{19}{4}\pi$

$\therefore k$의 값의 합은 $\frac{33}{4}\pi$이므로 $p = 4,\ q = 33$

따라서 $p + q = 37$

56) [정답] ②

[해설]



삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로

$\angle \mathrm{OBH} = \frac{\pi}{6},\ \angle \mathrm{OCH} = \theta$

$\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{BH}}} = \tan\frac{\pi}{6}$ 에서 $\frac{r(\theta)}{\overline{\mathrm{BH}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{3}\,r(\theta)$

$\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{CH}}} = \tan\theta$에서 $\frac{r(\theta)}{\overline{\mathrm{CH}}} = \tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{CH}} = \frac{r(\theta)}{\tan\theta}$

$\overline{\mathrm{BH}} + \overline{\mathrm{HC}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

$\sqrt{3}\,r(\theta) + \frac{r(\theta)}{\tan\theta} = 1$

$r(\theta) = \frac{\tan\theta}{1 + \sqrt{3}\tan\theta}$

$h(\theta) = \frac{r(\theta)}{\tan\theta}$ 이므로

$h(\theta) = \frac{1}{1 + \sqrt{3}\tan\theta}$

$h(\theta)$를 θ에 대하여 미분하면

$h'(\theta) = -\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{(1 + \sqrt{3}\tan\theta)^2}$

따라서

$h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$

57) [정답] ④

[해설]

$F(x)=\ln|f(x)|$ 이므로

$\lim\limits_{x\to1}(x-1)F'(x)=3$ 에서

$$\lim_{x\to1}\left\{(x-1)\times\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $x\to0$ 일 때 (분자)$\to0$ 이므로 (분모)$\to0$ 에서

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$

또, $f'(x)$ 는 다항함수이므로 미분가능하다.

그러므로 ㉠에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}=3$$

이때, $f'(1)\neq0$ 이라 하면 위의 식의 좌변은

$\dfrac{f'(1)}{f'(1)}=1$ 이므로 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(1)=0$ 이어야 한다.

이때, $f(x)=(x-1)^2(x^2+ax+b)$

$(1+a+b\neq0)$ 라 하면 ㉠의 좌변은

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{2(x-1)(x^2+ax+b)+(x-1)^2(2x+a)\}}{(x-1)^2(x^2+ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x^2+ax+b)+(x-1)(2x+a)}{x^2+ax+b}=2$$

그러므로 만족시키지 않는다.

$f(x)=(x-1)^3(x+a)$ $(a+1\neq0)$ 이라 하면 ㉠의 좌변은

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{3(x-1)^2(x+a)+(x-1)^3\}}{(x-1)^3(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x+a)+(x-1)}{x+a}=3$$

그러므로 만족시킨다.

따라서 $f(x)=(x-1)^3(x+a)$

한편 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F'(x)}{G'(x)}=\dfrac{1}{4}$ 에서

$$F'(x)=\frac{3(x-1)^2(x+a)+(x-1)^3}{(x-1)^3(x+a)}$$

$=\dfrac{3(x+a)+(x-1)}{(x-1)(x+a)}$ 이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{3(x+a)+(x-1)}{(x-1)(x+a)}}{\dfrac{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}{g(x)\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\{3(x+a)+(x-1)\}g(x)\sin x}{(x-1)(x+a)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(4x+3a-1)g(x)\sin x}{(x-1)(x+a)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$$

$$=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

위에서 $x\to0$ 일 때 (분자)$\to0$ 이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to0$ 에서

$\lim\limits_{x\to0}[(x-1)(x+a)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}]=0$

$ag(0)=0$

$a=0$, 또는 $g(0)=0$

$a=0$ 일 때,

㉡에서

$$\lim_{x\to0}\frac{(4x-1)g(x)\sin x}{x(x-1)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{g(x)}{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}\times\frac{4x-1}{x-1}\times\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{1}{4}$$

이때, 위의 극한값이 존재하고 극한값

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x-1}{x-1}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{g'(x)\sin x+g(x)\sin x}=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이어야 한다.

$g(0)\neq0$ 이라 하면 위의 식의 좌변은 $\dfrac{g(0)}{g(0)}=1$

이므로 만족시키지 않는다.

$g(0)=0$ 일 때, $g(x)=x(x^2+cx+d)$

$(d\neq0)$ 라 하면 ㉢의 좌변은

$$\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+cx+d)}{(3x^2+2cx+d)\sin x+x(x^2+cx+d)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+cx+d)}{(3x^2+2cx+d)\dfrac{\sin x}{x}+(x^2+cx+d)\cos x}$$

$$=\frac{d}{d+d}=\frac{1}{2}$$

이므로 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(x)=x^2(x+c)$ $(c\neq 0)$이라 하면 ⓒ의 좌변은

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+c)}{(3x^2+2cx)\sin x+x^2(x+c)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+c}{(3x+2c)\dfrac{\sin x}{x}+(x+c)\cos x}=\frac{c}{2c+c}=\frac{1}{3}$$

$g(x)=x^3$이라 하면 ⓒ의 좌변은

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^2\times\sin x+x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\times\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=\frac{1}{4}$$

그러므로 위의 식을 만족시킨다.

그러므로 $g(x)=x^3$이다.

만약 $a\neq 0$이고 $g(0)=0$이라 하자.

$g(x)=x(x^2+cx+d)$라 하면 ⓛ에서

$$-\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\frac{(4x-3a+1)(x^2+cx+d)\sin x}{(3x^2+2cx+d)\dfrac{\sin x}{x}+(x^2+cx+d)\cos x}=\frac{1}{4}$$

이때, $x\to 0$일 때, (분자)$\to 0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to 0$에서 $d=0$

이때 위의 식은

$$-\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\frac{(4x-3a+1)(x+c)\sin x}{(3x+2c)\dfrac{\sin x}{x}+(x+c)\cos x}=\frac{1}{4}$$

$x\to 0$일 때, (분자)$\to 0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to 0$에서 $c=0$

이때, 위의 식은

$$-\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\frac{(4x-3a+1)x\sin x}{3\sin x+x\cos x}$$

$$=-\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\frac{(4x-3a+1)\sin x}{3\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}3=0$$

그러므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서

$f(x)=x(x-1)^3$, $g(x)=x^3$이므로

$f(3)+g(3)=24+27=51$

58) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(1+\sin x)=1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(-x)=\lim_{t\to 0+}f(t)=\lim_{t\to 0+}(-1+\sin t)=-1$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to 0-}f(x)f(-x)=1\cdot(-1)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(-1+\sin x)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(-x)=\lim_{t\to 0-}f(t)=\lim_{t\to 0-}(1+\sin t)=1$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to 0}f(x)f(-x)=-1$ (참)

ㄴ. $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때, $f(x)\to 0-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(f(x))=\lim_{t\to 0-}f(t)=\lim_{t\to 0-}(1+\sin t)=1$

$f\left(f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=f(0)=1$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(f(x))=f\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$이므로 함수 $f(f(x))$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $g(x)=\{f(x)\}^2$라 하면 $g(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{(1+\sin x)^2-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{2\sin x+\sin^2 x}{x}$$

$$=2\left(\because\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(-1+\sin x)^2-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{-2\sin x+\sin^2 x}{x}$$

$$=-2\left(\because\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}\neq\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분불가능하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. 미분가능한 두 함수 $(1+\sin x)^2$, $(-1+\sin x)^2$의 도함수는 각각

$2(1+\sin x)\cos x$, $2(-1+\sin x)\cos x$이고 이 두 함수는 실수

전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=\{f(x)\}^2$라 하면

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}2(1+\sin x)\cos x=2$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}2(-1+\sin x)\cos x=-2$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}\neq\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$ 이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분불가능하다. (거짓)