수학 영역

공통 과목				선택 과목					
				확률과 통계		미 적 분		기 하	
1	⑤	12	③	23	②	23	⑤	23	①
2	①	13	②	24	③	24	④	24	⑤
3	④	14	④	25	④	25	①	25	③
4	④	15	①	26	①	26	③	26	④
5	⑤	16	6	27	⑤	27	②	27	②
6	④	17	8	28	①	28	⑤	28	①
7	②	18	14	29	17	29	18	29	27
8	②	19	12	30	97	30	729	30	288
9	③	20	15						
10	②	21	37						
11	①	22	72						

1. 정답) ⑤

$3\log_{\sqrt{2}}2=3\log_{2^{\frac{1}{2}}}2=6\log_2 2=6$

2. 정답) ①

$\sin\theta=\frac{1}{3}$ 이면 $\cos^2\theta=\frac{8}{9}$ 이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에서 $\cos\theta<0$ 이므로

$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

3. 정답) ④

함수 $f(x)$ 의 도함수가 $f'(x)=3x^2-4$ 이므로

$f(x)=x^3-4x+C$ (C는 적분상수)이다.

이때, $f(-1)=0$ 이므로

$$f(-1)=-1+4+C=0 \Rightarrow C=-3$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$f(2)=8-8-3=-3$$

이다.

4. 정답) ④

$$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1+0=1$$

5. 정답) ⑤

$$\lim_{x\to a}\frac{f(2x)-f(2a)}{x-a}=\lim_{2x\to2a}\frac{f(2x)-f(2a)}{2x-2a}\times2$$
$$=2\times f'(2a)$$
$$=1$$

이므로 $f'(2a)=\frac{1}{2}$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 도함수가

$f'(x)=2x$ 이므로 구하는 값은 $f'(2a)=4a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{8}$ 이다.

6. 정답) ④

부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$ 이다. 이때, 삼각형 OBP의 넓이는 부채꼴 OAB의 넓이의 절반이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{OP}}=\frac{4}{3}\pi$$

이다. 따라서 구하는 선분 OP의 길이는 $\overline{\mathrm{OP}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ 이다.

7. 정답) ②

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ 라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 도함수가 $f'(x)=x^2-2$ 이므로 $f'(1)=-1$ 이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이므로 점 B에서의 접선의 기울기는 1이다.

점 B의 x좌표를 t라 하면 $f'(t)=t^2-2=1 \Rightarrow t=\pm\sqrt{3}$ 이고, 이때의 접선의 방정식은

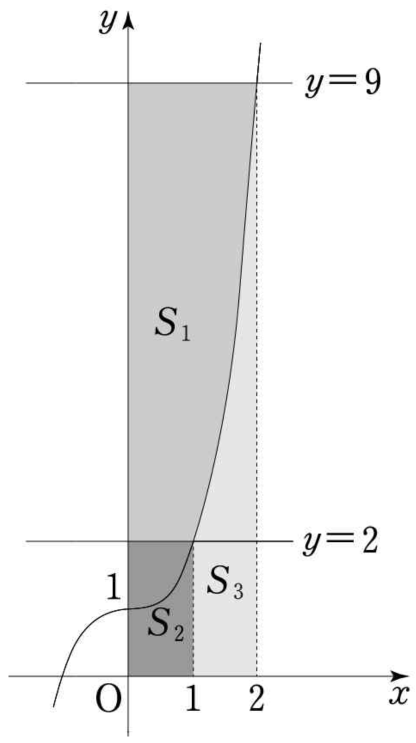
$$y=(x-\sqrt{3})+f(\sqrt{3})=x-2\sqrt{3}$$

또는 $y=(x+\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})=x+2\sqrt{3}$

이다. 두 접선의 y절편은 각각 $-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ 이므로 구하는 점 B에서의 접선의 y절편의 최댓값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

8. 정답) ②

곡선 $y=x^3+1$과 y축 및 두 직선 $y=2$, $y=9$로 둘러싸인 부분과 그 주변 도형을 그리면 다음과 같다.



구하는 값을 S_1이라 하면 S_1은 밑변의 길이와 높이가 각각 2, 9인 직사각형의 넓이에서 S_2, S_3의 값을 빼야 한다.

$$S_2=1\times2=2,$$

$$S_3=\int_1^2(x^3+1)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_1^2=(4+2)-\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{19}{4}$$

이므로 구하는 값은

$$S_1=2\times9-\left(2+\frac{19}{4}\right)=\frac{45}{4}$$

이다.

9. 정답) ③

$$\log_2\frac{a}{b}-\log_2\frac{b}{c}=\log_2\frac{ac}{b^2}=-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{ac}{b^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad ac=\frac{b^2}{2}$$

이므로

$$ac+b=4 \quad\Rightarrow\quad \frac{b^2}{2}+b=4 \quad\Rightarrow\quad b^2+2b-8=0$$

$$\Rightarrow b=-4 \text{ 또는 } b=2$$

이다. 이때, b는 양수이므로 $b=2$, $ac=2$이다.

따라서 구하는 값은

$$\log_b a+\frac{1}{\log_c b}=\log_b a+\log_b c=\log_b ac=\log_2 2=1$$

이다.

10. 정답) ②

두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq0)$에서의 속도가 각각

$$f(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3),$$

$$g(t)=t^2-7t+12=(t-3)(t-4)$$

이다. 이때, 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이려면 $f(t)\times g(t)<0$이어야 한다.

	$0<t<1$	$1<t<3$	$3<t<4$	$t>4$
$f(t)$	(+)	(−)	(+)	(+)
$g(t)$	(+)	(+)	(−)	(+)
$f(t)\times g(t)$	(+)	(−)	(−)	(+)

위 표와 같이 $1<t<3$, $3<t<4$에서 $f(t)\times g(t)<0$이므로 두 점 P와 Q는 $1<t<3$, $3<t<4$에서 서로 반대 방향으로 이동한다. 따라서 구하는 값은

$$\int_1^4|f(t)|\,dt=\int_1^3|(t-1)(t-3)|\,dt+\int_3^4(t-1)(t-3)\,dt$$

$$=\frac{|1|}{6}\times(3-1)^3+\int_0^1t(t+2)\,dt$$

$$=\frac{4}{3}+\left[\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^1=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+1=\frac{8}{3}$$

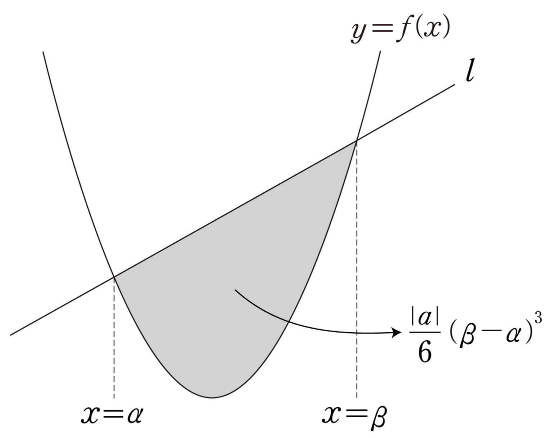
이다.

[참고]

최고차항의 계수가 a인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l이 만나는 교점의 x좌표를 각각 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

이다.



11. 정답) ①

$a_nb_n=-16$이므로 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r, $\frac{1}{r}$ $(r>0)$이라 할 수 있다. $a_n=a_1\times r^{n-1}$, $b_n=b_1\times\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$이라 하면

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1}{b_1}\times r^{2n-2}=\frac{a_1}{b_1}\times\frac{1}{r^2}\times(r^2)^n=-4^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

이므로 $r^2=\frac{1}{4}\Rightarrow r=\frac{1}{2}$ $(\because r>0)$이고,

$$\frac{a_1}{b_1}\times\frac{1}{r^2}=\frac{a_1}{b_1}\times 4=-4^3 \Rightarrow b_1=-\frac{a_1}{16}$$

이다. 이때, $a_1b_1=-\frac{(a_1)^2}{16}=-16$에서 $a_1=\pm16$, $b_1=\mp1$이고, $a_1>b_1$이므로 $a_1=16$, $b_1=-1$이다.

따라서 구하는 값은

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k-b_k)=\frac{16\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{(-1)\times\{2^5-1\}}{2-1}$$
$$=31-(-31)$$
$$=62$$

이다.

12. 정답) ③

$4^{q_n}+1-n^2=2^{q_n+1}\Rightarrow(2^{q_n})^2+1-n^2=2\times2^{q_n}$이므로 $2^{q_n}=t$ $(t>0)$이라 하면

$$(2^{q_n})^2+1-n^2=2\times2^{q_n}\Rightarrow t^2+1-n^2=2t$$
$$\Rightarrow t^2-2t-(n-1)(n+1)=0$$
$$\Rightarrow \{t+(n-1)\}\{t-(n+1)\}=0$$
$$\Rightarrow t=-n+1 \text{ 또는 } t=n+1$$

이다. 이때, n은 2 이상의 자연수이고 $t>0$이므로 $t=n+1$이다. 즉, $q_n=\log_2(n+1)$이므로 (가) $=n+1$이다.

따라서 두 곡선 $y=|4^x+1-n^2|$, $y=2^{x+1}$이 만나는 두 점을 지나는 직선의 기울기 a_n은

$$a_n=\frac{2^{q_n+1}-2^{p_n+1}}{q_n-p_n}=\frac{2^{\log_2(n+1)+1}-2^{\log_2(n-1)+1}}{\log_2(n+1)-\log_2(n-1)}$$
$$=\frac{2(n+1)-2(n-1)}{\log_2\frac{n+1}{n-1}}$$
$$=\frac{4}{\log_2\frac{n+1}{n-1}}$$

이므로 (나) $=\frac{4}{\log_2\frac{n+1}{n-1}}$이다.

그러므로

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{\log_2\frac{k+1}{k-1}}{4}=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{k+1}{k-1}$$
$$=\frac{1}{4}\log_2\left(\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n-1}\right)$$
$$=\frac{\log_2\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}}{4}$$

이므로 (다) $=\frac{\log_2\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}}{4}$이다.

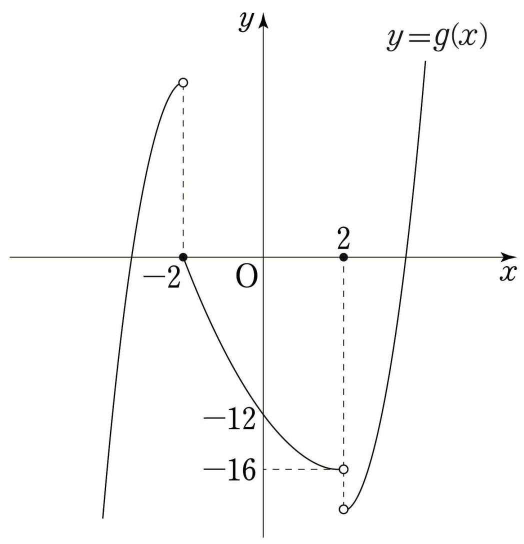
따라서 구하는 값은

$$f(5)\times g(3)\times h(4)=6\times\frac{4}{\log_2 2}\times\frac{\log_2 10}{4}=6\log_2 10$$

이다.

13. 정답) ②

함수 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to2-}g(x)=-16$, $g(2)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. 또한, $\lim_{x\to-2-}g(x)=f(-2)$이고, $\lim_{x\to-2+}g(x)=g(-2)=0$이므로 $f(-2)\neq0$이면 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 연속이려면 $f(-2)=0$이어야 한다. 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극값을 가지므로 $f(x)=(x+2)^2(x-a)$라 할 수 있고, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로 $f'(2)=0$이다. 즉, 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)=2(x+2)(x-a)+(x+2)^2$에서

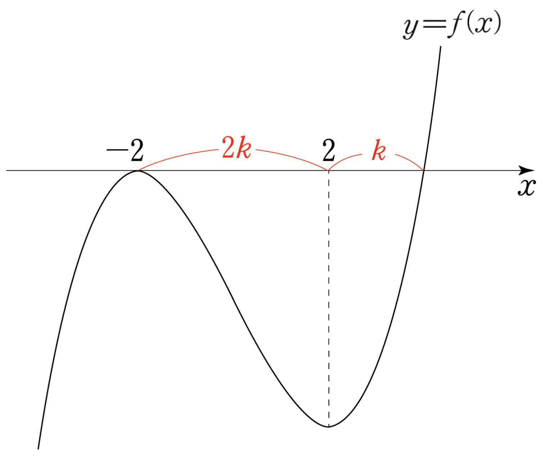
$$f'(2)=2\times4\times(2-a)+16=0 \Rightarrow a=4$$

이다. (참)

[참고]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수가 극대인 점 A에서 그은 접선이 이 삼차함수의 그래프와 만나는 점을 B라 하자.
이때, 이 삼차함수가 극소인 점 C의 x좌표는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 x좌표와 같다.
극소인 점 C에서 그은 접선에 대한 상황도 위와 동일하고, 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수도 같은 관계를 지닌다.

이를 이용하면 위 문제에서 최고차항의 계수가 1이고 $x=-2$, $x=2$에서 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 x축과 접하므로 $x=4$에서 x축과 만난다는 것을 알 수 있다.



ㄷ. $\lim_{x\to 2} g(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to 2+} g(x)$여야 한다. $\lim_{x\to 2-} g(x)=-16$이고, $\lim_{x\to 2+} g(x)$의 값은 함수 $f(x)$의 극솟값이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)=-16$이다. 함수 $f(x)$의 도함수가

$$f'(x)=3(x+2)(x-2)=3x^2-12$$

이므로 $f(x)=x^3-12x+C$ (C는 적분상수)이다. 즉,

$$f(2)=8-24+C=-16 \quad\Rightarrow\quad C=0$$

이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=-8+24=16$이다.

한편, 함수 $y=x^2-4$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 함수 $g(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $(x^2-4)g(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=(x^2-4)g(x)$라 하자.

$$\lim_{x\to -2-} h(x)=0,\ \lim_{x\to -2+} h(x)=0,\ h(-2)=0,$$

$$\lim_{x\to 2-} h(x)=0,\ \lim_{x\to 2+} h(x)=0,\ h(2)=0$$

이므로 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

그런데

$$\lim_{x\to -2-}\frac{h(x)-h(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2-}\frac{(x+2)(x-2)f(x)}{x+2}=-64,$$

$$\lim_{x\to -2+}\frac{h(x)-h(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2+}\frac{(x+2)^2(x-2)(x-6)}{x+2}=0,$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x+2)^2(x-2)(x-6)}{x-2}=-64,$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x+2)(x-2)f(x)}{x-2}=-64$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

14. 정답) ④

실수 t에 대하여 점 P의 x좌표를 t라 하면 점 P의 y좌표는

$$\frac{2}{3}t^3-3at^2+(4a^2+1)t$$

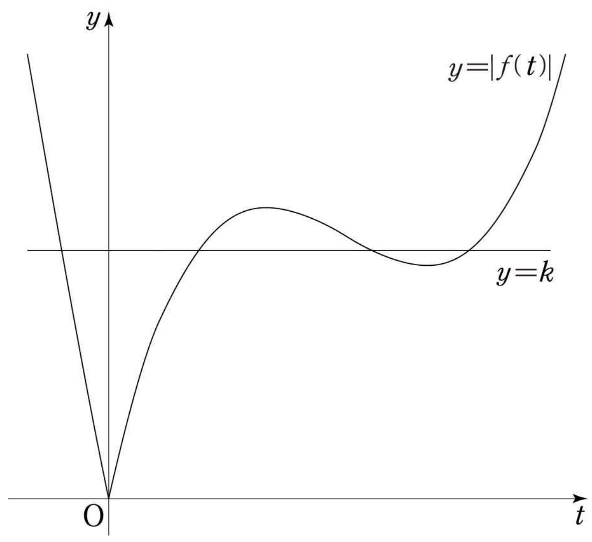
이다. 즉, 점 Q의 x좌표는 $\frac{2}{3}t^3-3at^2+(4a^2+1)t+1$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\left|\frac{2}{3}t^3-3at^2+4a^2t+1\right|$$

이다. 함수 $f(t)=\frac{2}{3}t^3-3at^2+4a^2t+1$이라 하면 도함수

$$f'(t)=2t^2-6at+4a^2=2(t-2a)(t-a)$$

의 부호가 $t=a$의 좌우에서 양에서 음으로, $t=2a$의 좌우에서 음에서 양으로 변한다. 따라서 함수 $f(t)$는 $t=a$에서 극댓값 $f(a)=\frac{5}{4}a^3+1$, $t=2a$에서 극솟값 $f(2a)=\frac{4}{3}a^3+1$을 갖는다.



그러므로 방정식 $|f(t)|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 자연수 k의 개수가 8이 되려면 자연수 a에 대하여

$$\frac{4}{3}a^3+1<k<\frac{5}{3}a^3+1$$

을 만족시키는 자연수 k의 개수가 8이어야 한다. 따라서

$$7<\left(\frac{5}{3}a^3+1\right)-\left(\frac{4}{3}a^3+1\right)\le 9 \quad\Rightarrow\quad 21<a^3\le 27$$

이므로 $a=3$이다.

[참고]

실제로 $21 < a^3 \le 27$은 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수가 8이 되도록 하는 필요조건이다. 따라서 $a=3$을 원래의 부등식에 대입하여 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수가 8이 맞는지 직접 확인해야 한다.

15. 정답) ①

[해설강의 참고]

16. 정답) 6

$$\sqrt[3]{4^k}=2^{k-2} \Rightarrow 2^{\frac{2}{3}k}=2^{k-2}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}k=k-2$$
$$\Rightarrow k=6$$

17. 정답) 8

함수 $f(x)=x^2+ax+b$라 하자. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2+x}=2$에서 $x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $f(0)=b=0$이다. 주어진 식을 정리하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{x+a}{x+1}=a=2$$

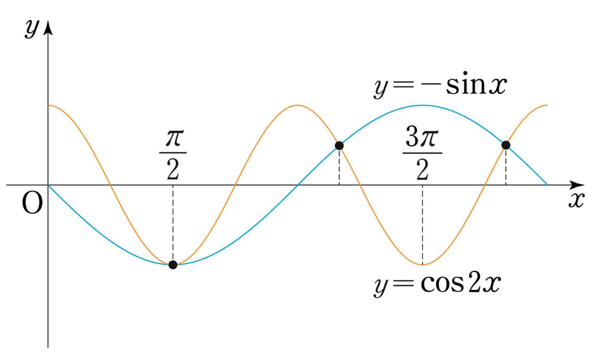
이므로 $f(x)=x^2+2x$이다. 따라서 구하는 값은 $f(2)=8$이다.

18. 정답) 14

$\sin(x-\pi)=-\sin x$이므로

$$\sin(x-\pi)=\cos 2x \Rightarrow -\sin x=\cos 2x$$

이다. $0\le x\le 2\pi$에서 두 곡선 $y=-\sin x$, $y=\cos 2x$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 두 곡선 $y=-\sin x$, $y=\cos 2x$는 모두 직선 $x=\dfrac{3\pi}{2}$에 대하여 대칭이다. 즉, 방정식 $-\sin x=\cos 2x$의 서로 다른 모든 실근의 합은 $\dfrac{\pi}{2}+3\pi=\dfrac{7}{2}\pi$이므로 $p=\dfrac{7}{2}$이다.

따라서 구하는 값은 $4p=14$이다.

19. 정답) 12

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=x^2+8x+7=(x+7)(x+1)$$

이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-7,\ -1)$에서 감소한다. 따라서

$$a-1\ge-7,\ a+1\le-1 \Rightarrow -6\le a\le-2$$

이므로 구하는 값은 $(-6)\times(-2)=12$이다.

20. 정답) 15

$|a_{10}|=a_{36}$에서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로

$$-a_{10}=a_{36} \Rightarrow a_{10}+a_{36}=0 \Rightarrow a_{23}=0$$

이다. 한편,

$$\begin{aligned}S_k=S_{2k} &\Rightarrow S_{2k}-S_k=0\\ &\Rightarrow a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}=0\\ &\Rightarrow \frac{a_{k+1}+a_{2k}}{2}\times\{2k-(k+1)+1\}=0\\ &\Rightarrow \frac{a_{k+1}+a_{2k}}{2}\times k=0\\ &\Rightarrow a_{k+1}+a_{2k}=0\ (\because k\ne0)\\ &\Rightarrow a_{\frac{3k+1}{2}}=0\end{aligned}$$

이므로 $a_{\frac{3k+1}{2}}=a_{23}$이다. 따라서 구하는 값은

$$\frac{3k+1}{2}=23 \Rightarrow k=15$$

이다.

[참고]

위 문제에서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로 $a_m=0$인 자연수 m이 존재하지 않거나 1개 존재한다.

$|a_{10}|=a_{36}$에서 $a_{23}=0$임을 알 수 있고, 즉 $a_{\frac{3k+1}{2}}=0$을 만족시키는 자연수 k가 반드시 하나 존재한다.

21. 정답) 37

[해설강의 참고]

22. 정답) 72

[해설강의 참고]

수학 영역(확률과 통계)

MENTOR AJOODA LAB

23. 정답) ②

$(x-y)^5$의 일반항

$${}_5\mathrm{C}_r x^r(-y)^{5-r} \text{ (단, } r\text{는 } 0 \le r \le 5 \text{인 정수)}$$

에 대하여 이 전개식의 x^3y^2항은 $r=3$일 때이다.
따라서 구하는 값은 ${}_5\mathrm{C}_3=10$이다.

24. 정답) ③

한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 따라서 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}$$

이다.

25. 정답) ④

*Sol*1) 검은 바둑돌이 2개 이하 나오는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 검은 바둑돌이 0개 나오는 경우 흰 바둑돌이 4개 나와야 하므로 이때의 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{1}{126}$이다.

(ⅱ) 검은 바둑돌이 1개 나오는 경우 흰 바둑돌이 3개 나와야 하므로 이때의 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{20}{126}$이다.

(ⅲ) 검은 바둑돌이 2개 나오는 경우 흰 바둑돌이 2개 나와야 하므로 이때의 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{60}{126}$이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{126}+\frac{20}{126}+\frac{60}{126}=\frac{9}{14}$이다.

*Sol*2) 검은 바둑돌이 2개 이하 나오는 사건을 A라 하면 A^C은 검은 바둑돌이 3개 이상 나오는 사건이다.
검은 바둑돌이 3개 이상 나오는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 검은 바둑돌이 3개 나오는 경우 흰 바둑돌이 1개 나와야 하므로 이때의 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{40}{126}$이다.

(ⅱ) 검은 바둑돌이 4개 나오는 경우 흰 바둑돌이 0개 나와야 하므로 이때의 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{5}{126}$이다.

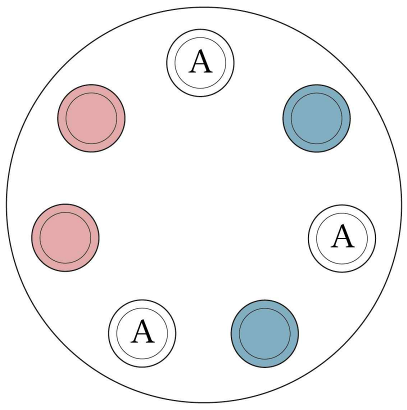
즉, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{40}{126}+\frac{5}{126}=\frac{5}{14}$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$$

이다.

26. 정답) ①

광어 초밥과 연어 초밥, 새우 초밥을 각각 A, B, C라 하면 각 접시에 A 3개를 서로 이웃하지 않도록 담는 경우는 아래 경우뿐이다.



즉, 각 접시에 A 3개를 담는 경우의 수는 1이다.
이때, 각 접시에 B 2개와 C 2개를 각각 서로 이웃하지 않도록 담으려면 위의 그림에서 B와 C를 빨간 접시와 파란 접시에 각각 하나씩 담아야 한다.
두 빨간 접시에 B와 C를 각각 하나씩 담는 경우의 수는 2!, 두 파란 접시에 B와 C를 각각 하나씩 담는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는

$$1\times2!\times2!=4$$

이다.

27. 정답) ⑤

세 명의 학생을 각각 A, B, C라 하자. 학생 A가 받는 사과와 배를 각각 a, a', 학생 B가 받는 사과와 배를 각각 b, b', 학생 C가 받는 사과와 배를 각각 c, c'라 하면 세 명의 학생에게 사과와 배를 각각 한 개씩 나누어 주는 경우의 수는 6!이다. 이때, a와 a', b와 b', c와 c'의 순서는 정해져 있으므로 구하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$$

이다.

28. 정답) ①

(ⅰ) 주머니 A에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$이다. 흰 공 2개를 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$, 모두 검은 공일 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$이다. 즉, 주머니 A에서 흰 공 2개를 꺼내어 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같을 확률은 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$이다.

(ⅱ) 주머니 A에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 흰 공 1개와 검은 공 1개일 확률은 $\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$이다. 흰 공 1개와 검은 공 1개를 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률은 $\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$, 모두 검은 공일 확률은 $\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$이다. 즉, 주머니 A에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내어 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같을 확률은 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{15}+\frac{2}{5}\right)=\frac{7}{30}$이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{5}+\frac{7}{30}=\frac{13}{30}$이다.

29. 정답) 17

[해설강의 참고]

30. 정답) 97

[해설강의 참고]

23. 정답) ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=3$$

24. 정답) ④

$$f(x)=\ln(ax-b)=\ln a\left(x-\frac{b}{a}\right)=\ln\left(x-\frac{b}{a}\right)+\ln a\ (a>0)$$

이고, 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식이 $x=2$이므로

$$f(x)=\ln(x-2)+\ln a$$

이다. 따라서 $f'(x)=\frac{1}{x-2}$이므로 구하는 값은 $f'(3)=1$이다.

25. 정답) ①

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{a_n}-2\right)=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{a_n}-2\right)=0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=\frac{2}{3}$$

이다. $a_n\neq 0$이므로 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-a_n}{n+2a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{a_n}-1}{\frac{n}{a_n}+2}=\frac{3\times\frac{2}{3}-1}{\frac{2}{3}+2}=\frac{3}{8}$$

이다.

26. 정답) ③

점 P의 위치 $(x,\ y)$가 $x=\sec^2 t,\ y=2\tan t$이므로

$$\frac{dx}{dt}=2\sec^2 t\tan t,\ \frac{dy}{dt}=2\sec^2 t$$

이다. 즉, 점 P의 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}&=\sqrt{4\sec^4 t\tan^2 t+4\sec^4 t}\\&=\sqrt{4\sec^4 t(\tan^2 t+1)}\\&=\sqrt{4\sec^6 t}\\&=2\sec^3 t\ \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

이고, $\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{3}$일 때 $\frac{1}{2}\le\cos t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\cos t=\frac{1}{2}$일 때 점 P의 속력이 최대가 된다.

따라서 구하는 값은 $2\sec^3 t=2\times 2^3=16$이다.

27. 정답) ②

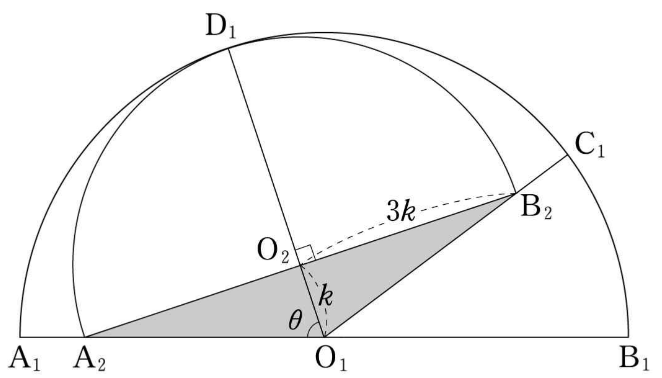


그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점 O_2에 대하여

삼각형 $O_1A_2B_2$가 이등변삼각형이므로 $\overline{A_2B_2}\perp\overline{O_1O_2}$이다.

이때, $\angle A_2O_1O_2=\theta$라 하면 $\angle C_1O_1B_1=\pi-2\theta$이다.

$\cos(\angle C_1O_1B_1)=\frac{4}{5}$이므로

$$\cos(\pi-2\theta)=-\cos 2\theta=-\cos^2\theta+\sin^2\theta=-2\cos^2\theta+1$$

$$\Rightarrow\ 2\cos^2\theta=\frac{1}{5}\ \Rightarrow\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

이다. 따라서 $\overline{O_1O_2}=k$라 하면, $\overline{B_2O_1}=\sqrt{10}k$, $\overline{O_2B_2}=3k$이고,

직선 O_1O_2가 호 A_1C_1과 만나는 점을 D_1이라 할 때,

$\overline{O_2D_1}=\overline{O_2B_2}$이므로 $\overline{O_1D_1}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2D_2}=k+3k=4k$이다.

$\overline{O_1D_1}$은 지름이 A_1B_1인 원의 반지름이므로

$4k=1\ \Rightarrow\ k=\frac{1}{4}$이다. 즉, 삼각형 $O_nA_{n+1}B_{n+1}$의 넓이를

T_n이라 하면, 삼각형 $O_1A_2B_2$의 넓이 T_1은

$$T_1=\frac{1}{2}\times\overline{A_2B_2}\times\overline{O_1O_2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

이다.

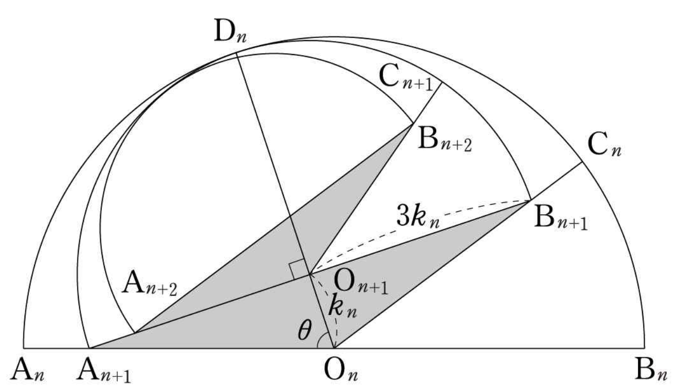


그림 R_n에서 선분 $A_{n+1}B_{n+1}$의 중점을 O_{n+1}이라 하고

$\angle A_{n+1}O_nO_{n+1}=\theta$라 하면, 위와 같은 과정으로 계산하여

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$임을 알 수 있다.

그러므로 $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=k_n$이라 하면 $\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=3k_n$이고 $4k_n=\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{D}_n}=\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{B}_n}$이다.

점 O_n을 중심으로 하는 반원과 점 O_{n+1}을 중심으로 하는 반원이 닮음이고, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{B}_n}:\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=4:3$이므로 두 삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$과 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}\mathrm{B}_{n+2}$의 닮음비는 $4:3$이다.

즉, 수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{16}$, 공비가 $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$인 등비수열이다.

따라서 S_n은 수열 $\{T_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{3}{7}$$

이다.

28. 정답) ⑤

점 $(t^2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점 중 x좌표가 큰 것을 $\mathrm{P}(g(t),\ f(g(t)))$라 하면, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 t^2에서 $g(t)$까지 변할 때의 평균변화율과 함수 $f(x)$의 $x=g(t)$에서의 미분계수가 같아야 하므로

$$\frac{f(g(t))}{g(t)-t^2}=f'(g(t)) \ \Rightarrow\ \frac{g(t)\ln g(t)-g(t)}{g(t)-t^2}=\ln g(t)$$

$$\Rightarrow\ t^2=\frac{g(t)}{\ln g(t)}$$

이다. 위 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$2t=\frac{\ln g(t)-1}{\{\ln g(t)\}^2}g'(t)\ \cdots\ ㉠$$

이고, $t=\sqrt{\frac{g(t)}{\ln g(t)}}$이므로 이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$2\sqrt{\frac{g(t)}{\ln g(t)}}=\frac{\ln g(t)-1}{\{\ln g(t)\}^2}g'(t)$$

$$\Rightarrow\ g'(t)=2\sqrt{\frac{g(t)}{\ln g(t)}}\,\frac{\{\ln g(t)\}^2}{\ln g(t)-1}$$

이다. $g(a)=e^2$이므로 구하는 값은

$$g'(a)=2\sqrt{\frac{e^2}{2}}\,\frac{2^2}{2-1}=4\sqrt{2}e$$

이다.

29. 정답) 18

[해설강의 참고]

30. 정답) 729

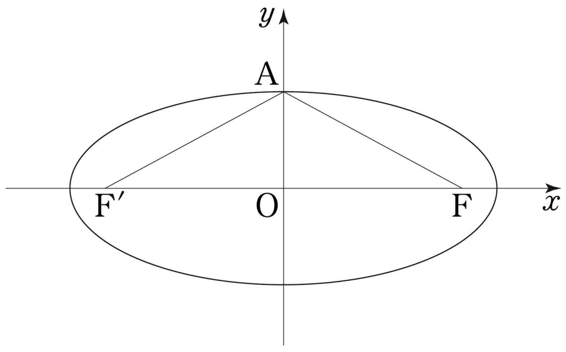
[해설강의 참고]

수학 영역(기하)

23. 정답) ①

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2,\ 4) \cdot (-1,\ 2) = -2 + 8 = 6$

24. 정답) ⑤



점 A가 y축 위의 점이므로 삼각형 AFF′의 밑변을 $\overline{\mathrm{FF'}} = 8$이라 하면 높이는 $\overline{\mathrm{AO}}$이다. 즉,

$$(\text{삼각형 AFF}'\text{의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 8 \times \overline{\mathrm{AO}} = 8$$

이므로 $\overline{\mathrm{AO}} = 2$이다. 또한, 직각삼각형 AOF에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{AF}}^2 = \overline{\mathrm{AO}}^2 + \overline{\mathrm{OF}}^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$
$$\Rightarrow \quad \overline{\mathrm{AF}} = 2\sqrt{5}$$

이고, 같은 방식으로 $\overline{\mathrm{AF'}} = 2\sqrt{5}$이다. 이 타원의 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{AF}} + \overline{\mathrm{AF'}}$의 값과 같으므로 구하는 값은

$$\overline{\mathrm{AF}} + \overline{\mathrm{AF'}} = 4\sqrt{5}$$

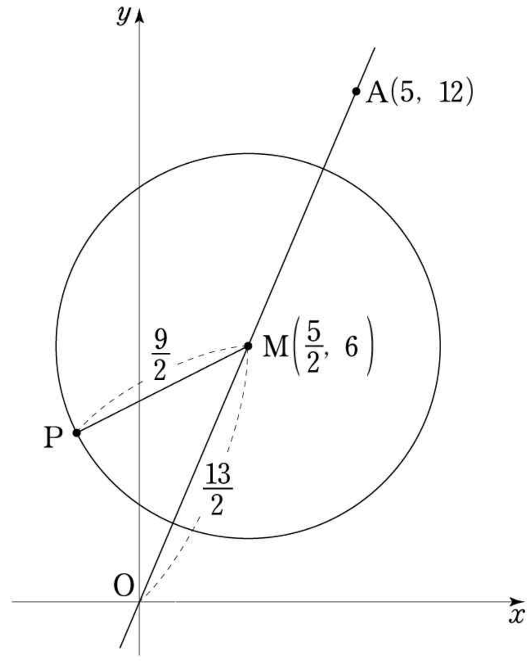
이다.

25. 정답) ③

선분 OA의 중점을 M이라 하면

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PO}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}} + \overrightarrow{\mathrm{MO}}| = |2\overrightarrow{\mathrm{PM}}| = 9$$
$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{\mathrm{PM}}| = \frac{9}{2}$$

이므로 점 P는 점 $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2},\ 6\right)$을 중심으로 하고 반지름이 $\frac{9}{2}$인 원 위의 점이다.



$\overline{\mathrm{OM}} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{13}{2} > \frac{9}{2}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값은 세 점 O, P, M이 순서대로 한 직선 위에 있을 때 생긴다.

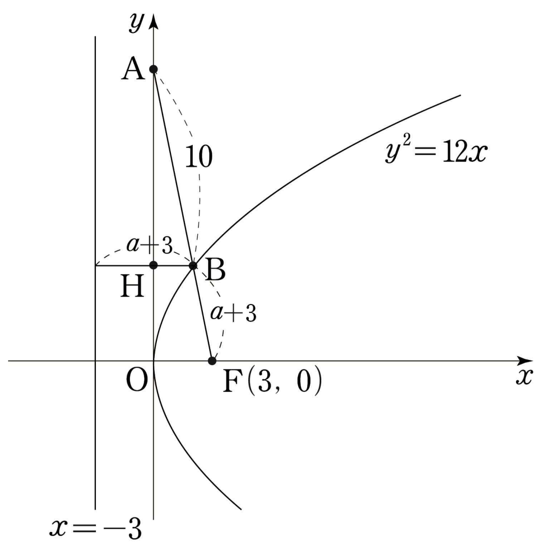
따라서 구하는 값은

$$\overline{\mathrm{OM}} - \overline{\mathrm{MP}} = \frac{13}{2} - \frac{9}{2} = 2$$

이다.

26. 정답) ④

점 B의 x좌표를 a라 하면, 점 B와 포물선의 준선 $x = -3$ 사이의 거리가 $a + 3$이므로 $\overline{\mathrm{BF}} = a + 3$이다. 또한, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AHB와 삼각형 AOF는 닮음이다.



즉,

$$\overline{AB} : \overline{AF} = \overline{HB} : \overline{OF} \quad \Rightarrow \quad 10 : 13+a = a : 3$$

이므로

$$13a + a^2 = 30 \quad \Rightarrow \quad (a+15)(a-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad a = -15 \text{ 또는 } a = 2$$

이다. 이때, a는 양수이므로 $a=2$이다. 따라서 구하는 값은 $\overline{BF} = a+3 = 5$이다.

27. 정답) ②

두 초점이 F, F′인 쌍곡선을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면 $a^2+b^2=c^2$이고, 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$이다. $\overline{FF'}=2c$, $\overline{AB}=2b$이므로

$$\overline{FF'} = 3\overline{AB} \quad \Rightarrow \quad 2c = 6b \quad \Rightarrow \quad c = 3b$$

이고 $a^2+b^2=c^2$에서

$$a^2+b^2=9b^2 \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{2}b$$

이다. 이때, 점 P의 좌표를 $(x_1,\ 3b)$라 하면

$$\frac{(x_1)^2}{8b^2} - \frac{9b^2}{b^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad (x_1)^2 = 64b^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \pm 8b$$

이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\pm 8b}{8b^2}x - \frac{3b}{b^2}y = -1 \quad \Rightarrow \quad \pm x - 3y = -b$$

이다. 즉, 이 접선의 x절편은 $\mp b$, y절편은 $\frac{b}{3}$이므로 이 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times b \times \frac{b}{3} = \frac{b^2}{6} = \frac{2}{3}$$

이므로 $b=2$이다.

한편, 삼각형 PFF′은 밑변이 $\overline{FF'}$, 높이가 $\overline{FP}$인 직각삼각형이므로 구하는 값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{FF'} \times \mathrm{PF} = \frac{1}{2} \times 6b \times 8b = 24b^2 = 96$$

이다.

28. 정답) ①

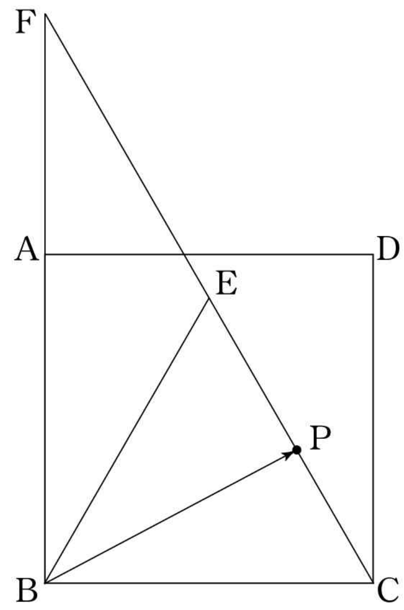
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} \\ &= (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CP} \end{aligned}$$

이고, $\overrightarrow{CE}$와 $\overrightarrow{CP}$는 평행하므로 선분 CE의 연장선 위에 $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{EQ}$를 만족시키는 점 Q가 존재한다.

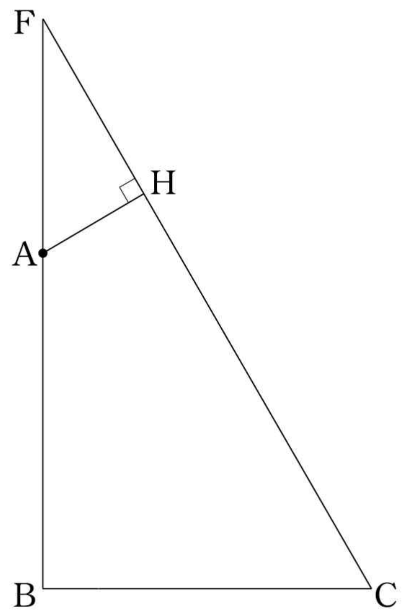
즉, $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CQ}$이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} \\ &= \overrightarrow{AQ} \end{aligned}$$

이다.



한편, 두 직선 AB와 CE의 교점을 F라 하면 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\angle BCE = \frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{CF} = 2\overline{BC} = 4$이다. 그러므로 $\overline{EF} = 2$이고 점 Q는 선분 $\overline{EF}$ 위의 점이다. 또한, 점 A에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면 $|\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{AQ}|$의 최솟값은 $\overline{AH}$이다.



두 삼각형 FAH와 FCB는 닮음이고

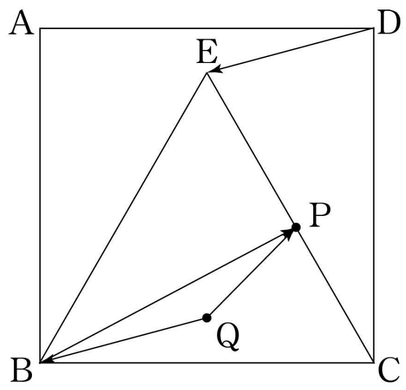
$$\overline{FA} = \overline{FB} - \overline{AB} = 2\sqrt{3} - 2$$

이므로 구하는 값은

$$\overline{AH} = \overline{FA}\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - 1$$

이다.

[별해]



$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{QB}$인 점 Q를 삼각형 EBC 내부에 잡으면

$$\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{QP}$$

이다. 즉, $|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최솟값은 점 Q와 직선 EC 사이의 거리이다.

한편, 선분 BC의 중점을 $(0,\ 0)$이라 하면, 점 Q의 좌표는 $(0,\ 2-\sqrt{3})$, 직선 EC는 $x+\dfrac{y}{\sqrt{3}}=1$이다. 따라서 구하는 값은

$$\frac{\left|\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-1\right|}{\sqrt{1^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{3}-2}{2}=\sqrt{3}-1$$

이다.

29. 정답) 27

[해설강의 참고]

30. 정답) 288

[해설강의 참고]